LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

U, V vekt. prostory

$\varphi : U \to V$ je lineární, jestliže

$\forall u_1, u_2 \in U : \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$

$\forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in U : \varphi(au) = a\,\varphi(u)$

Z definice plyne:

$$\varphi(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2)$$

$$\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$$

Nejdůležitější příklad

A je matice $k \times n$ nad $\mathbb{K}$, pak zobrazení

$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k \qquad \varphi(x) = Ax \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

je lineární

Matice určuje lin. zobrazení

<u>Označení:</u> Je-li $\varphi : U \to V$ lineární a máme zadány báze $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ v U a B ve V, pak tyto údaje určují matici zobrazení φ. Značíme ji $(\varphi)_{B,\alpha}$

její definice je

$$(\varphi)_{B,\alpha} = \Big((\varphi(u_1))_B \; (\varphi(u_2))_B \; \dots \; (\varphi(u_n))_B \Big) = A$$

kde $(\varphi(u_i))_B$ jsou souřadnice vektoru $\varphi(u_i)$ ve V v bázi B zapsané do sloupce.

Základní vlastnost takové matice je

$$\forall u \in U: \quad (\varphi(u))_B = (\varphi)_{B,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^k \end{tikzcd}$$

n

$x \longmapsto Ax$

$$A = (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi

U vekt. prostor, $\alpha = (u_1, \dots u_n)$, $\beta = (v_1, \dots v_n)$ dvě báze v U.

Můžeme vyjádřit vektory báze α pomocí vektorů báze β

$$\textcircled{4}$$

$$u_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{n1} v_n = (v_1\ v_2 \dots v_n) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

souřadnice vektoru u_1 v bázi β

$$u_2 = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{n2} v_n = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$u_n = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \dots + a_{nn} v_n = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dohromady:

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Matice přechodu mezi bázemi } \alpha \text{ a } \beta}$$

Značení $(id)_{\beta,\alpha}$

$$(id)_{\beta,\alpha} = \left((u_1)_\beta\ (u_2)_\beta \dots (u_n)_\beta \right) = \left((id(u_1))_\beta\ (id(u_2))_\beta \dots (id(u_n))_\beta \right)$$

$id: U \to U$
$id(u) = u$

Toto je matice zobrazení identita v bázích α a β.

Proto značení $(id)_{\beta,\alpha}$.

Stejně jako na zobrazení dokážeme vztah

$$\forall u \in U \qquad \underset{\parallel}{(u)_\beta} = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

$$(id(u))_\beta = (id)_{\beta,\alpha}\, (u)_\alpha$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "id"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & U \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto (id)_{\beta,\alpha} \cdot x$$

Příklad $\mathbb{R}^3$

$\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$ stand. báze $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$

$$\alpha = \left(\underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}} \right)$$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \left((u_1)_\varepsilon, (u_2)_\varepsilon, (u_3)_\varepsilon \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(6)

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \left((e_1)_\alpha, (e_2)_\alpha, (e_3)_\alpha \right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_1 = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + a_{31} u_3$ řešení této rovnice je $\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}$

$e_2 = a_{12} \cancel{u} u_1 + a_{22} u_2 + a_{32} u_3$ řešení je $\begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}$

$e_3 = a_{13} u_1 + a_{23} u_2 + a_{33} u_3$ řešení je $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Násobení s maticemi zobrazení a přechodu

<u>Věta:</u> Nechť $\varphi: U \to V$ a $\psi: V \to W$ jsou lineární a α, β, γ jsou souřadné báze U, V a W. Potom platí

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

7

Důkaz:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
u \in U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\ )_\beta"] & W \arrow[d, "(\ )_\gamma"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "x \,\mapsto\, (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot x"'] & \mathbb{K}^k \arrow[r, "y \,\mapsto\, (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot y"'] & \mathbb{K}^s
\end{tikzcd}$$

Červená i zelená cesta dají stejný výsledek.

