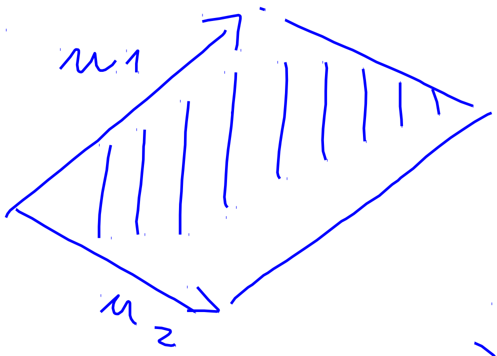
Geometrický význam determinantu

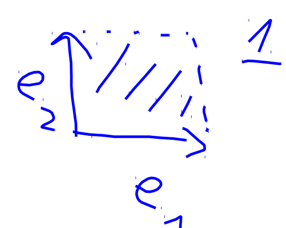
Dimenze 2

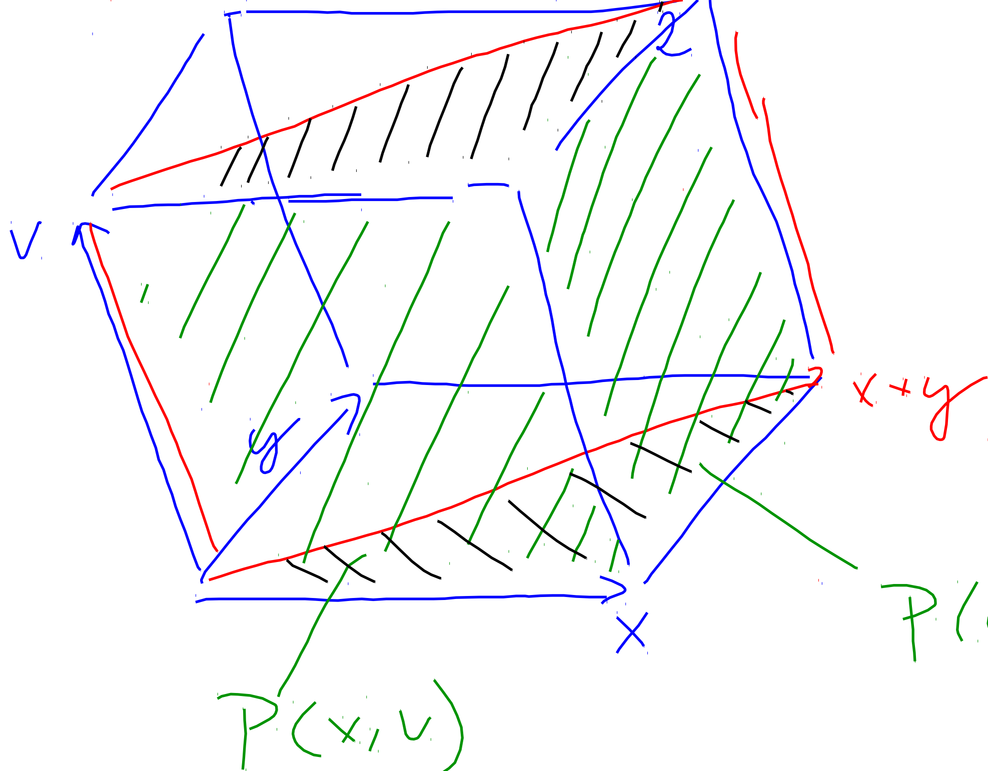
Orient. obsah rovnoběžníku určené (zadané) vektory u, v je číslo $P(u,v)$, které se řídí těmito pravidly:



$P(u_1,u_2) \in \mathbb{R}$

1. $P(cu,v) = cP(u,v)$,
   $P(u,cv) = cP(u,v)$
2. $P(x+y,v) = P(x,v) + P(y,v)$
3. $P(v,u) = -P(u,v)$ $\qquad P(e_2,e_1) = -1$
4. $P(e_1,e_2) = 1$





$$P(x+y,v) = P(x,v) + P(y,v)$$

<u>Věta:</u> Platí, že $P(u,v) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$

<u>Důkaz:</u> $P(u,v) = P(u_1e_1 + u_2e_2, v_1e_1 + v_2e_2) =$

$= P(u_1e_1, v_1e_1 + v_2e_2) + P(u_2e_2, v_1e_1 + v_2e_2)$

$= P(u_1e_1, v_1e_1) + P(u_1e_1, v_2e_2) + P(u_2e_2, v_1e_1) + P(u_2\underset{0?}{e_2}, v_2e_2)$

$= u_1v_1 \underset{0?}{P(e_1,e_1)} + u_1v_2 \underbrace{P(e_1,e_2)}_{1} + u_2v_1 \underbrace{P(e_2,e_1)}_{-1} + u_2v_2 P(e_2,e_2)$

