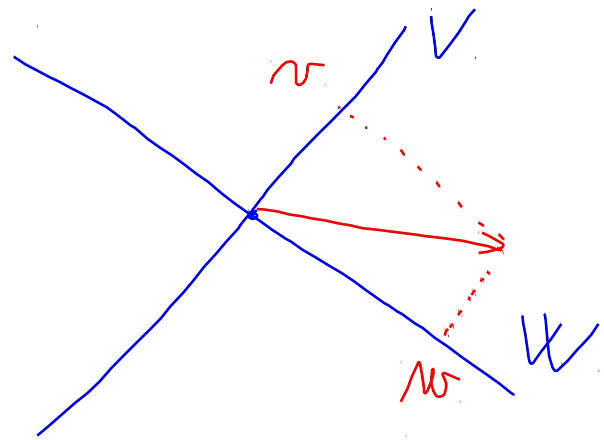
PRŮNIKY A SOUČTY PODPROSTORŮ

U vekt. prostor, $V, W \subseteq U$ jeho podprostory

$$V + W = \{ u \in U \mid \exists v \in V \ \exists w \in W : u = v + w \}$$

Součet vekt. podprostorů je vekt. prostor.



__Příklad__ $\quad U = \mathbb{R}^2$

$$V = \{ (x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$W = \{ (y, -y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R} \}$$

$$V + W = \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) = (a, a) + (b, -b)$$

$$\begin{aligned} x &= a + b \\ y &= a - b \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{x+y}{2}$$

$$V \cap W = \{ (0, 0) \} \qquad b = \frac{x-y}{2}$$

(2)

<u>Příklad</u> $U = \mathbb{R}^4$

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ,\ \sum_{i=1}^{4} x_i = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ (0, y_2, 0, y_4) \in \mathbb{R}^4 ,\ y_2, y_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V + W = \mathbb{R}^4$$

Místě $V + W \subseteq \mathbb{R}^4$. Dokážeme obrácenou inkluzi

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{(x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 - x_3)}_{\in V} + \underbrace{(0, 0, 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}_{\in W}$$

$$= \underbrace{(x_1, -x_1 - x_3 - x_4, x_3, x_4)}_{\in V} + \underbrace{(0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 0, 0)}_{\in W}$$

3

Spočítáme $V \cap W$:

$$V \cap W = \{(0, y_2, 0, y_4) \in \mathbb{R}^4 \;,\; y_2 + y_4 = 0\}$$
$$= \{(0, z, 0, -z) \in \mathbb{R}^4\} \neq \{(0,0,0,0)\}$$

$\dim V = 3$ báze $\underbrace{(1,-1,0,0)}_{v_1}$, $\underbrace{(1,0,-1,0)}_{v_2}$, $\underbrace{(1,0,0,-1)}_{v_3}$

Každý vektor $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in V$ vyjádříme jako lin. kombinaci těchto vektorů $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = z$

$$a_1 + a_2 + a_3 = z_1 \checkmark$$
$$-a_1 = z_2$$
$$-a_2 = z_3$$
$$-a_3 = z_4$$

$a_3 = -z_4$

$a_2 = -z_3$

$a_1 = -z_2$

$-z_2 - z_3 - z_4 = z_1$ platí

4

Stejně tak dokážeme, že

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Tedy v_1, v_2, v_3 jsou LN.

$\dim W = 2$ báze $\overset{w_1}{(0,1,0,0)}, \overset{w_2}{(0,0,0,1)}$

$(0, y_2, 0, y_4) = y_2 w_1 + y_4 w_2$

$\dim(V \cap W) = 1$ báze $(0,1,0,1)$

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$

$$\dim V + \dim W = \dim(\overset{\mathbb{R}^4}{\overset{\shortparallel}{V+W}}) + \dim(W \cap V)$$

$$3 + 2 = 4 + 1$$

Součet $V+W$ nazýváme ~~direktní~~ a označujeme $V \oplus W$, jestliže $V \cap W = \{\vec{o}\}$.

Lemma: Součet $V+W$ je direktní, právě tehdy když platí

(*) $\forall u \in V+W \ \exists! v \in V \ \exists! w \in W : u = v + w$.

Důkaz: $\Rightarrow$ nechť $V \cap W = \{\vec{o}\}$.

