OPERACE (1) S MATICEMI

Matice $k \times n$ (nebo k/n) je tabulka s k řádky a n sloupci, kde máme čísla z $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & & a_{kn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} je prvek matice v i-tém řádku a j-tém sloupci

Násobení matice číslem

Množina matic typu $k \times n$ s prvky v $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

...... $\mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})$

Násobení matic číslem je zobrazení

$$\cdot : \underbrace{\mathbb{K} \times \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})}_{\{(c,A),\ c\in\mathbb{K},\ A\in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})\}} \longrightarrow \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})$$

$$(c, A) \longmapsto c\cdot A \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})$$

$$(cA)_{ij} = (c \cdot A_{ij})$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 8 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

<u>Sčítání matic stejného typu</u>

je zobrazení

$$+ : \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K})$$

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Sčítáme prvky ve stejných řádcích a sloupcích

Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 \\ 8 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 8 & -9 & 11 & 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -1 \\ 16 & -9 & 17 & 209 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti sčítání:

komutativní $\quad A+B = B+A$

asociativní $\quad (A+B)+C = A+(B+C)$

neutrální prvek } nulová matice $\quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$$A + O = A$$

ke každé matici existuje opačná matice $\quad (-A) = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ & & & \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \dots & -a_{kn} \end{pmatrix} \quad (-A) + A = O$

5

Vlastnosti násobení číslem (= násobení skalárem)

$$1 \cdot A = A$$

$$c \cdot (A+B) = (c \cdot A) + (c \cdot B)$$

$$(c+d) A = (c \cdot A) + (d \cdot A)$$

$$(cd) \cdot A = c \cdot (d \cdot A)$$

Násobení matic – motivace pomocí soustav lin. rovnic

1. lineární rovnice s jednou neznámou je

$$a \cdot x = b$$

zapsána pomocí násobení čísel. Chceme soustavu

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\dots$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

zapsat pomocí násobení matic ve tvaru

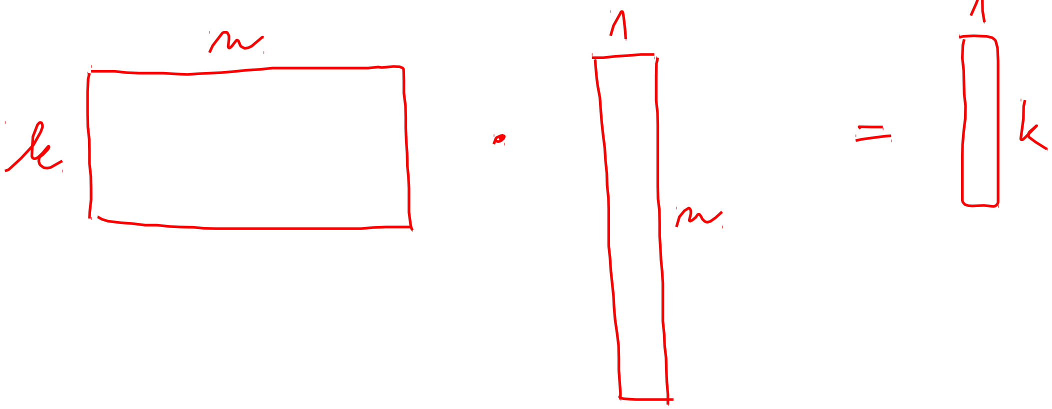
$$A \cdot x = b$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{k \times n} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$ matice tvaru $k \times 1$

7

X vzámene jako sloupeček $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

$$A \cdot x = b$$



1 rovnice
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b$$

<u>Definice:</u>
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \underset{df}{:=} a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

A matice $k \times n$, násobíme ji sloupcem velikosti n

To provádíme tak, že každý z k-řádků matice A násobíme sloupcem velikosti n:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 A \\ r_2 A \\ \vdots \\ r_k A \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 A \\ r_2 A \\ r_3 A \\ \vdots \\ r_k A \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} r_1 A \cdot X \\ r_2 A \cdot X \\ \vdots \\ r_k A \cdot X \end{pmatrix}$$

Výsledkem je sloupec velikosti k

$$A = (a_{ij}) \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$$

<u>Příklad</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 6 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + (-1)(-1) \\ (-2)\cdot 6 + 0\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5(-1) \end{pmatrix}$$

