1

Věta: Nechť V a W jsou podprostory ve vekt. prostoru U nad $\mathbb{K}$ konečné dimenze. Pak

$$\dim V + \dim W = \dim (V \cap W) + \dim (V + W)$$

Důkaz: Zvolme nějakou bázi podprostoru $V \cap W$.

$u_1, u_2, \dots u_k$ báze $V \cap W$

Podle jedné z předchozích vět můžeme tyto lin. nez. vektory ve V doplnit na bázi podprostoru V

$u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, \dots v_s$ báze prostoru V

(2)

Stejně jako vektory $u_1, \ldots, u_k$ lze doplnit na bázi podprostoru W

$u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_p$ báze W

$$\dim V + \dim W = (k+s) + (k+p)$$

$$\dim (V \cap W) = k$$

Aby věta platila, musí být báze $V+W$ tvořena

$k+s+p$ vektory.

Dokážeme, že tomu tak skutečně je. Přesněji, dokážeme, že vektory

$u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_p$ tvoří bázi $V+W$.

Vektory $u_1,\dots,u_k, v_1,\dots,v_s, w_1,\dots,w_p$ generují $V+W$.

Každý prvek z $V+W$ je tvaru $v+w$, kde $v\in V$, $w\in W$.

Protože $u_1,\dots,u_k, v_1,\dots,v_s$ je báze V, je

$$v = a_1u_1+\dots+a_ku_k+b_1v_1+\dots+b_sv_s$$

Protože $u_1,\dots,u_k, w_1,\dots,w_p$ je báze W, je

$$w = c_1u_1+\dots+c_ku_k+d_1w_1+\dots+d_pw_p.$$

Proto
$$v+w = (a_1+c_1)u_1+\dots+(a_k+c_k)u_k+b_1v_1+\dots+b_sv_s + d_1w_1+\dots+d_pw_p$$

Tedy $u_1,\dots,u_k, v_1,\dots,v_s, w_1,\dots,w_p$ generují $V+W$.

Vektory $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_p$ jsou LN.

Nechť $a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_s v_s + \underbrace{c_1 w_1 + \dots + c_p w_p} = \vec{0}$.

$$u = \underbrace{a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_s v_s}_{\in V} = \underbrace{-c_1 w_1 - \dots - c_p w_p}_{\in W}$$

$u \in V \cap W$ a je tedy lin. kombinací $u_1, u_2, \dots, u_k$.

$$u = -c_1 w_1 - \dots - c_p w_p = d_1 u_1 + \dots + d_k u_k.$$

$$\vec{0} = d_1 u_1 + \dots + d_k u_k + c_1 w_1 + \dots + c_p w_p$$

Vektory $u_1 \dots u_k, w_1 \dots w_p$ tvoří bázi W, jsou tedy LN.

Tedy z LN plyne, že

$$d_1 = d_2 = \dots = d_k = \underline{c_1 = \dots = c_p = 0}$$

$c_i = 0$ dosadíme do původní rovnice a tím dostaneme

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_s v_s = \vec{o}$$

$u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_s$ tvoří bázi podprostoru V, jsou tedy LN, a proto

$$\underline{a_1 = a_2 = \dots = a_k = b_1 = \dots = b_s = 0.}$$

Tím jsme dokázali lin. nezávislost vektorů

$$u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_p.$$

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Definice *lineárního zobrazení*

Nechť U a V jsou vekt. prostory na $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Zobrazení $\varphi : U \to V$

se nazývá lineární, jestliže

(1) $\forall u_1, u_2 \in U: \quad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$,

(2) $\forall a \in \mathbb{K} \ \forall u \in U: \quad \varphi(au) = a\varphi(u)$.

Z definice lze odvodit tyto vlastnosti lin. zobrazení:

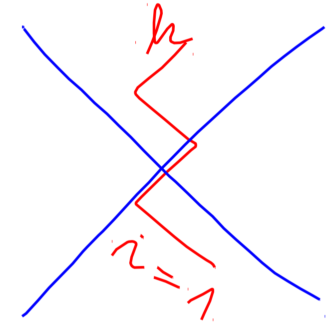
(a) $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

Dk: $\varphi(\vec{0}) = \varphi(0 \cdot u) = 0 \cdot \varphi(u) = \vec{0}$

(b) $\varphi(a_1u_1 + a_2u_2) = a_1\varphi(u_1) + a_2\varphi(u_2)$

$$\varphi(a_1u_1 + a_2u_2) \overset{(1)}{=} \varphi(a_1u_1) + \varphi(a_2u_2) \overset{(2)}{=} a_1\varphi(u_1) + a_2\varphi(u_2)$$