Nechť $u \in V+W$ $\quad u = v_1 + w_1 \quad v_1, v_2 \in V, \ w_1, w_2 \in W$

$\quad u = v_2 + w_2$

Odečteme $\quad v_1 - v_2 + w_1 - w_2 = \vec{o}$

$$V \ni v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in W$$

Tedy nebola $\quad v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V \cap W = \{\vec{o}\}$

Proto $\quad v_1 - v_2 = w_2 - w_1 = \vec{o} \Rightarrow v_1 = v_2$ a $w_1 = w_2$.

$\Leftarrow$ nechť platí $(*)$. Nechť $u \in V \cap W$.

$$u \in V, \quad u \in W, \quad -u \in W$$

$$\underset{\underset{V}{\cap}}{u} + \underset{\underset{W}{\cap}}{(-u)} = \vec{0}$$

$$\underset{\underset{V}{\cap}}{0} + \underset{\underset{W}{\cap}}{0} = \vec{0}$$

Z jednoznačnosti plyne

$$u = \vec{0}, \quad -u = \vec{0}$$

Tedy $V \cap W = \{\vec{0}\}$.

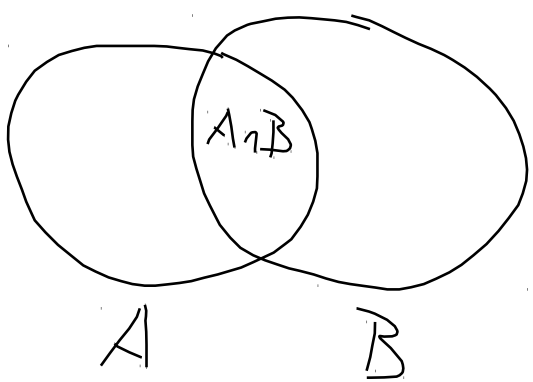
Věta: Nechť U je prostor konečné dimenze a V, W jeho podprostory. Potom platí

$$\dim V + \dim W = \dim(V+W) + \dim(V\cap W)$$

Analogie Pro konečné množiny A a B platí

$$|A| + |B| = |A\cup B| + |A\cap B|,$$

kde $|C|$ označuje počet prvků množiny C.



<u>Důkaz:</u> Máme podprostory

$$\begin{array}{ccccc} & \subseteq & V & \subseteq & \\ V\cap W & & & & V+W \\ & \subseteq & W & \subseteq & \end{array}$$

dimenze je počet prvků báze. Najdeme vhodné báze těchto 4 podprostorů. Začneme nejmenším.

Nechť $u_1, u_2, \dots, u_k$ je báze $V \cap W$ $\qquad \dim(V\cap W) = k$

Tyto vektory doplníme na bázi V

$u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_l$ ... báze V $\qquad \dim V = k + l$

Rovněž vektory báze $V \cap W$ doplníme na bázi prostoru W

$u_1, u_2, \dots, u_k, w_1, w_2, \dots, w_m$ ... báze W $\qquad \dim W = k + m$

9

Dokážeme-li, že pak báze $V+W$ je

$u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_m$

kde $\dim(V+W) = k+l+m$

a kde platí

$$\dim V + \dim W = \dim(V \cap W) + \dim(V+W)$$
$$(k+l) + (k+m) = k + (k+l+m)$$

Musíme dokázat, že $u_1 \dots u_k, v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_m$ je skutečně báze $V+W$

1 Vektory generují $V+W$

Typický vektor z $V+W$ je $v \in V,\ w \in W$

$$v + w = \underbrace{a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l}_{v} + \underbrace{c_1 u_1 + \dots + c_k u_k + d_1 w_1 + \dots + d_m w_m}_{w}$$

$$= (a_1 + c_1) u_1 + \dots (a_k + c_k) u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l + d_1 w_1 + \dots + d_m w_m$$

(2) Lin. nezávislost

nechť

(0) $$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l + \underbrace{c_1 w_1 + \dots + c_m w_m}_{} = \vec{0}$$

$$V \ni a_1 u_1 + \dots a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l = -c_1 w_1 - \dots - c_m w_m \in W$$

Tento vektor leží v průniku $V \cap W$, proto

$$V \cap W \ni -c_1 w_1 - \dots - c_m w_m = d_1 u_1 + \dots + d_k u_k$$

$$0 = d_1 u_1 + \dots + d_k u_k + c_1 w_1 + \dots + c_m w_m$$

Vektory $u_1 \dots u_k, w_1 \dots w_m$ tvoří bázi W, jsou tedy LN, musí být

$$a_1 = d_2 = \dots = c_1 = \dots = c_m = 0$$

Dosadíme do (0) $$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l = \vec{0}$$

Vektory $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l$ tvoří bázi V. Proto

$$a_1 = \dots = a_k = b_1 = \dots = b_l = 0$$

Dokázali jsme, že

$$a_1 = \dots = a_k = b_1 = \dots = b_l = c_1 = \dots = c_n = 0,$$

tedy vektory $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_n$ jsou lin. nezávislé.

