Matice lin. zobrazení v daných bázích

Máme-li matici A typu $k \times n$ s prvky z $\mathbb{K}$, tak nám může lin. zobrazení

$$\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k \qquad \varphi(x) = A x = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dnes obrácený postup

K lineárnímu zobrazení $\varphi: U \longrightarrow V$ a dvěma bázím $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ v U a $\beta = (v_1, \dots, v_k)$ ve V najdeme matici A typu $k \times n$ tak, že tato matice popisuje zobrazení φ v souřadnicích.

<u>Definice</u>: Nechť $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ je báze U, $\beta = (v_1, \dots, v_k)$ báze ve V, $\varphi : U \to V$ lineární. Matice zobrazení φ v bazích α a β je matice $A = (a_{ij})$ typu $k \times n$ taková, že platí

$$\varphi(u_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{k1} v_k = (v_1, v_2, \dots, v_k) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u_2) = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{k2} v_k = (v_1, v_2, \dots, v_k) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

③

Tedy

$$A = \begin{pmatrix} (\varphi(u_1))_\beta & (\varphi(u_2))_\beta & \dots\dots & (\varphi(u_n))_\beta \end{pmatrix}$$

1. sloupec   2. sloupec n-tý sloupec

Označení $(\varphi)_{\beta,\alpha} = A$.

Příklad $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$\alpha = (1, x, x^2, x^3)$ $\varphi(p) = p'$ derivace polynomu

$\beta = (1, x, x^2)$ Chceme najít $(\varphi)_{\beta\alpha}$.

$$(\varphi)_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} (\varphi(1))_\beta & (\varphi(x))_\beta & (\varphi(x^2))_\beta & (\varphi(x^3))_\beta \end{pmatrix}$$

$$= \left((0)_\beta \quad (1)_\beta \quad (2x)_\beta \quad (3x^2)_\beta \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Věta:</u> Nechť $\varphi : U \longrightarrow V$ a α, β jsou postupně báze prostorů U a V. Platí

$$\forall u \in U : \quad (\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

Tvrzení věty si lze namalovat takto:

$$\begin{tikzcd}
u \in U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "(\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot"] & \mathbb{K}^k
\end{tikzcd}$$

Diagram komutuje, tj. obě cesty jsou stejná zobrazení.

<u>Důkaz:</u> Zobrazení $u \longmapsto (\varphi(u))_\beta$ je složení dvou lin. zobrazení φ a $(\ )_\beta$, je tedy lineární.

Zobrazení $u \longmapsto (\varphi)_{\beta,\alpha} (u)_\alpha$ je složení dvou lin. zobrazení $(\ )_\alpha$ a násobení maticí $(\varphi)_{\beta,\alpha}$. Je tedy také lineární.

Proto stačí dokázat, že se obě zobrazení rovnají na vektorech báze α.

Dosadíme nejdříve za u první vektor báze α, tj. u_1.

$(\varphi(u_1))_\beta$ je podle definice $(\varphi)_{\beta,\alpha}$ rovno 1. sloupci této matice

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} (u_1)_\alpha = (\varphi)_{\beta,\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{1. sloupec matice } (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

Obdobně s $u_2, u_3, \ldots u_n$.

6

<u>Zpět k 1. příkladu</u> $U = \mathbb{R}_3[x]$, $V = \mathbb{R}_2[x]$,

$\alpha = (1, x, x^2, x^3)$, $\beta = (1, x, x^2)$ $\varphi(p) = p'$.

Vezmeme polynom $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

Víme $(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ověříme na příkladě,

že platí

$$(\varphi(p))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (p)_\alpha$$

Levá strana: $(\varphi(p))_\beta = (6x^2 - 6x + 4)_\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Pravá strana: $(\varphi)_{\beta,\alpha}(p)_\alpha = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\4\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-6\\6\end{pmatrix}$

Věta o počítání s maticemi zobrazení

① Nechť α je báze prostoru U a $id_U : U \to U$ identické zobrazení. Potom

$$(id_U)_{\alpha,\alpha} = E$$

② Nechť α, β, γ jsou postupně báze prostorů U, V, W. Nechť $\varphi : U \to V$ a $\psi : V \to W$ lineární. Potom