(c) $\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i \varphi(u_i)}$ 7



$$\varphi(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k) = \overbrace{a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2) + \dots + a_k \varphi(u_k)}$$

PŘÍKLADY

① „Lineární funkce" ze střední školy

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = ax + b$$

Je lineární zobrazení ve smyslu naší definice

POUZE pro $b = 0$!

$$f(x+y) = a(x+y)+b = ax+ay+b$$

$$f(x)+f(y) = (ax+b)+(ay+b) = ax+ay+2b.$$

Rovnost nastane, právě když

$$b = 2b \text{, tj. } b = 0.$$

Jestliže $b=0$, pak

$$f(kx) = a(kx) = k(ax) = kf(x).$$

2 Nejdůležitější příklad

Matice A typu $k \times n$ s prvky v $\mathbb{K}$ zadává lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$

$$\varphi(x) = Ax \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Platí

$$\varphi(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(ax) = A(ax) = a(Ax) = a\varphi(x)$$

3) Nechť U je vekt. prostor s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Zobrazení, které vektorům z U přiřazuje jejich souřadnice v bázi α, je lineární.

$$(\ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$u \longmapsto (u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

Linearita:

$$(u+v)_\alpha = (u)_\alpha + (v)_\alpha$$

$$(au)_\alpha = a(u)_\alpha .$$

Ukazovali jsme si to minule.

4. $U = \{ f : M \longrightarrow \mathbb{R} \}$ ... vekt. prostor.

Nechť $m_0 \in M$ je nějaký prvek množiny M

Definujme

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(f) = f(m_0)$$

Linearita:

$$\varphi(f+g) = (f+g)(m_0) = f(m_0) + g(m_0) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(af) = (af)(m_0) = a \cdot f(m_0) = a\varphi(f).$$

5 Derivace:

$U = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f má v každém bodě derivaci$\}$

$V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

Pak zobrazení $\varphi : U \to V$

$$\varphi(f) = f'$$

je lineární.

$$\varphi(f+g) = (f+g)' = f' + g'$$

$$\varphi(af) = (af)' = af'$$

6 $U = C[a,b]$ spojité funkce na $[a,b]$

zobrazení $\varphi : U \to \mathbb{R}$

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

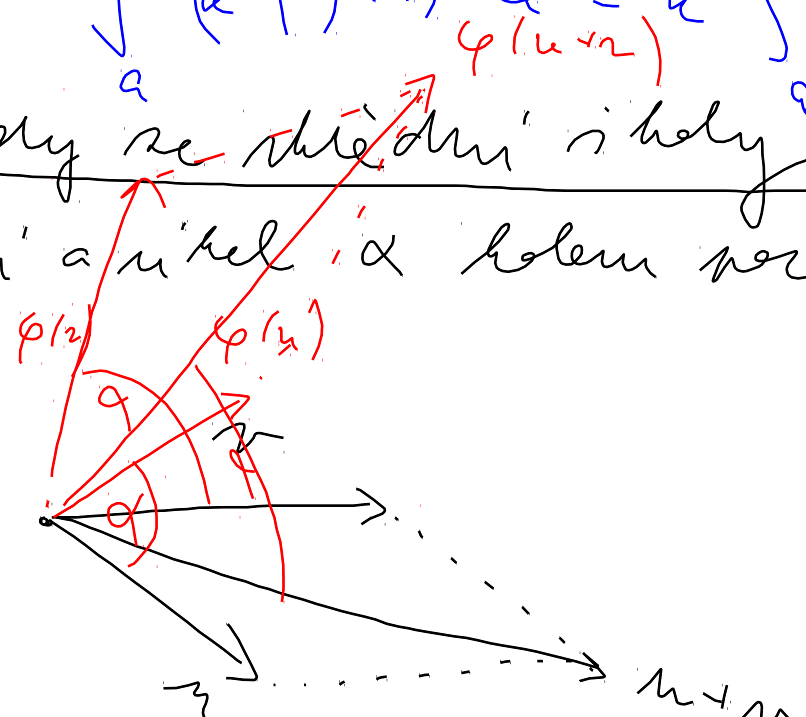
je lineární:

