DETERMINANTY – POKRAČOVÁNÍ

Věta (Cauchyova) Nechť A, B jsou matice typu $n \times n$. Potom

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Důkaz: Použijeme, že

$$\det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} C & 0 \\ F & D \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{k} \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} = \det C \cdot \det D$$

+ další vlastnosti determinantu.

(2)

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \overset{\text{ERO}}{\underset{\text{ESO}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & A\cdot B \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & A\cdot B \end{pmatrix} = \det(-E)\det(A\cdot B) = (-1)^n \det(A\cdot B)$$

V dalším ukážeme, že

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & A\cdot B \end{pmatrix} = (-1)^n(-1)^n \det(A\cdot B)$$

$$= \det A\cdot B.$$

③

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

K 3. sloupci přičteme b_{11} násobek 1. sloupce

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

K 3. sloupci přičteme b_{21} násobek 2. sloupce

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

Obdobně ke 4. sloupci přičteme b_{12} násobek 1. sloupce a b_{22} násobek 2. sloupce

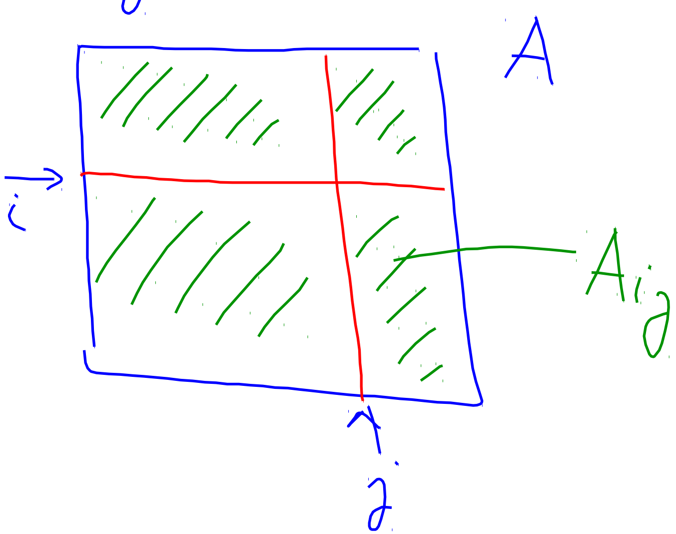
$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

Laplaceův rozvoj determinantu

Značení: det A nebo $|A|$

$A = (a_{ij})$ je matice $n \times n$

A_{ij} je matice $(n-1)\times(n-1)$ vzniklá z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce



$\det A_{ij} = |A_{ij}|$ se nazývá minor, nebo subdeterminant determinantu A.

$(-1)^{i+j} |A_{ij}| = \tilde{a}_{ij}$ se nazývá

algebraický doplněk členu a_{ij} v matici A

Věta o Laplaceově rozvoji

Nechť A je matice $n \times n$, a i je pevné. Potom

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| .$$

Tomuto vztahu říkáme Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku.

Obdobně pro pevné j platí

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

To je Laplaceův rozvoj podle j-tého sloupce.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad i=3$$

$$\det A = \overset{1}{a_{31}} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \overset{-1}{a_{32}} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \overset{3}{a_{33}} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4+5+6=15$$

$$\det A = 0+4+3-0+6+2=15$$

Důkaz Laplaceova rozvoje i-tého

$$\det A = \det\begin{pmatrix} \ast & \cdots & & \ast \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \ast & \cdots & & \ast \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \ast & \cdots & & & \ast \\ 0 & a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \\ \ast & \cdots & & & \ast \end{pmatrix} + \cdots + \det\begin{pmatrix} \ast & \cdots & & \ast \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \ast & \cdots & & \ast \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1} \det\begin{pmatrix} \ast & \cdots & & & \ast \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ast & \cdots & & & \ast \end{pmatrix} + a_{i2} \det\begin{pmatrix} \ast & \cdots & & & \ast \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ast & \cdots & & & \ast \end{pmatrix} + \cdots + a_{in} \det\begin{pmatrix} \ast & \cdots & & & \ast \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \ast & \cdots & & & \ast \end{pmatrix}$$

(j-1) přehazování

$$\det \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \ast & \cdots & \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ast & \cdots & \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \end{pmatrix} \atop {\qquad\qquad\quad \uparrow \atop \qquad\qquad\quad j} = (-1)^{j-1} \det \begin{pmatrix} \ast & \ast & \cdots & \ast \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ast & \ast & \cdots & \ast \end{pmatrix}$$

(i-1) přehazování

1. sloupec ...

j-tý sloupec původní matice

$$= (-1)^{j-1}(-1)^{i-1} \det \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 \ \cdots & 0 \\ \hline \ast & & & \\ \ast & & A_{ij} & \\ \vdots & & & \end{array}\right) = (-1)^{j-1+i-1} \det(1) \det A_{ij}$$

$$= (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$ člen v Laplaceově rozvoji

Příklad: Matice $(n+1)\times(n+1)$

$$\det\begin{pmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ a_{n-3} & 0 & 0 & x & -1 \cdots & 0 \\ & & & & & \\ a_1 & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & & 0 & x \end{pmatrix}$$

