DETERMINANTY

Inverzní matice pomocí alg. doplňků

$$A^{-1} = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^T$$

Cramerovo pravidlo pro řešení soustavy

$$Ax = b$$

s maticí $n \times n$, $\det A \neq 0$. i-tý sloupec

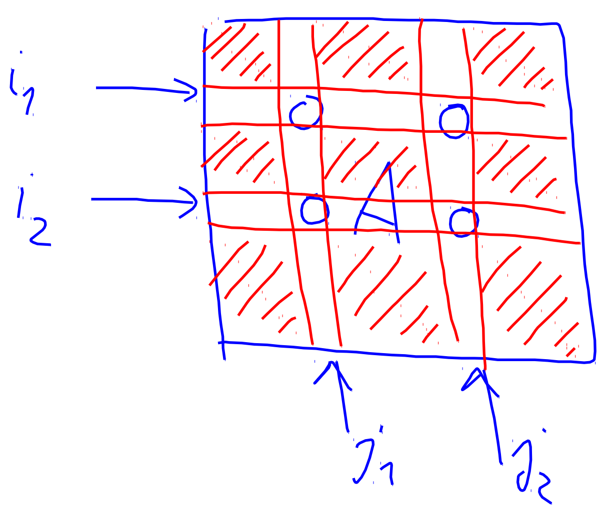
$$x_i = \frac{\det \left(s_1A \; s_2A \; \dots \; b \; \dots \; s_nA \right)}{\det A}$$

Laplaceův rozvoj

- podle řádku a podle sloupce
- Laplaceův rozvoj podle více řádků a sloupců

A matice $n \times n$

$A^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ je matice 2×2 vytvořená z A



$B^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ je matice $(n-2) \times (n-2)$ vytvořená z A vyndáním řádků i_1, i_2 a sloupců j_1, j_2

Laplaceův rozvoj podle řádků i_1, i_2 je dán formulí

$$\det A = \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le n} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} \det A^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} \cdot \det B^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$$

$\binom{n}{2}$ sčítanců. Používá se tam, kde je jich většina nulových.

Obdobně rozvoj podle sloupce j_1, j_2

$$\det A = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} \det A^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} \cdot \det B^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$$

Příklad Spočítejte det matice $2n \times 2n$

$$D_{2n} = \det \begin{pmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & 0 & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & 0 & & c & d & & 0 & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & 0 & & d & \\ c & & & & & & & d \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{n}$$

Laplaceův rozvoj podle řádků n a $n+1$ má všechny sčítance nulové s případnou výjimkou jednoho ve sloupcích n a $n+1$.

$$\det D_{2n} = (-1)^{n+n+1+n+n+1} \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ 0 & & \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} & & 0 \\ & \iddots & & \ddots & \\ c & & 0 & & d \end{pmatrix} =$$

$$\det D_{2n} = (ad-bc)\det D_{2n-2} = (ad-bc)(ad-bc)\, D_{2n-4} = \dots$$

$$\dots = (ad-bc)^{n-1}\, D_2 = (ad-bc)^n$$

VÝZNAM DETERMINANTU

1. $\det A = 0$ právě když $s_1A, s_2A, \dots s_nA$ v K^n jsou lin. závislé.

Důkaz: A upravujeme pomocí el. řádk. úprav na schod. tvar. Při těchto úpravách se nulovost nebo nenulovost determinantu nemění. $s_1A, s_2A, \dots s_nA$ jsou LZ právě když ve schod. tvaru je poslední řádek nulový. To znamená, že det matice ve schod. tvaru je 0. Tedy také $\det A = 0$.

