1

SOUŘADNICE VEKTORU V DANÉ BÁZI

U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

Báze – podposloupnost vektorů $u_1, u_2, \dots u_n$ takových, že

(1) jsou LN

(2) $\forall u \in U \ \exists (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

<u>Lemma</u> Vlastnosti (1) a (2) implikují vlastnost

$(*)$ $\forall u \in U \ \underbrace{\exists !}_{\text{existuje právě jedna}} (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$

<u>Důkaz:</u> Mějme $u \in \overline{U}$ takový, že

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$
$$u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n$$

Obě rovnice odečteme:

$$\vec{0} = (a_1 - b_1) u_1 + (a_2 - b_2) u_2 + \dots + (a_n - b_n) u_n$$

Víme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ jsou LN. Proto

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = \dots = a_n - b_n = 0$$

Proto $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Tím jsme dokázali jednoznačnost. Existence plyne z (2).

Platí i opačná tvrzení

$$(*) \Longrightarrow (1) \text{ a } (2)$$

Důkaz: Z $(*)$ plyne (2). Evidentní.

Dokažme, že když platí $(*)$, jsou vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ LN.

Nechť
$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \vec{o}$$

Chceme dokázat, že $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Víme, že
$$0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n = \vec{o}$$

$(*)$ nám říká, že pro $u = \vec{o}$ existuje právě n-tice $(a_1, a_2, \dots a_n)$ taková, že
$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \vec{o}$$

Proto taková n-tice musí být tvořena samými nulami.

Definice souřadnic

Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je báze prostoru U nad $\mathbb{K}$.

Souřadnice vektoru $u \in U$ v bázi α je n-tice čísel z $\mathbb{K}$, kterou budeme psát do sloupce, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, taková, že

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

Označení: $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Zápis $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = (u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \dots, u_n)\,(u)_\alpha$

Příklady V $\mathbb{R}^3$ rozumíme tzv. standardní bázi

$$\mathcal{E} = \left(e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\right)$$

$$u = (x_1, x_2, x_3) \qquad u = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$(u)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

jiná báze v $\mathbb{R}^3$ $\quad u_1 = (1,1,0),\ u_2 = (1,0,1),\ u_3 = (0,0,1)$

$$u = (x_1, x_2, x_3) = a_1(1,1,0) + a_2(1,0,1) + a_3(0,0,1)$$

$$x_1 = a_1 + a_2 \qquad a_1 = x_2 \qquad \alpha = (u_1, u_2, u_3)$$
$$x_2 = a_1 \qquad a_2 = x_1 - x_2$$
$$x_3 = a_2 + a_3 \qquad a_3 = x_3 - x_1 + x_2$$

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 - x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

<u>Příklad</u> Prostor $\mathbb{R}_2[x]$

má bázi $\alpha = (1, x-1, (x-1)^2)$

$x^2 + x - 1 \in \mathbb{R}_2[x]$

$$(x^2+x-1)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x^2 + x - 1 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1)^2$$

Přiřazení souřadnic v bázi α k vektorům definuje zobrazení

$$u \longmapsto (u)_\alpha$$

$$(\ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$(u+v)_\alpha = (u)_\alpha + (v)_\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} u &= a_1u_1 + \dots + a_n u_n \\ v &= b_1 u_1 + \dots + b_n u_n \\ u+v &= (a_1+b_1)u_1 + \dots + (a_n+b_n)u_n \end{aligned}\right\} (u+v)_\alpha = (u)_\alpha + (v)_\alpha$$

Analogicky $\quad (a\cdot u)_\alpha = a(u)_\alpha$.

Čtyři užitečné věty o dimenzi

(1) Nechť U je vekt. prostor dimenze n. Jestliže $v_1, v_2, \dots, v_n \in U$ jsou lin. nezávislé, pak tvoří bázi.

Důkaz: Nechť $u_1, u_2, \dots u_n$ je báze U.

Z vektorů $v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots u_n$ vybereme

$v_1, v_2, \dots, v_m, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_k}$, které jsou LN
a platí, že

$$[v_1, \dots v_m, u_{i_1}, \dots u_{i_k}] = [v_1 \dots v_m, u_1, \dots u_n] = U.$$

Tedy $v_1, \dots v_m, u_{i_1}, \dots u_{i_k}$ je báze prostoru U. Protože $\dim U = m$, musí mít m prvků. To znamená musí být $v_1, v_2, \dots v_m$.