Příklad, jak počítat součet podprostorů

$V = [v_1, v_2, \dots v_k]$ $\quad W = [w_1, w_2, \dots w_l]$

Potom $V + W = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 w_1 + \dots + b_l w_l \in U\}$

$$= [v_1, \dots, v_k, w_1, \dots w_l]$$

Bázi $V+W$ najdeme tak, že ze seznamu vektorů $v_1, v_2, \dots v_k, w_1, \dots, w_l$ vybereme lin. nezávislé se stejným lineárním obalem

Příklad, jak počítat průnik podprostorů

$V = [v_1, v_2, v_3] \qquad W = [w_1, w_2, w_3]$

$V \cap W = \{ z = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 \}$

Hledáme $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ tak, aby

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 - b_1 w_1 - b_2 w_2 - b_3 w_3 = \vec{0}$$

Tato rovnice vede na homogenní soustavu lin. rovnic o neznámých $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$: Najdeme obecné řešení. Tato soustava závisí na parametrech.

Nechť je řešení např.

$b_3 = p \qquad\qquad a_3 =$

$b_2 = q \qquad\qquad a_2 =$

$b_1 = 3p - 2q \qquad a_1 =$

jak z tohoto řešení dostaneme $V \cap W$

$$V \cap W = \{ z = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 \text{, kde } b_1, b_2, b_3 \text{ je řešení naší soustavy} \}$$

$$= \{ (3p - 2q) w_1 + q w_2 + p w_3 \} =$$

$$= \{ p(3w_1 + w_3) + q(-2w_1 + w_2) \}$$

$$= [3w_1 + w_3, -2w_1 + w_2]$$

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Nechť U a V jsou vekt. prostory nad $\mathbb{K}$. Zobrazení

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

se nazývá **lineární** (lineární homomorfismus), jestliže platí

(1) $\forall u_1, u_2 \in U \qquad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$

(2) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in U \qquad \varphi(au) = a\,\varphi(u)$

Tyto dvě podmínky můžeme zapsat podmínkou jedinou:

(*) $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{K} \quad \forall u_1, u_2 \in U \qquad \varphi(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2)$

Speciálně platí $\quad \varphi(\vec{o}) = \varphi(0 \cdot u) = 0 \cdot \varphi(u) = \vec{o}$

Příklady:

① $U = V = \mathbb{R}$ $\varphi(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$ pevně zvolená

$$\varphi(x_1+x_2) = c(x_1+x_2) = cx_1 + cx_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$
$$\varphi(ax) = c(ax) = a(cx) = a\varphi(x)$$

φ je lineární

② $U = V = \mathbb{R}$ $\varphi(x) = cx + d$, $d \neq 0$

Toto zobrazení (ač na střední škole nazýváno lineární funkce) není podle naší definice lineární.

$$\varphi(x_1+x_2) = c(x_1+x_2) + d = cx_1 + cx_2 + d$$
$$\neq$$
$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = cx_1 + d + cx_2 + d = c_1x_1 + cx_2 + 2d$$
$$\varphi(ax) = cax + d \quad \neq$$
$$a\varphi(x) = a(cx+d) = cax + ad$$

$a \neq 1$

$$\varphi(0) = d \neq 0$$

3 Velmi důležitý !

$U = \mathbb{K}^n$, $V = \mathbb{K}^k$, $A \in Mat_{k \times n}(\mathbb{K})$

$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$

$\varphi(x) = Ax$ $\qquad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$x, y \in \mathbb{K}^n$

$\varphi(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \varphi(x) + \varphi(y)$

$\varphi(ax) = A(ax) = a(Ax) = a\,\varphi(x)$

4 Súradnice v danej bázi

U s bázou $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$, $V = \mathbb{K}^n$

$(\ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$u \longmapsto (u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ kde $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

Minule

$(u+v)_\alpha = (u)_\alpha + (v)_\alpha$

$(au)_\alpha = a(u)_\alpha$

ide o lin. zobrazenie

5 $U = \mathbb{R}^M = \{f : M \to \mathbb{R}\}$

$V = \mathbb{R}$ nechť $m_0 \in M$ je pevný prvek.