Totéž platí pro řádky

$$\det A = 0 \iff r_1 A, r_2 A, \dots r_n A \text{ jsou LZ}$$

Této vlastnosti se využívá při výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů (náplň LA II)

Vl. vektor matice A $n \times n$ s prvky z $\mathbb{K}$ je $x \in \mathbb{K}^n$,

$$x \neq \vec{o} \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad Ax = \lambda x$$

λ vl. čísla

$$(A - \lambda E)x = 0$$

Tato rovnice má netriviální řešení právě když $\det(A - \lambda E) = 0$

Vlastní čísla spočítáme řešením rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

2 Geometrický význam determinantu

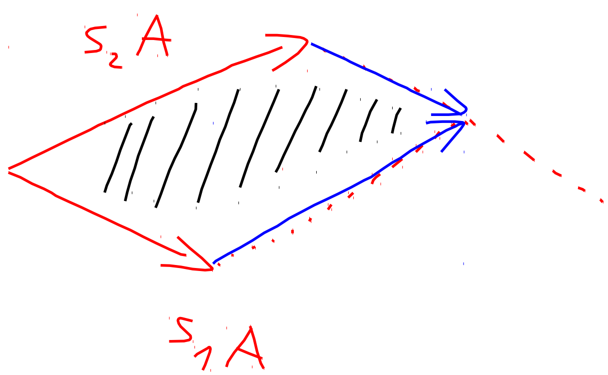
Začneme s maticemi 2×2

$$A = \begin{pmatrix} s_1A & s_2A \end{pmatrix}$$

2 vektory s_1A, s_2A vytvoříme rovnoběžník. Potom

$$\det A$$

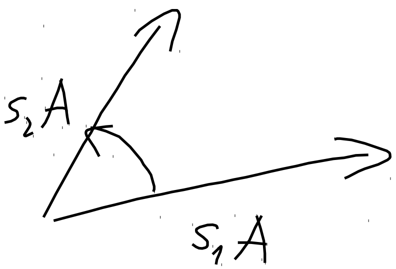
má geometrický význam orientovaného obsahu rovnoběžníku určeného s_1A a s_2A.



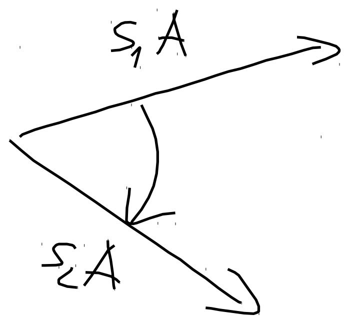
Abs. hodnota orient. obsahu je rovna obsahu

Orient. obsah je kladný, jestliže orientace od 1. vektoru k 2. vektoru je proti směru hod. ručiček

