1

BÁZE A DIMENZE

<u>Steinitzova věta</u> Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k \in [u_1, u_2, \dots u_n] \subseteq U$.
Jestliže $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou lineárně nezávislé, pak $k \le n$.

<u>Důsledek:</u> Nechť U je vekt. prostor konečné dimenze.
Pak každé dvě jeho báze mají stejný počet prvků.

<u>Důkaz důsledku</u> Mějme báze $v_1, v_2, \dots v_k$ a $u_1, u_2, \dots, u_n$.
Vektory $v_1, v_2, \dots v_k \in U = [u_1, u_2, \dots u_n]$ a jsou LN.
Podle S. věty je $k \le n$.

(2)

Obrácené: $u_1, u_2, \dots, u_n \in U = [v_1, v_2, \dots v_k]$ jsou lin. nezávislé.

Podle St. věty je $n \le k$.

Závěr: $k = n$.

<u>Důkaz Steinitzovy věty:</u> Věta má tvar implikace

$$v_1, v_2, \dots v_k \text{ LN} \Longrightarrow k \le n.$$

Provedeme nepřímý důkaz: dokážeme, že

$$k > n \Longrightarrow v_1, v_2, \dots, v_k \text{ jsou lin. závislé.}$$

Podle předpokladu $v_1, v_2, \dots v_k \in [u_1, u_2, \dots, u_n]$. Proto

$$v_1 = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots + a_{n1} u_n$$

$$v_2 = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{n2} u_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_k = a_{1k} u_1 + a_{2k} u_2 + \dots + a_{nk} u_n$$

Tyto vztahy je možné zapsat maticově takto:

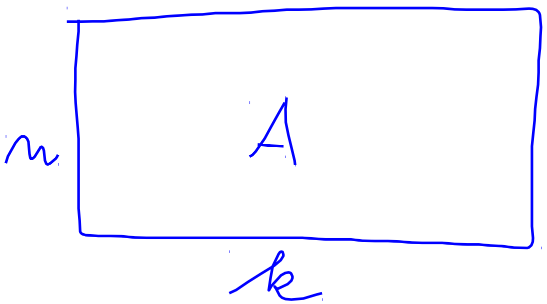
$$(v_1, v_2, \dots v_k) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= (u_1, u_2, \dots u_n) A$$

A je matice typu $n \times k$

④

Předpokládáme, že $k > n$. Tedy matice A je širší než vyšší



Uvažujme rovnici

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \swarrow n \text{ nul}$$

Řešíme-li tuto rovnici Gaussovou eliminací, dostaneme schod. tvar ve kterém je nejvýše $\underline{n}$ vedoucích koeficientů.
Tedy můžeme aspoň $k-n$ neznámých volit jako parametry libovolně.
Proto má soustava řešení $(x_1, x_2, \ldots x_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.
Vezměme jedno takové řešení $(x_1, x_2, \ldots x_k)$.

Spočítáme $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k$:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = (v_1\ v_2\ \dots\ v_k)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \big((u_1, u_2, \dots u_n) A\big)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} =$$

$$= (u_1, u_2, \dots u_n)\left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}\right) = (u_1, u_2, \dots u_n)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

Tedy z předpokladu $k > n$ jsme odvodili, že $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou lin. závislé. $\boxtimes$

Víme, že všechny báze konečně dimenzionálního prostoru U mají stejný počet prvků. Proto můžeme definovat pojem dimenze.

Dimenze vektorového prostoru U konečné dimenze je počet prvků nějaké báze.

<u>Příklady</u>: (1) Vekt. prostor $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n \qquad \text{báze } (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

(2) Vekt. prostor $\mathbb{R}_n[x]$ nad $\mathbb{R}$ – reálné polynomy stupně $\leq n$.

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[x] = n+1 \qquad \text{báze } (1, x, x^2, \dots, x^n)$$

3. $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$ $\quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n \quad$ baza $(e_1, e_2, \ldots e_n)$

4. $\mathbb{C}^2$ je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$ $\quad \cdot\ \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

ali hkrati

$\mathbb{C}^2$ je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$$

ali $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

Baza je npr. $(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)$.

$$\mathbb{C}^2 \ni (a_1 + i b_1, a_2 + i b_2) = a_1 (1,0) + b_1 (i,0) + a_2 (0,1) + b_2 (0,i)$$

$$a_1 (1,0) + b_1 (i,0) + a_2 (0,1) + b_2 (0,i) = (0,0)$$

$$(a_1 + i b_1, a_2 + i b_2) = (0,0)$$

8

$a_1 + ib_1 = 0 \implies a_1 = b_1 = 0$

$a_2 + ib_2 = 0 \implies a_2 = b_2 = 0$

Tedy $(1,0)$, $(i,0)$, $(0,1)$ a $(0,i)$ jsou LN v $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$