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

součin matic

3 Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární izomorfismus, α, β postupné báze v U a V. Potom

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha} \right)^{-1}$$

$\to$ inverzní matice

Důkaz: 1 Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$$(id_U)_{\alpha,\alpha} = \left((id(u_1))_\alpha \ (id(u_2))_\alpha \dots (id(u_n))_\alpha \right)$$

$$= \left((u_1)_\alpha \ (u_2)_\alpha \dots (u_n)_\alpha \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

2. Důkaz z obrázku

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\psi\circ\varphi"] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\ )_\beta"] & W \arrow[d, "(\ )_\gamma"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "(\varphi)_{\beta,\alpha}\cdot"] \arrow[rr, bend right, "(\psi\circ\varphi)_{\gamma,\alpha}\cdot"'] & \mathbb{K}^k \arrow[r, "(\psi)_{\gamma,\beta}\cdot"] & \mathbb{K}^p
\end{tikzcd}$$

Červená šipka dole je násobení maticí $(\psi\circ\varphi)_{\gamma,\alpha}$, ale současně složení zobrazení

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k \longrightarrow \mathbb{K}^p$$

které je násobení $(\psi)_{\gamma,\beta}\cdot(\varphi)_{\beta,\alpha}$

Tedy $\quad (\psi\circ\varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta}\cdot(\varphi)_{\beta,\alpha}$

3 Platí $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_U$.

Pro matice

$$(\varphi^{-1} \circ \varphi)_{\alpha,\alpha} = (id_U)_{\alpha,\alpha}$$

Podle (2) a (1) je

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} = E$$

Proto $$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha}\right)^{-1}$$

Příklad: Princip: Jestliže se na lin. zobrazení díváme ve standardní bázi, jeví se nám jednoduší.

Vezměme $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

V $\mathbb{R}^2$ máme stand. bázi $\quad \mathcal{E} = \left(\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$

Můžeme spočítat

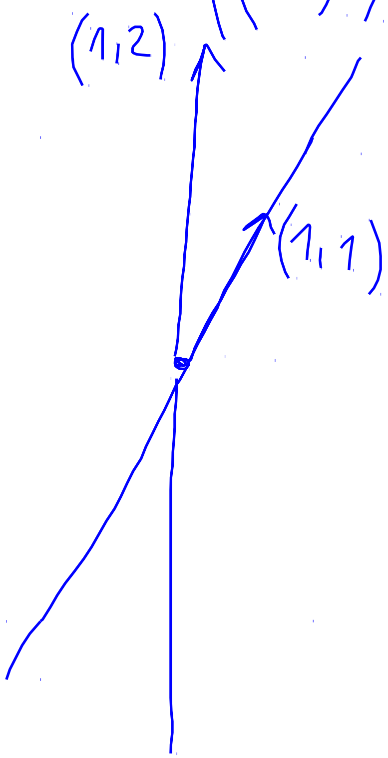
$$(\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \left((\varphi(e_1))_{\mathcal{E}} \; (\varphi(e_2))_{\mathcal{E}} \right) = \left(\left(\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{E}} \left(\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{E}} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \right) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Vezmime bázi $\alpha = (u_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \Big((\varphi(u_1))_\alpha \ \ (\varphi(u_2))_\alpha \Big) = \left(\left(\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_\alpha \ \left(\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)_\alpha \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)_\alpha \ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi

Nechť U je vektorový prostor a

$$\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

dvě jeho báze. Matici přechodu označujeme matici $id : U \to U$ v bázích α a β

$$(id)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} (u_1)_\beta & (u_2)_\beta & \dots & (u_n)_\beta \end{pmatrix}$$

Použijeme-li větu za definicí matice zobrazení, dostaneme tento vztah:

14

$$(id(u))_\beta = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

souřadnice v bázi β

$$\boxed{(u)_\beta = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha}$$

souřadnice v bázi α

Pomocí matice přechodu spočítáme z jedněch souřadnic jiné souřadnice

Příklad $\quad V = \mathbb{R}^3 \quad \varepsilon = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\alpha = (u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Spočítáme nejdřív $(id)_{\varepsilon,\alpha}$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \left((u_1)_\varepsilon \ (u_2)_\varepsilon \ (u_3)_\varepsilon \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(u)_\varepsilon = (id)_{\varepsilon,\alpha} (u)_\alpha$$

To, co potřebujeme je $(id)_{\alpha,\varepsilon}$.