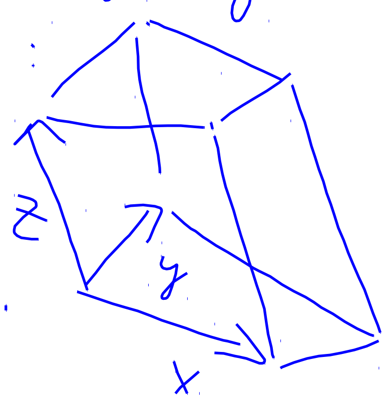
<u>Vsuvka</u> Platí
$$P(v,v)=0.$$

je totiž
$$P(v,v) = -P(v,v)$$
$$2P(v,v) = 0 \implies P(v,v)=0$$

Pokračování výpočtu

$$= u_1 v_2 P(e_1,e_2) + u_2 v_1 P(e_2,e_1) = u_1 v_2 P(e_1,e_2)$$
$$- u_2 v_1 P(e_1,e_2) = (u_1 v_2 - u_2 v_1) P(e_1,e_2) =$$
$$= u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

Dimenze 3 – analogicky můžeme definovat orient. objem rovnoběžnostěnu:



Znaménko or. objemu zadává orientaci

$$O(x,y,z)$$
$$O(y,x,z) = -O(x,y,z)$$
$$O(e_1,e_2,e_3) = \underline{1}$$

Zobecnění do dimenze n

$$P : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-tice vektorů}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$P(u_1, u_2, \dots u_n)$ je orient. objem rovnoběžnostěnu zadaného vektory $u_1, u_2, \dots u_n$.

P je lineární v každé z n složek

(1) $P(a u_1 + b v_1, u_2, \dots u_n) = a P(u_1, u_2 \dots u_n) + b P(v_1, u_2, \dots u_n)$

(2) $P(u_1, \dots u_i, \dots u_j \dots u_n) = -P(u_1 \dots u_j \dots u_i \dots u_n)$

(3) $P(e_1, e_2, \dots e_n) = 1$

Zobrazení splňující (1) a (2) se nazývá multilineární antisymetrické.

Platí, že $P(u_1, \dots u_n) = \det \left(u_1 \,|\, u_2 \,|\, \dots \,|\, u_n \right)$

5

Hodnost matice

$A \quad k \times n$

$s_j(A) \in \mathbb{K}^k$

$r_i(A) \in \mathbb{K}^n$

$$A = \big(s_1(A), s_2(A) \dots s_n(A) \big)$$

$$A = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix}$$

Sloupcová hodnost matice

$$h_s(A) = \dim \underbrace{[s_1(A), s_2(A), \dots s_n(A)]}_{\text{podprostor v } \mathbb{K}^k}$$

(jinými slovy: je to maximální počet lin. nezávislých sloupců)

Řádková hodnost matice

$$h_r(A) = \dim \underbrace{[r_1(A), \dots r_k(A)]}_{\text{podprostor v } \mathbb{K}^n}$$

6

jinak: je to maximální počet lin. nezávislých řádků.

Věta: $h_s(A) = h_r(A)$.

Definice: Hodnost matice A je společná hodnota sloupcové a řádkové hodnosti.

Důkaz věty:

1 Řádková hodnost se nemění při řádkových operacích

$h_r(A) = \dim [r_1(A), r_2(A), r_3(A), \dots r_n(A)]$

B ... vznikne z přičtením 2. řádku k 1. řádku

$h_r(B) = \dim [r_1(A) + r_2(A), r_2(A), \dots r_n(A)]$

Protože $[r_1(A), r_2(A), \dots r_n(A)] = [r_1(A) + r_2(A), r_2(A), \dots, r_n(A)]$

tak $h_r(A) = h_r(B)$.

Analogicky pro sloupcovou hodnost a sloupcové operace

(2) Řádková hodnost matice ve schod. tvaru je daná počtem nenulových řádků (= počet ved. koeficientů)

$$A = \begin{pmatrix} * & & & & & & \\ 0 & * & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & * & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nenulové řádky jsou lin. nezávislé!

Důkaz: Mějme matici A, kterou pomocí řádkových operací převedeme do schod. tvaru B.
Vzpomeňme si na algoritmus, který vybírá ze seznamu sloupců lin. nezávislé s stejným lin. obalem. Podle něho je

$$h_s(A) = \dim[s_1(A), \dots, s_m(A)] = \text{počet ved. koeficientů}$$

$$\text{v matici } B = h_r(B) = h_r(A)$$

8

Poznámky o hodnosti

$A \quad k \times n$

$$h_r(A) = \dim \underbrace{[r_1(A), \dots r_k(A)]}_{\text{podprostor v } \mathbb{R}^n} \begin{array}{l} \leq n \quad (\text{podprostor v } \mathbb{R}^n) \\ \leq k \quad (\text{vektorů je } k) \end{array}$$

$$h(A) = h_r(A) \leq \min(n, k)$$

$$A = (1, 2, 3) \qquad h(A) = \underline{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