Lapl. rozvoj podle 1. sloupce

$$= a_n(-1)^{1+1}\underbrace{\det A_{11}}_{x^n} + \underbrace{a_{n-1}(-1)^{2+1}\underbrace{\det A_{21}}_{(-1)\,x^{n-1}}}_{a_{n-1}x^{n-1}}$$

$$+ \overbrace{a_{n-2}(-1)^{3+1}\underbrace{\det A_{31}}_{(-1)^2 x^{n-2}}}^{a_{n-2}x^{n-2}} + \cdots = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

9

Jiný způsob výpočtu – Laplaceův rozvoj podle 1. řádku

$$\det A_{n+1} = \underbrace{a_n(-1)^{1+1}\det A_{11}}_{a_n x^n} + \underbrace{(-1)(-1)^{1+2}\det A_{12}}_{\underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{n-1} & -1 & & \\ a_{n-2} & x & -1 & \\ \vdots & 0 & x & -1 \\ & & & \\ a_0 & & & x \end{pmatrix}}_{\det A_n}} + 0 + \dots + 0$$

$$\det A(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) = a_n x^n + \det A(a_{n-1}, \dots, a_0) \overset{\text{indukcí}}{=}$$

$$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \det A(a_{n-2}, \dots, a_0) = \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Laplaceův rozvoj používáme pro

- nalezení inv. matice pomocí subdeterminantů
- odvození Cramerova pravidla

INVERZNÍ MATICE

Matice A typu $n \times n$ má inverzní matici, právě když $\det A \neq 0$. V takovém případě je

$$A^{-1} = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A}\right)^T$$

11

<u>Příklad</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$\left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right) = \frac{1}{(-2)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^T = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

12

Důkaz věty o inv. matici

Nechť A má inverzní matici A^{-1}. Pak

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det E$$

Podle Cauchyovy věty

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

Tedy $\det A \neq 0$ a navíc $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Je-li $\det A \neq 0$, lze definovat $B = \left(\dfrac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^T$. Ukážeme, že

$$A \cdot B = E.$$

13

$C = (\tilde{a}_{ij})^T$ Budeme ukazovat, že $A \cdot C = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \det A & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \det A \end{pmatrix}$

$= \det A \cdot E$

Člen matice $A \cdot C$ v i-tém řádku a i-tém sloupci je

$C = (c_{ij})$

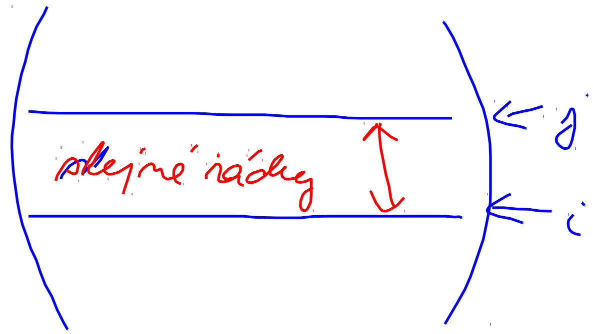
$$(A \cdot C)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{ki} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \tilde{a}_{ik}}_{\text{rozvoj } \det A \text{ podle } i\text{-tého řádku}} = \det A.$$

Vezmeme $i \neq j$

$$(A \cdot C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \tilde{a}_{jk} = \det D = 0$$

podle výpočtu na následující tabuli

Uvažujme matici D takovou, že všechny její řádky jsou stejné jako v A, pouze v j-tém řádku je i-tý řádek matice A

$D =$ 

Rozvoj D podle j-tého řádku je

$$\det D = \sum_{k=1}^{n} d_{jk}\,\tilde{d}_{jk} =$$

$$= \underline{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\tilde{a}_{jk}} = \det D = 0$$

Součet z předchozí tabule.

2 stejné řádky

Cramerovo pravidlo

Uvažujme soustavu n rovnic o n neznámých

$$A \cdot x = b.$$

Jestliže $\det A \neq 0$, pak má soustava právě jedno řešení a platí

$$x_i = \frac{\det\begin{pmatrix} s_1(A) & s_2(A) & \dots & \overset{\downarrow i}{b} & s_{i+1}(A) & \dots & s_n(A) \end{pmatrix}}{\det A}$$

Důkaz: Jestliže $\det A \neq 0$, existuje $A^{-1} = \left(\dfrac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)$

Potom $\quad Ax = b$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

(16)

$$x = A^{-1} b$$

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} (A^{-1})_{ik} \, b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\tilde{a}_{ki}}{\det A} \cdot b_k = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} b_k \tilde{a}_{ki}$$

Výraz $\sum_{k=1}^{n} b_k \tilde{a}_{ki}$ je rozvoj det podle i-tého sloupce matice

$$\begin{pmatrix} s_1(A) \dots s_{i-1}(A) & b & s_{i+1}(A) \dots s_n(A) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} s_1(A) \dots b \dots s_n(A) \end{pmatrix}$$

Příklad

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= 1 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha-1)^2 (2+\alpha)$$

$$\det \neq 0 \iff (\alpha-1)^2(2+\alpha) \neq 0$$

$$\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -2 .$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}}{(\alpha-1)^2 (2+\alpha)}$$