BÁZE, DIMENZE, SOUŘADNICE

U vekt. prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

U je konečně dimenzionální — U je generován konečnou množinou vektorů

$u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ tvoří bázi prostoru U, jestliže

(1) $u_1, u_2, \dots u_n$ jsou lin. nezávislé

(2) $\forall u \in U \ \exists a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{K} \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

Chceme dokázat 2 věci:

(1) Každý konečnědim. prostor má bázi

(2) Každé dvě báze daného prostoru mají stejný počet prvků?

Věta o výběru lin. nezávislých generátorů

Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k \in U$ jsou lin. nezávislé, nechť $u_1, u_2, \dots, u_l \in U$ jsou libovolné. Potom lze z druhého seznamu vybrat vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}$ takové, že

(1) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}$ jsou lin. nezávislé,

(2) $[v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_p}] \underset{\subseteq \text{ vždy}}{=} [v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_l]$

Důsledek: Každý seznam lin. nezávislých vektorů v konečně dimenzionálním prostoru lze doplnit na bázi. Speciálně, v každém konečně dim. prostoru existuje báze.

③

Důkaz důsledku: Nechť $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou lin. nezávislé v U. Je-li U konečnědimenzionální, existuje konečný seznam $u_1, u_2, \dots, u_l$ takový, že $U = [u_1, u_2, \dots u_l]$.

Podle věty o výběru lin. nez. generátorů lze vybrat vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_p}$ tak, že

(1) $v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}$ jsou LN

(2) $[v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_p}] = [v_1, v_2, \dots v_k, u_1, \dots u_l] \supseteq [u_1, u_2, \dots u_l] = U$

Tedy vektory $v_1, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_p}$ dávají bázi prostoru U, neboť jsou LN a $[v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_p}] = U$

Důkaz věty o výměně LN generátorů

Indukcí podle počtu vektorů $u_1 \ldots u_\ell$ … podle ℓ.

$\ell = 1$ Máme LN vektory $v_1, \ldots, v_k$ a vektor u_1.

Mohou nastat 2 možnosti:

(1) $u_1 \in [v_1, \ldots, v_k]$. Pak vektor u_1 nevyměníme.

- $v_1, v_2, \ldots v_k$ jsou LN
- platí $[v_1, v_2, \ldots, v_k] = [v_1, v_2, \ldots v_k, u_1]$.

Inkluze $[v_1, v_2, \ldots v_k] \subseteq [v_1, v_2, \ldots, v_k, u_1]$ platí vždy.

Víme, že $u_1 \in [v_1, v_2, \ldots v_k]$. $u_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$.

$$b_1 v_1 + \ldots + b_k v_k + c\, u_1 = b_1 v_1 + \ldots + b_k v_k + c\,(a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k) =$$

$$= (b_1 + c a_1) v_1 + (b_2 + c a_2) v_2 + \ldots + (b_k + c a_k) v_k \in [v_1, \ldots v_k]$$

5

2) $u_1 \notin [v_1, v_2, \ldots, v_k]$. Pak u_1 vybereme.

- $[v_1, v_2, \ldots v_k, u_1] = [v_1, v_2, \ldots, v_k, u_1]$
- $v_1, v_2, \ldots v_k, u$ jsou LN.

Nechť $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k + b u_1 = \vec{o}$

Kdyby $b \neq 0$, pak lze u_1 spočítat pomocí $v_1 \ldots v_k$

$$u_1 = -\frac{a_1}{b} v_1 - \frac{a_2}{b} v_2 - \ldots - \frac{a_k}{b} v_k$$

Ale to je spor s tím, že $u_1 \notin [v_1, v_2, \ldots v_k]$.

Tedy $\underline{b = 0}$. Dostáváme $a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k = \vec{o}$.

Protože $v_1 \ldots v_k$ jsou LN $\Longrightarrow \underline{a_1 = \ldots = a_k = 0}$.

<u>Závěr:</u> Vektory $v_1 \ldots v_k, u_1$ jsou LN.

Indukční krok

Nechť věta platí pro $l \geq 1$. Dokážeme ji pro $l+1$.

$v_1, \dots, v_k$ LN

$u_1, \dots, u_l, u_{l+1}$ libovolné

Ze seznamu $u_1, u_2, \dots, u_l$ vybereme $u_{i_1}, \dots, u_{i_p}$ tak, že jsou splněny obě podmínky z věty pro l.

- $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}$ jsou LN
- $[v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}] = [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l]$

Mohou nastat 2 možnosti:

(1) $u_{l+1} \in [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l]$. V tomto případě u_{l+1} nevybereme.

Víme • $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}$ jsou LN.

Musíme dokázat • $[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}] = [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l]$

$= [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l, u_{l+1}]$

(2) $u_{l+1} \notin [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l]$. V tomto případě vektor u_{l+1} vybereme. Určitě platí

- $[v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}, u_{l+1}] = [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l, u_{l+1}]$

Musíme dokázat, že vektory

- $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}, u_{l+1}$ jsou LN.

To se dělá analogicky jako pro u_1.