$\varphi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$

$\varphi(f) = f(m_0)$ jde o lin. zobrazení

$\varphi(f+g) = (f+g)(m_0) = f(m_0) + g(m_0) = \varphi(f) + \varphi(g)$

6 Derivace

$U = \{$ diferencovatelné funkce na intervalu $I\}$

$V = \{$ funkce na intervalu $I\}$

$\varphi : U \to V \qquad \varphi(f) = f'$

$\varphi(f+g) = (f+g)' = f' + g' = \varphi(f) + \varphi(g)$

$\varphi(af) = (af)' = af' = a\varphi(f)$

7 $U = C[a,b]$ spojité funkce na $[a,b]$

$V = \mathbb{R}$

$\varphi : C[a,b] \to \mathbb{R} \qquad \varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

jde o lin. zobrazení

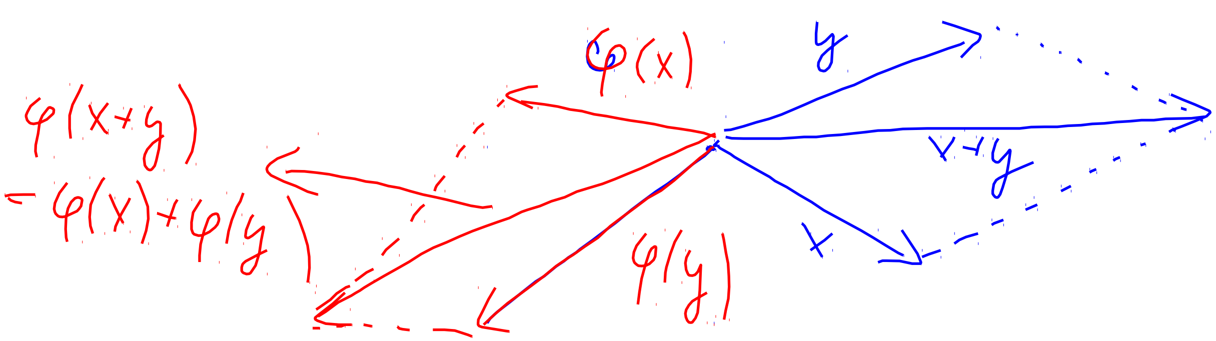
$$\varphi(f+g) = \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \varphi(f)+\varphi(g)$$

analogicky pro násobek

8 Geometrická zobrazení ze střední školy

- $U = V = \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je otočení kolem počátku o úhel α

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$



Věta: Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$, kde U je prostor konečné dimenze je jednoznačně určeno svými hodnotami na nějaké bázi prostoru U.

Důkaz: Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_n$ je báze U.
Nechť $u \in U$ je libovolný. Pak

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$$ pro jedinou n-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Pro $\varphi(u)$ platí

$$\varphi(u) = \varphi(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n) = \varphi(a_1 u_1) + \varphi(a_2 u_2) + \cdots + \varphi(a_n u_n)$$
$$= a_1 \varphi(u_1) + \cdots + a_n \varphi(u_n)$$

Tedy $\varphi(u)$ je jednoznačně určeno hodnotami φ na vektorech báze.

<u>Příklad</u>: Každé lin. zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je tvaru

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

pro nějaké a_1, a_2, a_3.

$$\varphi(e_1) = a_1 \qquad \varphi(e_2) = a_2 \qquad \varphi(e_3) = a_3$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) + x_3 \varphi(e_3)$$

$$= x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

<u>Analogicky lze dokázat:</u>

Každé lin. zobrazení $\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ je tvaru

$\varphi(x) = Ax$ pro nějakou matici A typu $k \times n$

a $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Dzięki tej uwadze na końcu, że A dostaniemy jako

$$A = \big(s_1(A),\ s_2(A), \dots s_n(A)\big), \quad \text{gdzie} \quad \begin{aligned} s_1(A) &= \varphi(e_1) \in \mathbb{K}^k \\ s_i(A) &= \varphi(e_i) \in \mathbb{K}^k \end{aligned}$$