② Nechť U je vekt. prostor dimenze n a nechť $u_1, u_2, \dots u_n$ generují U. Pak $u_1, u_2, \dots u_n$ tvoří bázi prostoru U.

Ze seznamu $u_1, u_2, \dots u_n$ umíme vybrat LN prvky $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_k}$ tak, že $[u_{i_1}, \dots u_{i_k}] = [u_1, \dots u_n] = U$.

Tedy $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_k}$ je báze prostoru U. Ta má nejvýš n prvků, protože jsou ve výběru mezi prvky $u_1, u_2, \dots u_n$.

③ Nechť $V \subseteq U$ je podprostor. Je-li U konečnědimenzionální, je V rovněž konečnědimenzionální a

$$\dim V \leq \dim U.$$

<u>Důkaz:</u> Nechť $\dim U = n$. Vezmeme $v_1, v_2, \dots v_k \in V$ lin. nezávislé vektory ve V. Ty jsou LN rovněž v prostoru U a tedy $k \leq n$. Proto ve V nemůže být báze, která by měla více než n vektorů.

(4) Nechť V je podprostor v U, který je konečně dimenzionální. Jestliže $\dim V = \dim U$, pak

$$V = U.$$

Důkaz: Nechť $v_1, v_2, \dots v_n \in V$ je báze prostoru V. Pak $v_1, \dots v_n$ jsou LN v prostoru U, proto podle věty (7) tvoří bázi U. Proto

$$V = [v_1, \dots, v_n] = U$$

Průnik a součet podprostorů

Mějme prostor U nad K a jeho dva podprostory V a W.

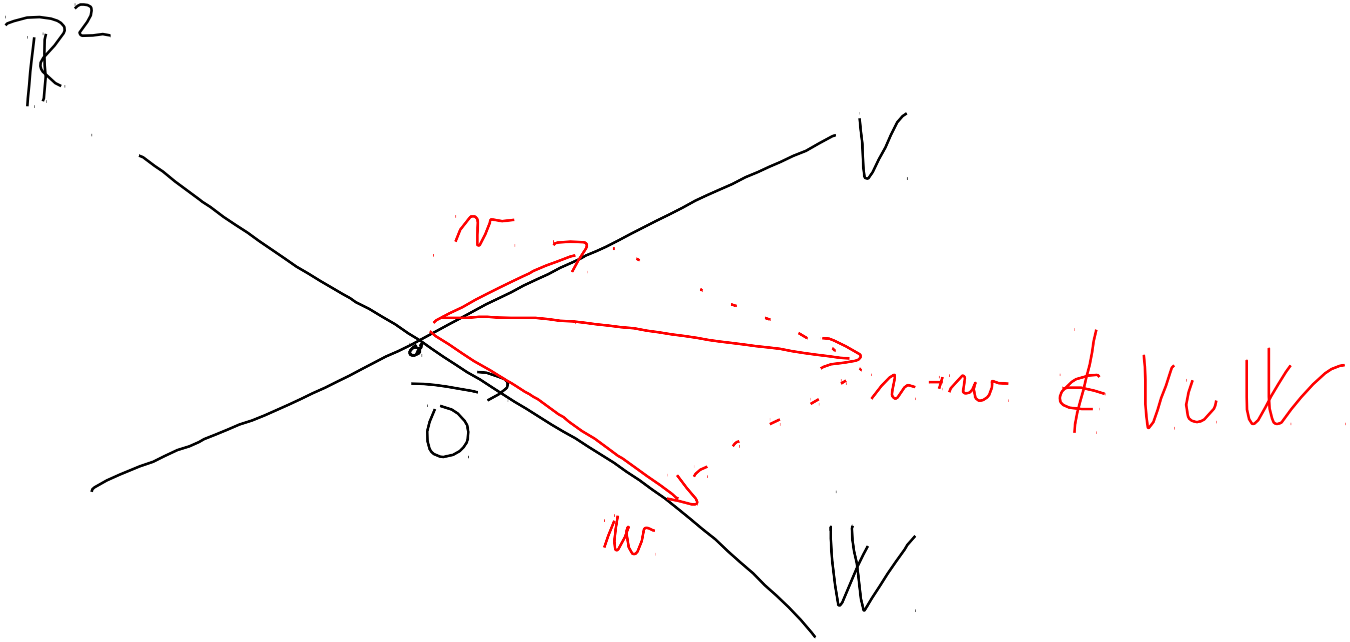
Průnik těchto podprostorů je rovněž vekt. podprostor:

$\vec{o} \in V, \ \vec{o} \in W \implies \vec{o} \in V \cap W \qquad , \quad V \cap W \neq \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} u_1, u_2 \in V \cap W \implies u_1, u_2 \in V \implies u_1 + u_2 \in V \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; u_1, u_2 \in W \implies u_1 + u_2 \in W \end{array}\right\} u_1 + u_2 \in V \cap W$$

$$\left.\begin{array}{l} a \in K, u \in V \cap W \implies \text{analogicky} \end{array}\right\} a u \in V \cap W$$

Sjednocení dvou podprostorů NENÍ obecně podprostor:



Součet podprostorů $V+W$ v prostoru U je množina

$$V+W = \{ v+w \in U \; ; \; v \in V,\ w \in W \}$$
$$= \{ u \in U : \exists v \in V \ \exists w \in W \ \ u = v+w \}$$

Lemma Súčet vekt. podpriestorov je vektorový podpriestor.

Dôkaz: $V, W \leq U$

$\vec{o} \in V, \vec{o} \in W \Rightarrow \vec{o} = \vec{o} + \vec{o} \in V + W$

$u_1, u_2 \in V + W \Rightarrow u_1 = v_1 + w_1 \quad v_1 \in V, w_1 \in W$

$u_2 = v_2 + w_2 \quad v_2 \in V, w_2 \in W$

$$u_1 + u_2 = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) = \underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in V} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in V + W$$

$a \in K, u \in V + W \Rightarrow au \in V + W$

analogicky

Příklad $U = \mathbb{R}^4$

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

$$W = \{ (0, y_2, 0, y_4) \in \mathbb{R}^4 \}$$

Platí, že $V + W = \mathbb{R}^4$

Každý vektor z $\mathbb{R}^4$ můžeme napsat ve tvaru součtu vektorů z V a W

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{(x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 - x_3)}_{\in V} + \underbrace{(0, 0, 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}_{\in W}$$

$$= \underbrace{(x_1, -x_1 - x_3 - x_4, x_3, x_4)}_{\in V} + \underbrace{(0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 0, 0)}_{\in W}$$

Najdeme průnik $V \cap W$

$$V \cap W = \{ (0, y_2, 0, y_4) \in W : 0 + y_2 + 0 + y_4 = 0 \}$$
$$= \{ (0, p, 0, -p) \in \mathbb{R}^4, \ p \in \mathbb{R} \}$$

$$V \cap W \neq \{ \vec{o} \}$$

Definice direktního součtu

Součet vekt. podprostorů V a W nazveme direktní, jestliže $V \cap W = \{ \vec{o} \}$. Zápis direktního součtu je $V \oplus W$.

$V \oplus W$ jako množina je totéž, co $V + W$

navíc nám to říká navíc, že $V \cap W = \{ \vec{o} \}$

Lemma Součet vekt. podprostorů V a W je direktní, právě když platí:

$$\forall u \in V+W \quad \exists! v \in V \quad \exists! w \in W \quad u = v + w.$$

Předchozí příklad: součet nebyl direktní, vektor v rovině bylo možno napsat více způsoby.

Důkaz: $\Longrightarrow$ Každý vektor $u \in V+W$ lze psát ve tvaru

$$u = v + w, \quad v \in V, \; w \in W.$$

Ukážeme jednoznačnost, pokud je součet direktní:

Nechť

$$u = v_1 + w_1 \qquad \text{kde } v_1, v_2 \in V$$
$$= v_2 + w_2 \qquad w_1, w_2 \in W$$

$$v_1 + w_1 = v_2 + w_2$$

$$V \ni v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in W$$

Tedy $\quad v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V \cap W = \{\vec{o}\}$

Proto $\quad v_1 - v_2 = \vec{o}$

$\qquad w_2 - w_1 = \vec{o} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = v_2, \; w_1 = w_2.$

Zápis vektoru u je jednoznačný.