9

Obecné věty o soustavách lin. rovnic

1 Frobeniova věta o řešitelnosti soustavy

Nechť A je matice $k \times n$ na $\mathbb{K}$. Potom soustava lin. rovnic

$$A \cdot x = b$$

má řešení, právě když

$$h(A) = h(A|b).$$

Důkaz: Nechť má soustava řešení $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Potom vztah $A x = b$

můžeme napsat také tímto způsobem:

$$A x = \left(s_1(A), s_2(A), \dots s_n(A) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

$$s_1(A)x_1 + s_2(A)x_2 + \dots + s_n(A)x = b$$

Tedy b je lin. kombinací sloupců matice A, proto

$$[s_1, s_2, \dots s_n, b] = [s_1, s_2, \dots s_n]$$

$$h(A|b) = \dim[s_1, \dots b] = \dim[s_1 \dots s_n] = h(A)$$

$\Leftarrow$ Obráceně, nechť $h(A|b) = h(A)$. Pak

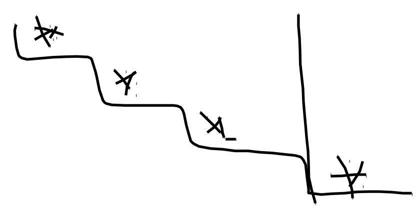
$$\dim[s_1, \dots s_n, b] = \dim[s_1 \dots s_n]$$

Proto $[s_1, \dots s_n, b] = [s_1 \dots s_n]$

tedy $b \in [s_1, s_2, \dots s_n]$

$$b = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \dots + x_n s_n = (s_1, s_2, \dots s_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$

Soustava $Ax = b$ má tedy řešení.



2 **Věta:** Nechť A je matice $k \times n$, potom množina řešení homogenní soustavy
$$Ax = 0$$
je vekt. podprostor v $\mathbb{K}^n$ dimenze
$$n - h(A).$$

Důkaz: Matice A typu $k \times n$ zadává lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$ předpisem $\varphi(x) = Ax$. Množina řešení homogenní soustavy $Ax = 0$ je $\ker \varphi$. Platí

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_{n} = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi$$
$$= \dim \ker \varphi + h(A)$$

Stačí dokázat, že $\dim \operatorname{im} \varphi = h(A)$.

12

Dokážeme, že $\dim \operatorname{im} \varphi = h(A)$

$$\dim \operatorname{im} \varphi = \dim [\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_n)] =$$
$$= \dim [Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n] =$$
$$= \dim [s_1(A), s_2(A), \dots, s_n(A)] =$$
$$= h_s(A) = h(A)$$

3 **Věta:** O vztahu řešení homogenní a nehomogenní soustavy lin. rovnic

Nechť A je matice typu $k \times n$. Nechť $R(A,b) = \{x \in \mathbb{K}^n,\ Ax = b\}$

a nechť x_0 je jedno pevné řešení $Ax_0 = b$.

Potom $R(A,b) = x_0 + R(A,0)$

Důkaz: Nechť z je řešení hom. soustavy, $z \in \mathcal{R}(A,0)$.
Potom $x_0 + z$ je řešení nehomogenní soustavy, neboť

$$A(x_0+z) = Ax_0 + Az = b + 0 = b$$

Tedy $x_0 + z \in \mathcal{R}(A,b)$. Dokázali jsme

$$x_0 + \mathcal{R}(A,0) \subseteq \mathcal{R}(A,b).$$

Obráceně: Nechť y je řešení nehom. rovnice, $y \in \mathcal{R}(A,b)$.
Potom $y = x_0 + (y - x_0)$
Přitom $y - x_0$ je řešení homogenní rovnice, neboť

$$A(y-x_0) = Ay - Ax_0 = b - b = 0$$

Tedy $y - x_0 \in \mathcal{R}(A,0)$ a my jsme dokázali, že

$$\mathcal{R}(A,b) \subseteq x_0 + \mathcal{R}(A,0).$$

Příklady ze střední školy

V $\mathbb{R}^3$ $\qquad a x_1 + b x_2 + c x_3 = d$

Řešitelnost $\qquad h(a,b,c) = h(a,b,c|d)$

Některý koeficient $\neq 1$, obě hodnosti musí být 1.

$a \neq 0$ nebo $b \neq 0$ nebo $c \neq 0$.

Řešení je rovno

$$\text{jedno řešení} + \text{řešení}\ \underbrace{(a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0)}_{\substack{\text{vekt. podprostor} \\ \dim = 3 - h(a,b,c) = 3-1 = 2}}$$

rovina v $\mathbb{R}^3$

DÚ analogicky rozeberte, co je geometricky řešení soustavy

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$

Zkouška

V interaktivní osnově na konci je
seznam pojmů, které je
potřeba

BEZPODMÍNEČNĚ

znát k ústní zkoušce

Aspoň týden se učit

Na známce záleží!