záporný, jestliže orientace je ve směru hod. ručiček

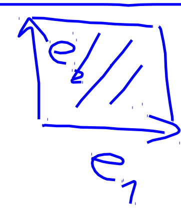


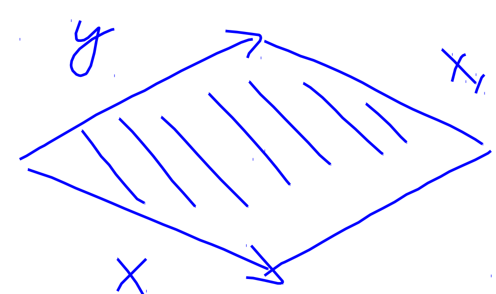
$\det(s_1A, s_2A) > 0$



$\det(s_1A, s_2A) < 0$

Jak přirozeně definovat orient. obsah P rovnoběžníka



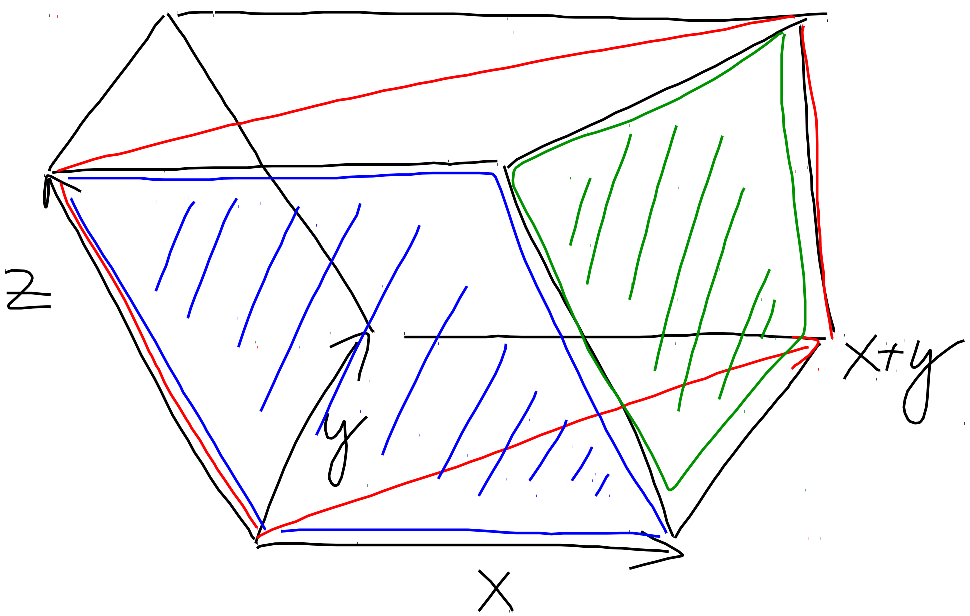


$x, y \in \mathbb{R}^2$

1. $P(e_1, e_2) = 1$
2. $P(x, x) = 0$
3. $P(x+y, z) = P(x, z) + P(y, z)$

   $P(x, y+z) = P(x, y) + P(x, z)$
4. $P(ax, y) = aP(x, y)$

Obrázek k 3



$$P(x+y,z)=P(x,z)+P(y,z)$$

Z 2 lze odvodit, že

$$P(y,z)=-P(z,y)$$

Dk: $P(y+z,y+z)=0$

$$0=P(y+z,y)+P(y+z,z)=\overset{0}{P(y,y)}+P(z,y)+P(y,z)+\overset{0}{P(z,z)}$$

$$=P(y,z)+P(z,y)\Rightarrow P(y,z)=-P(z,y)$$

Věta: Platí, že

$$P(x,y) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Důkaz:

$$P(x,y) = P(x_1e_1 + x_2e_2,\ y_1e_1 + y_2e_2) = P(x_1e_1 + x_2e_2,\ y_1e_1)$$

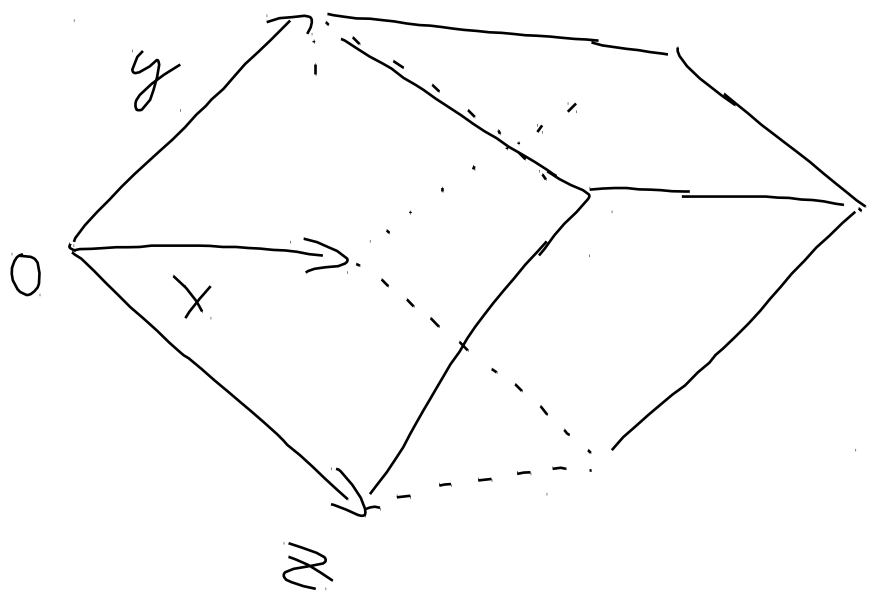
$$+ P(x_1e_1 + x_2e_2,\ y_2e_2) = P(x_1e_1,\ y_1e_1) + P(x_2e_2,\ y_1e_1) + P(x_1e_1,\ y_2e_2)$$