Jestliže uvažujeme $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$, pak $(1,0)$, $(i,0)$, $(0,1)$, $(0,i)$ jsou lin. závislé:

$$1 \cdot (1,0) + i\,(i,0) + 0\,(0,1) + 0 \cdot (0,i) = (1,0) + (-1,0) = (0,0)$$

Obecně: Každý vekt. prostor U nad $\mathbb{C}$ je zároveň vekt. prostorem nad $\mathbb{R}$. Je-li $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ báze U nad $\mathbb{C}$, pak $(v_1, iv_1, v_2, iv_2, \ldots, v_n, iv_n)$ je báze U nad $\mathbb{R}$. Proto $\dim_{\mathbb{R}} U = 2 \dim_{\mathbb{C}} U$.

5. $Mat_{k\times n}(\mathbb{R})$ .... matice typu $k\times n$ reálné

Báze je tvořena maticemi M_{ij}, které mají v i-tém řádku a j-tém sloupci 1 a jinde 0.

$$\dim_{\mathbb{R}} Mat_{k\times n}(\mathbb{R}) = k\cdot n.$$

ČTYŘI UŽITEČNÉ VĚTY O DIMENZI

1. Jestliže $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé, pak tvoří bázi.

<u>Důkaz:</u> Vezmeme nějakou bázi $u_1, u_2, \ldots u_n$ prostoru U.
Použijeme větu o výběru LN vektorů se stejným lin. obalem.

$v_1, \ldots v_m$ LN

$u_1, \ldots u_n$ vektory z U

Pak ze seznamu $v_1, v_2, \ldots v_m, u_1, u_2, \ldots u_n$ lze vybrat LN se stejným lin. obalem jako je $[v_1, v_2, \ldots v_m, \underbrace{u_1, u_2, \ldots, u_n}_{\text{báze}}] = U$

Vybrané vektory $v_1, \ldots, v_m, u_{i_1}, \ldots u_{i_k}$.

Kdyby jsme vybrali nějaký vektor u_i pak

$v_1, \ldots v_m, u_{i_1}, \ldots u_{i_k}$ jsou LN

$[v_1, \ldots v_m, u_{i_1}, \ldots u_{i_k}] = U$

vektory tvoří bázi, ale ta má více prvků. Spor.

Vybereme pouze $v_1, \ldots v_m$ a platí $[v_1 \ldots v_m] = U$. $v_1 \ldots v_m$ je báze.

2 Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a nechť $u_1, u_2, \dots, u_n$ generují prostor U. Pak $u_1, u_2 \dots u_n$ tvoří bázi prostoru U.

Důkaz: Použijeme opět větu o výběru LN vektorů se stejným lin. obalem.
Z vektorů $u_1, u_2, \dots u_n$ lze vybrat

$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_k}$ LN

$[u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}] = [u_1, u_2, \dots u_n] = U.$

Tedy $u_{i_1} \dots u_{i_k}$ tvoří bázi. Ta ale musí mít n prvků.
Proto $k = n$ a vybrané jsou všechny vektory. Tedy $u_1 \dots u_n$ jsou LN a tvoří bázi.

3 Nechť V je podprostor prostoru U konečné dimenze. Pak V má konečnou dimenzi a $\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} U$.

Důkaz:

Nechť dimenze $\dim_{\mathbb{K}} U = n$. Nechť $v_1, v_2, \dots v_k \in V$ jsou LN. $u_1, u_2, \dots u_n$ báze U. Potom

$$v_1, v_2, \dots v_k \in [u_1, u_2, \dots u_n] = U.$$

Tedy $k \leq n$. Předpokládejme, že V není konečné dimenze. Pak můžeme vytvořit posloupnost vektorů

$$v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} \in V, \text{ které jsou LN.}$$

$$v_1 \neq 0 \quad v_2 \in V - [v_1], \; v_3 \in V \setminus [v_1, v_2], \; v_{n+1} \in V - [v_1, \dots v_n]$$

To je ale spor s předchozím.

Nechť $v_1, v_2, \dots v_k$ je báze podprostoru V. Nechť $u_1, u_2, \dots u_n$ je báze prostoru U. Z vektorů $v_1, v_2 \dots v_k$ LN v U

$u_1, u_2, \dots u_n \in U$

vybereme

$$v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r} \quad \text{LN}$$

$$[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1} \dots u_{i_r}] = U$$

Tedy je báze prostoru U. Proto $k + r = n$

a $\quad k \leq k + r = n$.

4) Nechť V je podprostor v U a nechť

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} U.$$

Pak $V = U$.