Násobení matic obecně je zobrazení

$$\cdot : \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{k\times p}(\mathbb{K})$$

$$k/n \quad \cdot \quad n/p \qquad = \quad k/p$$

$$(A\cdot B)_{ij} = r_i A \cdot s_j B$$

i-tý řádek A $\qquad$ j-tý sloupec matice B

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j} + \dots + A_{in} \cdot B_{nj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

<u>Příklad</u>

$$2 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{3} \cdot 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{4} = \begin{pmatrix} -17 & 36 & 14 & 38 \\ -6 & -2 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

<u>Násobení speciálními maticemi</u>

1) A matice $k \times n$, násobíme sloupcem $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} = SA_1$$

12

$$A \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\\vdots\\a_{k2}\end{pmatrix} = S_2 A$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = S_j \cdot A$$

1 na j-tém místě

Podobně to dopadne při násobení řádku a matice

$$\underbrace{(1\ 0 \dots 0)}_{n} \underset{n\times k}{A} = (a_{11}\ a_{12} \dots a_{1k}) = r_1 A$$

$$(0\ 1\ 0 \dots 0)\ A = (a_{21}\, a_{22} \dots a_{2k}) = r_2 A$$

$$(0, \dots 0, 1, \dots 0)\ A = (a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}) = r_i A$$

1 na i-tém místě

jednotková matice typu $n \times n$ ..... $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = E$

$$(E)_{ij} = \begin{matrix} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{matrix}$$

A matice $k \times n$

$$A \cdot E_n = \begin{pmatrix} s_1 A & s_2 A & & s_n A \end{pmatrix} = A$$

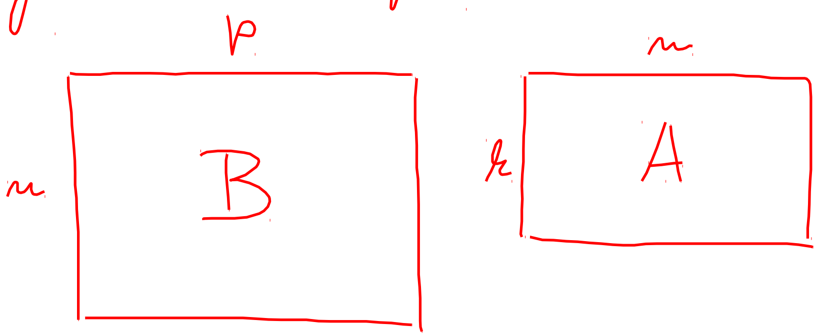
B matice $n \times p$

$$E_n \cdot B = \begin{pmatrix} r_1 B \\ r_2 B \\ \vdots \\ r_n B \end{pmatrix} = B$$

Násobení matic není komutativní

$A \cdot B$ je dobře definováno pro A typu $k \times n$ a B typu $n \times p$

Aby $B \cdot A$ bylo definováno, musí být



$p = k$

A je typu $k \times n$

B je typu $n \times k$

$A \cdot B$ je matice typu $k \times k$ $\qquad \frac{k}{n} \cdot \frac{n}{k} = \frac{k}{k}$

$B \cdot A$ je matice typu $n \times n$ $\qquad \frac{n}{k} \cdot \frac{k}{n} = \frac{n}{n}$

Otázku $A \cdot B = B \cdot A$ můžeme mluvit pouze pro $k = n$.

Tedy matice A i B jsou čtvercové o stejných rozměrech $n \times n$.

Ale ani v tomto případě není násobení matic komutativní.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&8\end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix}1&4\\3&16\end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&8\end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix}1&2\\6&16\end{pmatrix}$$

Obecně

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Početní vlastnosti násobení

1. Násobení je asociativní

$$\{(A\cdot B)\cdot C\}_{ij} = \sum_k (A\cdot B)_{ik} C_{kj} = \sum_k \left(\sum_l A_{il} B_{lk}\right) \cdot C_{kj}$$

$$= \sum_{k,l} A_{il} B_{lk} C_{kj}$$

2) Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání

$$\underset{k\times n}{A}\,(\underset{n\times p}{B}+\underset{n\times p}{C}) = A\cdot B + A\cdot C$$

3) Jednotková matice

$$\underset{k\times n}{A}\cdot E_n = A$$

$$E_k\cdot A = A$$

Čtvercová matice je matice typu $n \times n$.