Přímý algoritmus, který z vektorů z $\mathbb{K}^n$ vybere lin. nezávislé se stejným lin. obalem

Mějme $u_1, u_2, \dots, u_l \in \mathbb{K}^n$. Chceme vybrat $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}$ lin. nezávislé a takové, že

$$[u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}] = [u_1, u_2, \dots, u_l].$$

$u_1, u_2, \dots u_l$ napíšeme jako sloupce matice. Tuto matici upravíme na schodovitý tvar. V něm určíme sloupce $i_1, i_2, \dots i_p$ takové, že v těchto sloupcích je vedoucí koeficient nějakého řádku. Vybereme $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}$.

$$\begin{pmatrix} \underline{u_1} & \underline{u_2} & u_3 & \underline{u_4} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{úpravy}]{\text{řádkové}} \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$i_1 = 1 \quad i_2 = 2 \quad i_3 = 4$

Tvrdím:

- u_1, u_2, u_4 jsou LN

Dokazujeme podle definice

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_4 u_4 = \vec{0}$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých souřadnic, dostaneme homogenní soustavu lin. rovnic o neznámých a_1, a_2, a_4 s maticí

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{úpravy}]{\text{stejné řádk.}} \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow a_1 = a_2 = a_4 = 0$

$\Longrightarrow u_1, u_2, u_4$ jsou LN

Důkaz, že $[u_1, u_2, u_4] = [u_1, u_2, u_3, u_4]$

Dokážeme, že $[u_1, u_2, u_3] = [u_1, u_2]$

Přesněji: dokážeme, že u_3 je lin. kombinací u_1 a u_2.

Aby to byla pravda, musí mít řešení rovnice:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = u_3$$

Použijeme souřadnice. Dostaneme soustavu n rovnic o neznámých a_1, a_2 s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_1, & u_2 & u_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{úpravy}]{\text{stejné řádk.}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

Z umístění ved. koeficientů (jen pouze v levé části) plyne, že soustava má řešení.

Steinitzova věta

Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_k \in [u_1, u_2, \ldots, u_n]$.
Jestliže $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jsou lin. nezávislé, pak

$$k \leq n.$$

Nepřímý důkaz: místo implikace

$$v_1 \ldots v_k \text{ LN} \Rightarrow k \leq n$$

budeme dokazovat

$$k > n \Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_k \text{ jsou LZ.}$$

$v_1, \ldots, v_k \in [u_1, u_2, \ldots, u_n]$

$$v_i = a_{1i} u_1 + a_{2i} u_2 + \ldots a_{ni} u_n = (u_1\, u_2 \ldots u_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

$$(v_1\ v_2\ \dots\ v_k) = (u_1\ u_2\ \dots\ u_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$(v_1\ v_2\ \dots\ v_k) = (u_1\ u_2\ \dots\ u_n)\ A$$

Matice A je typu $n \times k$. Předpokládáme, že $k > n$.

$\boxed{A}$ Nyní budeme hledat netriviální (= nenulové) řešení homogenní soustavy $Ax = 0$

o neznámých $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$. Matici A upravíme na schodovitý tvar.

Ve schod. tvaru bude maximálně n vedoucích koeficientů, neznámých je k, tedy některé z neznámých můžeme volit libovolně a různé od 0.

Nechť $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ je nenulové řešení soustavy $A x = O$.

Nyní spočítáme, čemu se rovná lin. kombinace

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = (v_1\ v_2 \cdots v_k) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} =$$

$$= \big((u_1\ u_2 \cdots u_n) \cdot A \big) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

$$= (u_1\ u_2 \cdots u_n) \cdot (A \cdot x) = (u_1\ u_2 \cdots u_n) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

Existuje kombinace vektorů $v_1, \dots, v_k$, která dává $\vec{o}$, ale koeficienty jsou nenulové. Proto jsou $v_1, \dots, v_k$ lin. závislé. ∎

Důsledek Nechť $u_1, u_2, \dots u_n$ a $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou dvě báze prostoru U. Pak $k = n$.

Důkaz: Dokážeme $k \le n$ a $n \le k$ dvojnásobným použitím Steinitzovy věty.

(1) $v_1, \dots v_k$ tvoří bázi $\Rightarrow$ jsou LN

$u_1, \dots u_n$ tvoří bázi $\Rightarrow [u_1, \dots u_n] = U$.

$v_1, \dots v_k \in U = [u_1, \dots u_n]$, $v_1 \dots v_k$ jsou LN

St. věta $\Rightarrow k \le n$.

2) $u_1, \dots, u_n$ tvoří bázi $\Rightarrow$ jsou LN

$v_1, v_2, \dots, v_k$ tvoří bázi $\Rightarrow [v_1, v_2, \dots, v_k] = U$

$\underbrace{u_1, u_2, \dots, u_n}_{LN} \in U = [v_1, v_2, \dots, v_k]$

Opět aplikací Steinitzovy věty dostaneme $n \leq k$

Definice dimense

Nechť U je konečně dimensionální lin. prostor nad $\mathbb{K}$. Dimense prostoru U nad $\mathbb{K}$ je počet prvků kterékoliv báze prostoru U. $\dim_{\mathbb{K}} U$

Příklady: $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ báze $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3 = 3$ báze $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

$\mathbb{C}^3$ je rovněž vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^3 = 6$ báze je například

$(1,0,0)$ $(i,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,i,0)$

$(0,0,1)$ $(0,0,i)$

$$\mathbb{C}^3 \ni (a_1+ib_1, a_2+ib_2, a_3+ib_3) = a_1(1,0,0) + b_1(i,0,0) + \dots$$

Červeně podtržené vektory bázi nad $\mathbb{R}$ netvoří! Tvoří ji nad $\mathbb{C}$