Tu lze spočítat z definice:

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \left((e_1)_\alpha \ (e_2)_\alpha \ (e_3)_\alpha \right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$$

$$e_2 = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3$$

$$e_3 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3$$

Dokážeme 3 soustavy lin. rovnic s maticemi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Ty lze řešit dohromady

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} \text{schod. tvar} & \text{něco} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c|c} E & \text{inverze k} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

Zpět k nastavení

$a_1 = 3 \qquad b_1 = -1 \qquad c_1 = 0$

$a_2 = 1 \qquad b_2 = -1 \qquad c_2 = 1$

$a_3 = -3 \qquad b_3 = 2 \qquad c_3 = 1$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(u)_\alpha = (id)_{\alpha,\varepsilon} \cdot (u)_\varepsilon$$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = (id)^{-1}_{\varepsilon,\alpha}$$

Věta o počítání s maticemi přechodu

Nechť U je konečn. prostor s bázemi α, β, γ je.

1. $$(id)_{\alpha,\alpha} = E$$

2. $$(id)_{\gamma,\alpha} = (id)_{\gamma,\beta}(id)_{\beta,\alpha}$$

3. $$(id)_{\alpha,\beta} = (id)^{-1}_{\beta,\alpha}$$

<u>Důkaz</u>: Vše je důsledkem věty o průkání s maticemi zobrazení.

2

$$(id)_{\gamma,\alpha} = (id \circ id)_{\gamma,\alpha} = (id)_{\gamma,\beta} \cdot (id)_{\beta,\alpha}$$

3

$$(id)_{\alpha,\beta} = (id^{-1})_{\alpha,\beta} = (id)^{-1}_{\beta,\alpha}$$

Matice lin. zobrazení v různých bazích

Nechť U a V jsou dva vekt. prostory, nechť α a $\bar{\alpha}$ jsou báze v U a $\beta, \bar{\beta}$ báze ve V. Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární. Potom

$$(\varphi)_{\bar{\beta},\bar{\alpha}} = (id)_{\bar{\beta},\beta} (\varphi)_{\beta,\alpha} (id)_{\alpha,\bar{\alpha}}$$

Odvození: $(\varphi)_{\bar{\beta},\bar{\alpha}} = \left(id_V \circ \varphi \circ id_U \right)_{\bar{\beta},\bar{\alpha}} =$

$$= (id_V \circ \varphi)_{\bar\beta,\alpha} \cdot (id_U)_{\alpha,\bar\alpha} = (id_V)_{\bar\beta,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (id_U)_{\alpha,\bar\alpha}$$

Vezmeme teď $\varphi : U \longrightarrow U$

a v U uvažujme báze α a β. Pak podle předchozího platí

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\beta}$$

$$= (id)_{\beta,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\beta,\alpha}^{-1}$$

Při označení

$(\varphi)_{\beta,\beta} = B$ $\quad (id)_{\beta,\alpha} = P$ $\qquad B = P\,A\,P^{-1}$

$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = A$

Matice A a B jsou podobné

<u>Definice</u>: Matice A, B typu $n \times n$ jsou **podobné**, jestliže existuje invertibilní matice P taková, že

$$B = P A P^{-1}$$

Podobnost: A je podobná B $\exists P : B = PAP^{-1}$

je relace **ekvivalence**

(1) je reflexivní: A je podobná A $\quad A = EAE^{-1}$

(2) je symetrická: když A je podobná B, tak B je podobná A.

22

$B = PAP^{-1}$ | P^{-1} z leva

$P^{-1}B = AP^{-1}$ | množimo P z desna

$P^{-1}BP = A$

B je podobna A.

3) je tranzitivna: če je A podobna B, B je podobna C, potem A je podobna C.

$$B = PAP^{-1}$$

$$C = QBQ^{-1}$$

$$C = QBQ^{-1} = Q(PAP^{-1})Q^{-1} = QPA(QP)^{-1}$$