$$\varphi(f+g) = \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

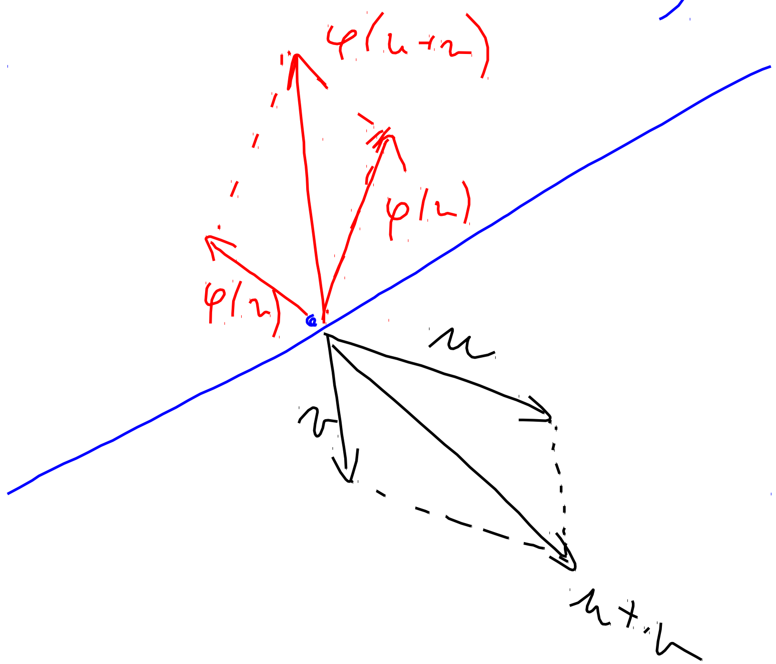
$$\varphi(kf) = \int_a^b (kf)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

7 <u>Příklady ze střední školy</u>

Otočení o úhel α kolem počátku v $\mathbb{R}^2$.



8. Obdobně symetrie podle přímky procházející počátkem v $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$ (nebo symetrie podle roviny procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$).



14

Věta: Lineární zobrazení $\varphi: U \to V$, kde U je vekt. prostor konečné dimenze, je určeno jednoznačně svými hodnotami na nějaké bázi prostoru U.

Dk: Nechť $u_1, u_2, \dots u_n$ je báze prostoru U.

Nechť $u \in U$ je libovolný. Pak

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

a proto

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(u_i)$$

Tedy $\varphi(u)$ je jednoznačně určeno hodnotami $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$.

Aplikace předchozí věty: Najděte všechna lin. zobrazení

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$$

Vezmeme standardní bázi $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť φ je nějaké lin. zobrazení do $\mathbb{K}^k$. Vezměme

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \quad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix} \dots \quad \varphi(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \text{, počítáme } \varphi(x):$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) + \dots$$

$$\dots + x_n \varphi(e_n) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot X$$

Všechna lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

$$a_1 = \varphi(e_1), \quad a_2 = \varphi(e_2), \quad a_3 = \varphi(e_3)$$

<u>Lemma</u> Složení lin. zobrazení je opět lin. zobrazení. Identické zobrazení $id : U \to U$, $id(u) = u$ je lin. zobrazení.

Věta: Nechť U a V jsou vekt. prostory a $\varphi : U \to V$ lineární zobrazení:

(1) Je-li $U_1 \subseteq U$ podprostor, pak jeho obraz
$$\varphi(U_1) = \{\varphi(u) \in V,\ u \in U_1\}$$
je vekt. podprostor ve V.

(2) Je-li $V_1 \subseteq V$ vekt. podprostor, pak jeho vzor
$$\varphi^{-1}(V_1) = \{u \in U,\ \varphi(u) \in V_1\}$$
je vekt. podprostor v U.

Dk (2)

$u_1, u_2 \in \varphi^{-1}(V_1)$, proto $\varphi(u_1) \in V_1$ a $\varphi(u_2) \in V_1$.

Protože V_1 je podprostor, je

$$\varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1)+\varphi(u_2) \in V_1$$

Proto $u_1+u_2 \in \varphi^{-1}(V_1)$.

Analogicky pro násobek.

Jádro lineárního zobrazení $\varphi : U \to V$ je vzor nulového vekt. podprostoru ve V, tj.

$$\ker \varphi = \{u \in U,\ \varphi(u) = \vec{o}\}$$

kernel

Obraz lineárního zobrazení $\varphi : U \to V$

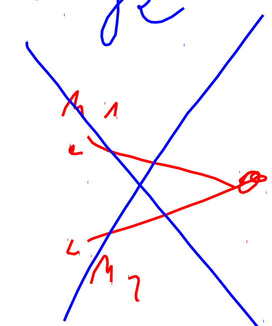
$$\operatorname{im} \varphi = \{ v \in V : \exists u \in U : \varphi(u) = v \}$$

image

Lemma (K čemu je dobré jádro)

Lin. zobrazení $\varphi : U \to V$ je prosté, právě když

$$\ker \varphi = \{\vec{o}\}$$



Definice prostého (= injektivního) zobrazení:

$\varphi : U \to V \quad \forall u_1, u_2 \in U \quad \varphi(u_1) = \varphi(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2.$

Dk: $\Rightarrow$ Nechť φ je prosté. Nechť $u \in \ker \varphi$.