<u>Důkaz:</u> $v_1, v_2, \dots, v_n$ nechť je báze V. $(\dim V = \dim U = n)$

$u_1, u_2, \dots, u_n$ báze U. Z nekladů

$v_1, v_2, \dots, v_n$ LN v U

$u_1, u_2, \dots, u_n$

Vybereme $v_1, v_2, \dots, v_n, u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$ LN

$$[v_1, v_2, \dots, v_n, u_{i_1}, \dots, u_{i_k}] = [v_1, \dots, v_n, \underline{u_1, \dots, u_n}] = U$$

Vybrané vektory tvoří bázi celého U. Musí jich být tedy n.
To znamená, že to jsou $v_1, \dots, v_n$. Ty jsou báze V i U současně. Proto $V = U$.

Věta: Nechť $v_1, v_2 \ldots v_k$ jsou LN vektory v U konečné dimense. Pak je lze doplnit na bázi celého U.

Důkaz:

$v_1, v_2 \ldots v_k$ LN

$u_1, u_2, \ldots u_n$ které generují U

Podle věty o výměně LN vektorů se stejným lin. obalem lze vybrat

$$v_1, v_2 \ldots v_k, u_{i_1} \ldots u_{i_r} \quad \text{LN}$$

$$[v_1, v_2, \ldots v_k, u_{i_1} \ldots u_{i_r}] = [v_1 \ldots v_k, \underline{u_1 \ldots u_n}] = U$$

Tedy $v_1, v_2, \ldots v_k, u_{i_1} \ldots u_{i_r}$ je báze U.

Důsledek Nechť V je podprostor v U konečné dimense. Pak každou bázi podprostoru V lze doplnit na bázi prostoru U.

Důkaz Je-li $v_1, v_2, \dots v_k$ báze prostoru V, pak $v_1, \dots v_k$ jsou LN ve V a tedy LN v U. A nyní použijeme předchozí větu.

Souřadnice vektoru v dané bázi

Nechť $u_1, u_2, \dots u_n$ je báze prostoru U nad K.
Od této chvíle budeme bázi brát jako uspořádanou n-tici (nikoliv jako n-prvkovou množinu).
Báze budeme označovat malými řeckými písmeny ze začátku abecedy. $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$.
Každý vektor $u \in U$ můžeme psát ve tvaru lin. kombinace vektorů báze

$$(*) \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

Lemma: Vyjádření vektorů jako lin. kombinace $(*)$ je jednoznačné!

<u>Důkaz:</u> Nechť

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

$$u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n.$$

Dokážeme, že $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$(a_1 - b_1) u_1 + (a_2 - b_2) u_2 + \dots + (a_n - b_n) u_n = \vec{o}$$

Vektory $u_1, u_2, \dots u_n$ tvoří bázi, jsou tedy LN a proto

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0.$$

Tedy $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Definice Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$. Souřadnice vektoru $u \in U$ v bázi α je sloupec n skalárů z $\mathbb{K}$, značíme

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

jestliže

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

Příklad: $\mathbb{R}_2[x]$ polynomy stupně ≤ 2

báze $\alpha = (1, x-1, (x-1)^2)$. Chceme spočítat souřadnice vektoru x^2+x-1 v bázi α.

Hledáme vyjádření

$$x^2 + x - 1 = a_1 \cdot 1 + a_2(x-1) + a_3(x-1)^2$$

Porovnáním koeficientů u x^2, x a 1 dostaneme soustavu rovnic

$$1 = a_3 \qquad a_3 = \underline{1}$$

$$1 = a_2 - 2a_3 \qquad a_2 = 3$$

$$-1 = a_1 - a_2 + a_3 \qquad a_1 = 1$$

$$-1 + a_2 - a_3 = a_1$$

$$(x^2 + x - 1)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad – standardní souřadnice

$\mathbb{K}^n \qquad x \in \mathbb{K}^n \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ je tzv. standardní báze

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$(x)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

V jiné bázi budou souřadnice téhož vektoru jiné!

<u>Přiřazení souřadnic</u> Mějme vekt. prostor U s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ nad K. U a jeho báze definuje zobrazení

$$(\ )_\alpha : U \longrightarrow K^n$$
$$u \longmapsto (u)_\alpha$$

Vlastnosti tohoto zobrazení:

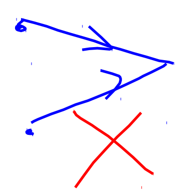
① je to bijekce (zobrazení surjektivní, injektivní)

$$f : M \longrightarrow K$$

je surjektivní jestliže $\forall k \in K \ \exists m \in M \ f(m) = k$.

také zobrazení na

f je injektivní (prosté) jestliže z $f(m_1) = f(m_2)$ plyne $m_1 = m_2$.



2. $$(u+v)_\alpha = (u)_\alpha + (v)_\alpha$$

3. $$(au)_\alpha = a(u)_\alpha$$

Díky těmto vlastnostem můžeme často místo s vektory z prostoru U pracovat s jejich souřadnicemi v $\mathbb{K}^n$.