$$+ P(x_2e_2,\ y_2e_2) = x_1y_1\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{P(e_1,e_1)} + x_2y_1P(e_2,e_1) + x_1y_2P(e_1,e_2)$$

$$+ x_2y_2\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{P(e_2,e_2)} = x_1y_2\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{P(e_1,e_2)} + x_2y_1\overset{-1}{\overbrace{P(e_2,e_1)}} = x_1y_2 - x_2y_1$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

Totéž lze udělat v $\mathbb{R}^3$. Definujeme tam orientovaný objem rovnoběžnostěnu vytvořeného vektory x, y, z



Můžeme definovat orient. objem podobně jako orient. obsah tak, že napíšeme naše požadavky na něj.

Orientovaný objem v $\mathbb{R}^3$ splňuje

1. $P(e_1, e_2, e_3) = 1$
2. $P(x, y, z) = 0$ kdykoliv $x = y$ nebo $x = z$ nebo $y = z$.
3. $P(ax, y, z) = a P(x, y, z) = P(x, ay, z) = P(x, y, az)$
4. $P(x + x', y, z) = P(x, y, z) + P(x', y, z)$

   Totéž na 2. a 3. proměnnou

$$P : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Zobrazení P splňující 3 a 4 se nazývá multilineární (je lineární v každé ze tří složek)

Stejně jako u orient. obsahu lze dokázat.

<u>Věta</u> Orientovaný objem v $\mathbb{R}^3$ splňující podmínky (1) - (4) je určen jednoznačně a platí

$$P(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

Lze zobecnit na $\mathbb{R}^n$,

$$\det(s_1 A, s_2 A, \ldots s_n A)$$

je orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $s_1 A, s_2 A, \ldots s_n A$.

14

Kdy je orient. objem v $\mathbb{R}^3$ kladný?

– ve fyzice pravidla pravé ruky

Matematicky

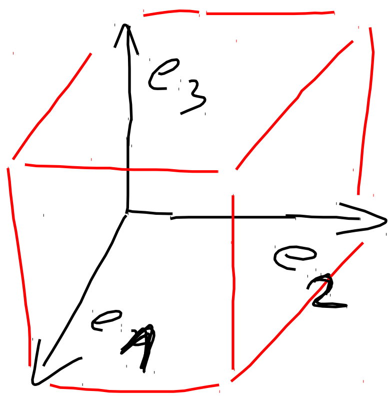
Trojice vektorů x, y, z je orientovaná kladně, jestliže

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} > 0$$

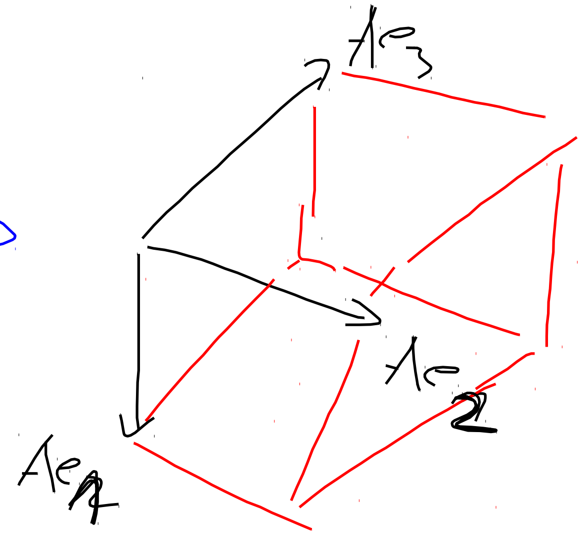
Záporně, jestliže

$$\det\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} < 0$$

15



$x \longmapsto Ax$



orient. objem je 1

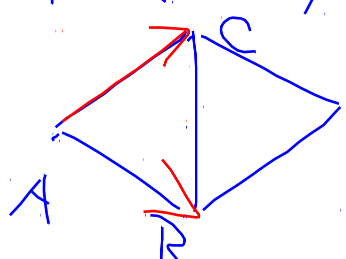
orient. objem je

$$\det(Ae_1, Ae_2, Ae_3) = \det(s_1 A, s_2 A, s_3 A)$$
$$= \det A$$

Praktické výpočty

Obsah trojúhelníku ABC

$A = (1,2)$ $B = (3,10)$, $C = (14,-8)$ $\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}\right| = \dots$