Potom $$\varphi(u) = \vec{o} = \varphi(\vec{o})$$

Z definice injektivnosti zobrazení pak plyne, že
$$u = \vec{o}.$$

Proto $\ker \varphi = \{\vec{o}\}$.

$\Leftarrow$ Nechť $\ker \varphi = \{\vec{o}\}$. Nechť $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$.

Pak $$\varphi(u_1) - \varphi(u_2) = \vec{o}$$
$$\varphi(u_1 - u_2) = \vec{o}$$

(22)

Tedy $u_1 - u_2 \in \ker \varphi = \{\vec{0}\}$. Tedy

$$u_1 - u_2 = \vec{0}$$

$$u_1 = u_2.$$

Tedy φ je prosté.

<u>Definice surjektivního zobrazení</u> (zobrazení na).

$\varphi : U \to V$ je surjektivní, jestliže $\forall v \in V$ existuje $u \in U$ tak, že $\varphi(u) = v$.

Z této definice okamžitě plyne

$$\varphi : U \to V \text{ je surjektivní} \iff \operatorname{im} \varphi = V.$$

Věta o dimenzích jádra a obrazu

Nechť U je vekt. prostor konečné dimenze. Nechť

$$\varphi : U \to V$$

je lineární zobrazení. Potom platí:

$$\dim U = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi$$

Dk: $\ker \varphi$ je podprostor v U, $\operatorname{im} \varphi$ je podprostor ve V. Protože U má konečnou dimenzi, má i jeho podprostor $\ker \varphi$ konečnou bázi. Jednu takovou vybereme:

$u_1, u_2, \ldots, u_k$ báze $\ker \varphi$

Tuto bázi doplníme na bázi celého prostoru U

$u_1, u_2, \dots, u_k, z_1, z_2, \dots z_p$ báze U

$$\dim U = k + p, \quad \dim \ker \varphi = k$$

Potřebujeme dokázat, že $\dim \operatorname{im} \varphi = p$.
Tedy chceme najít nějakou bázi prostoru $\operatorname{im} \varphi$, která má $\underline{p}$ prvků.

Ukážeme, že $\varphi(z_1), \varphi(z_2), \dots, \varphi(z_p)$ tvoří bázi podprostoru $\operatorname{im} \varphi$ ve V.

(1) $\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_p)$ generují $\operatorname{im} \varphi$.

Každý vektor z $\operatorname{im} \varphi$ je tvaru $\varphi(u)$, kde $u \in U$.
u lze zapsat jako lin. kombinaci vektorů báze

$$u = a_1 u_1 + \dots a_k u_k + b_1 z_1 + \dots + b_p z_p.$$

Potom

$$\varphi(u) = \varphi(a_1 u_1 + \dots + b_p z_p) = a_1 \underbrace{\varphi(u_1)}_{=0} + \dots + a_k \underbrace{\varphi(u_k)}_{=0} +$$

$$+ b_1 \varphi(z_1) + \dots + b_p \varphi(z_p) = b_1 \varphi(z_1) + \dots + b_p \varphi(z_p).$$

(2) $\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_p)$ jsou LN

Nechť $\quad a_1 \varphi(z_1) + \dots + a_p \varphi(z_p) = \vec{0}$

Potom $\quad \varphi(a_1 z_1 + \dots + a_p z_p) = \vec{0}$

Tedy $a_1 z_1 + \dots + a_p z_p \in \ker \varphi$ můžeme napsat jako lin. kombinaci vektorů $u_1, u_2, \dots u_k$:

$$a_1 z_1 + \dots + a_p z_p = b_1 u_1 + \dots + b_k u_k$$

$$\vec{0} = b_1 u_1 + \dots + b_k u_k - a_1 z_1 - \dots - a_p z_p$$

Vektory $u_1, \dots, u_k, z_1, \dots, z_p$ jsou LN, tedy
$$b_1 = b_2 = \dots = b_k = a_1 = \dots = a_p = 0.$$

Tedy vektory $z_1, z_2, \dots, z_p$ jsou LN.