$\Longleftarrow$ Nechť zápis $u \in V + W$ jako součtu je jednoznačný.

Nechť $u \in V \cap W$, potom

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ V}}{u} = u + \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{\vec{o}} \quad = \quad \underset{\substack{\Uparrow \\ V}}{\vec{o}} + \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{\vec{u}}$$

Z jednoznačnosti plyne

$$u = \vec{o}.$$

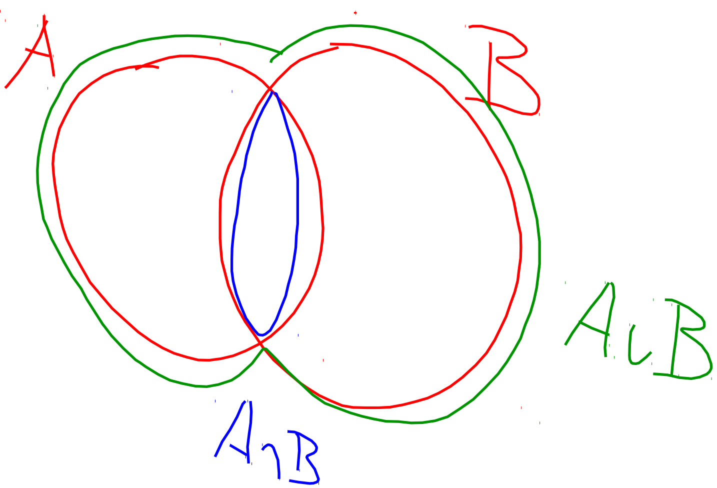
Tedy $V \cap W = \{\vec{o}\}$.

Věta o dimenzi součtu a průniku podprostorů

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ konečné dimenze a V, W dva jeho vekt. podprostory. Pak platí

$$\dim V + \dim W = \dim(V+W) + \dim(V\cap W).$$

Jde o analogii s počty prvků průniku a sjednocení dvou množin



$|A|$ počet prvků množiny A

$$|A| + |B| = |A\cup B| + |A\cap B|$$

Jak počítat součet podprostorů

V a W budou zadány jako lin. obaly kon. počtu vektorů

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_k] \qquad W = [w_1, w_2, \dots, w_l]$$

$$V + W = \{ v + w \in U, \ v \in V, \ w \in W \}$$

$$= \{ a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 w_1 + \dots + b_l w_l \in U, \ a_i, b_j \in \mathbb{K} \}$$

$$= [v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l]$$

Obvykle chceme najít bázi prostoru $V+W$. Pokud z vektorů $v_1 \dots v_k w_1 \dots w_l$ vybereme LN se stejným lin. obalem

Jak počítat průnik

$V = [v_1, v_2, v_3]$

$W = [w_1, w_2, w_3]$

$$V \cap W = \{ z \in U : \begin{array}{l} z = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \\ z = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 \end{array} \}$$

Tedy chceme najít $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ které řeší rovnici

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 - b_1 w_1 - b_2 w_2 - b_3 w_3 = \vec{0}$$

Tato rovnice v neznámých $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ vede k homogenní soustavě lin. rovnic.

Její řešení závisí na několika parametrech

Nechť např.

$$b_1 = 3p + 2s \qquad b_3 = s$$

$$b_2 = p$$

Teď se můžeme vrátit k příkladu

$$V \cap W = \{ z = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3,\ \text{kde } b_1, b_2, b_3 \text{ řeší naši soustavu} \}$$

$$= \{ (3p+2s) w_1 + p w_2 + s w_3,\ p, s \in \mathbb{K} \}$$

$$= \{ p(3w_1 + w_2) + s(2w_1 + w_3),\ p, s \in \mathbb{K} \}$$

$$= [\, 3w_1 + w_2,\ 2w_1 + w_3 \,]$$

Průnik jsme určili jako lin. obal několika vektorů. Z nich vybereme LN se stejným lin. obalem, a ty budou tvořit bázi průniku.