$P(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AC}, \vec{AB})\right| =$

HODNOST MATICE

Nechť A je matice $k \times n$ s prvky v $\mathbb{K}$.

$$A = \begin{pmatrix} s_1A & s_2A & \dots & s_nA \end{pmatrix} \qquad s_jA \in \mathbb{K}^k$$

$$A = \begin{pmatrix} r_1A \\ r_2A \\ \vdots \\ r_kA \end{pmatrix} \qquad r_iA \in \mathbb{K}^n$$

Sloupcová hodnost matice A je číslo

$$h_s(A) = \dim \underbrace{[s_1A, s_2A, \dots, s_nA]}_{\text{podprostor v } \mathbb{K}^k}$$

Jinými slovy – je to max. počet lin. nezávislých sloupců

Řádková hodnost matice A je číslo

$$h_r(A) = \dim[r_1A, r_2A, \dots r_kA]$$

podprostor v $\mathbb{K}^n$

Je to maximální počet lin. nezávislých řádků matice A.

Naším cílem bude dokázat větu

Věta

$$h_s(A) = h_r(A)$$

Potom můžeme definovat hodnost matice A jako

$$h(A) = h_s(A) = h_r(A)$$

Důkaz věty:

1. Řádk. hodnost matice A se nemění při provádění element. řádk. operací

$$[r_1 A, \dots, r_k A] = [c\, r_1 A, r_2 A, \dots, r_k A] \quad \text{pro } c \neq 0$$

$$= [r_2 A, r_1 A, r_3 A, \dots, r_k A]$$

$$= [r_1 A + r_2 A, r_2 A, r_3 A, \dots, r_k A]$$

$$r_1 A = (r_1 A + r_2 A) - r_2 A$$

Z rovnosti podprostorů, plyne rovnost dimenzí a rovnost hodností.

(2) Řádk. hodnost matice ve schod. tvaru je rovna počtu nenulových řádků = počtu ved. koeficientů.

$A \sim B$ ve schod. tvaru

$$h_r(A) = h_r(B) = \dim[r_1 B, r_2 B, \dots r_k B]$$

nenulové řádky jsou LN

<u>Samotný důkaz</u> Matici A upravíme na schod. tvar, ta bude matice B

$h_s(A)$ = max. počet lin. nez. sloupců = počet ved. koeficientů v matici B (použijeme algoritmus)

$= h_r(B) = h_r(A)$.

Pro hodnost matice A typu $k \times n$ platí:

$$h(A) \leq k \qquad h(A) = h_r(A) = \dim[r_1, r_2, \dots r_k] \leq k$$

$$h(A) \leq n \qquad h(A) = h_s(A) = \dim[s_1, s_2 \dots s_n] \leq n$$

$$h(A) \leq \min(k, n)$$

Věta: $h(A) = \dim \operatorname{Im} \varphi$

kde $\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$ $\quad \varphi(X) = AX$.

Důkaz: $h(A) = h_s(A) = \dim \underbrace{[Ae_1, Ae_2, \dots Ae_n]}_{\operatorname{Im} \varphi}$

$= \dim \operatorname{Im} \varphi$

Věta: Matice A typu $n \times n$ má hodnost n právě když

$$\det A \neq 0.$$

Důkaz: A upravíme do schod. tvaru B

$h(A) = h_r(A) = h_r(B) =$ počet nenulových řádků

$\det A \neq 0 \iff \det B \neq 0 \iff$ počet nenulových řádků v B je $n \iff h(B) = h(A) = n$.