Inversní matice ke čtvercové matici $n \times n$, kterou označíme A, je matice B typu $n \times n$ s vlastností

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n$$

Inversní matice k dané matici A nemusí existovat.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Po násobení jakoukoliv maticí B zprava dostaneme

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \neq E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokud má matice A inversní matici, je právě jedna.

Důkaz: Nechť matice A má dvě inverzní, B a C.

$$A \cdot B = B \cdot A = E \qquad A \cdot C = C \cdot A = E$$

$$B \cdot A = E \quad / \cdot C \text{ zprava}$$

$$(B \cdot A) \cdot C = E \cdot C$$

$$B \cdot (A \cdot C) = C$$

$$B \cdot E = C$$

$$B = C$$

Tuto inverzní matici k matici A značíme A^{-1}.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Transponovaná matice A^T k matici A typu $k \times n$ je matice typu $n \times k$ s hodnotami $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad (A^T)_{32} = A_{23}$$

$A \cdot A^T$ = matice typu $k \times k$

$k/n \quad n/k$

$A^T \cdot A$ = matice typu $n \times n$

$n/k \quad k/n$

Platí:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

A typu k/n, B typu n/p. AB je typu k/p, $(AB)^T$ typu p/k

B^T typu p/n, A^T typu n/k, $B^T \cdot A^T$ je typu p/k

Důkaz

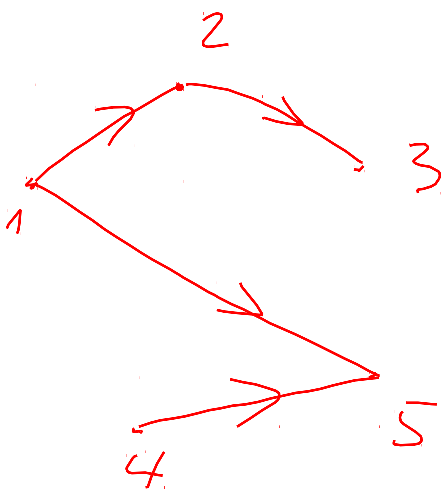
$$\left\{ (A \cdot B)^T \right\}_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki}$$

$$\left\{ B^T \cdot A^T \right\}_{ij} = \sum_k (B^T)_{ik} \cdot (A^T)_{kj} =$$

$$= \sum_k B_{ki} \cdot A_{jk} = \sum_k A_{jk} B_{ki} = \left\{ (A \cdot B)^T \right\}_{ij}$$

Násobení matic a orientované grafy

Orient. graf .... množina uzlů a množina orient. cest z jednoho uzlu do druhého uzlu



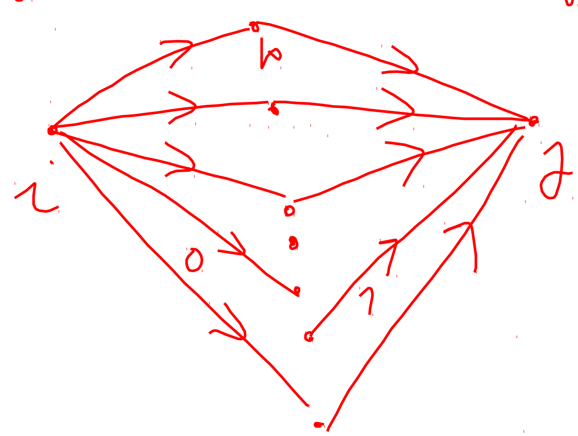
můžeme zapsat pomocí matice $A=(a_{ij})$

$a_{ij} = 1$ jestliže z i jde cesta do j

0 není-li tomu tak

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cesty z i do j délky 2 popisuje matice



$$AA = A^2$$

$a_{ip} = 1 \quad a_{pj} = 1$

22

$(A^2)_{ij} = \sum_p a_{ip} a_{pj}$ = počet cest délky 2 z i do j

$1 \cdot 1$ cesta vede z i do j přes p

$1 \cdot 0$ cesta nevede

$0 \cdot 1$ cesta nevede

$0 \cdot 0$ cesta nevede

$(A^3)_{ij}$ je počet cest délky 3 z i do j