Výsledek červené cesty je $\big((\psi \circ \varphi)(u)\big)_\gamma = \underline{(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha}} \cdot (u)_\alpha$

$$\Vert$$

Výsledek zelené cesty je $(\psi)_{\gamma,\beta} \cdot \big((\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha\big) = \underline{\big((\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}\big)} \cdot (u)_\alpha$

Věta: 1) Nechť U je vekt. prostor s bází α a $id: U \to U$ identické zobrazení. Pak

$$(id)_{\alpha,\alpha} = E.$$

2) Nechť $\varphi: U \to V$ je lineární izomorfismus, α báze v U, β báze ve V. Pak matice inverzního zobrazení $\varphi^{-1}: V \to U$ je

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha}\right)^{-1}$$

9

<u>Důkaz</u>: 1 $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$$(id)_{\alpha,\alpha} = \left((u_1)_\alpha \; (u_2)_\alpha \; \dots \; (u_n)_\alpha \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

2 Udělejme podle předchozí věty:

$$E = (id_V)_{\beta,\beta} = (\varphi \circ \varphi^{-1})_{\beta,\beta} \underset{\text{předch. věta}}{=} (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (\varphi^{-1})_{\alpha,\beta}$$

$$E = (id_U)_{\alpha,\alpha} = (\varphi^{-1} \circ \varphi)_{\alpha,\alpha} = (\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

$$\Longrightarrow \quad (\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha} \right)^{-1}.$$

Příklad: na značení 2

$\mathbb{R}^3 \qquad \varepsilon = (e_1, e_2, e_3), \quad \alpha = (u_1, u_2, u_3) \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$ je jednoduché napsat

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \left((id^{-1})_{\varepsilon,\alpha}\right)^{-1} = \left((id)_{\varepsilon,\alpha}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

id je inverze k id

$$(u)_\alpha = (id)_{\alpha,\varepsilon} (u)_\varepsilon \qquad \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Touto maticí přechodu převádíme na vyjádření souřadnic v bázi α pomocí souřadnic v bázi ε.

Věta Matice zobrazení v různých bazích

Nechť U je vekt. prostor s bázemi α a $\bar{\alpha}$, V vekt. prostor s bázemi β, $\bar{\beta}$ a $\varphi : U \to V$ lineární. Potom platí:

$$(\varphi)_{\bar{\beta},\bar{\alpha}} = (id)_{\bar{\beta},\beta}\,(\varphi)_{\beta,\alpha}\,(id)_{\alpha,\bar{\alpha}}$$

Důkaz pomocí věty o matici složeného zobrazení

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "id_U"] \arrow[d, "(\ )_{\bar{\alpha}}"'] & U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_{\alpha}"] & V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "(\ )_{\beta}"] & V \arrow[d, "(\ )_{\bar{\beta}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^k \arrow[r] & \mathbb{K}^k
\end{tikzcd}$$

Platí, že $\varphi = id_V \circ \varphi \circ id_U$

$$(\varphi)_{\bar\beta,\bar\alpha} = (id_V \circ \varphi \circ id_U)_{\bar\beta,\bar\alpha} \overset{\text{věta o skl. zobrazení}}{=}$$

$$= (id_V)_{\bar\beta,\beta} \cdot (\varphi \circ id_U)_{\beta,\bar\alpha} \overset{\text{věta o skl. zob.}}{=}$$

$$= (id_V)_{\bar\beta,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (id_U)_{\alpha,\bar\alpha}$$

Grupy, permutace a determinanty

Grupa je neprázdná množina s operací
$$\circ : G \times G \longrightarrow G,$$
která splňuje následující:

(1) násobení je asociativní
$$\forall a,b,c \in G \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(2) existence neutrálního prvku
$$\exists e \in G \ \forall a \in G: \quad e \cdot a = a \cdot e = a$$

(3) existence inverzního prvku
$$\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G: \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

Příklad $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se standardním násobením tvoří grupu. V této grupě platí navíc

$$a \cdot b = b \cdot a$$

je komutativní grupou (abelovskou grupou).

Příklad Matice $n \times n$ nad tělesem $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, které mají inverzní matici s operací násobení matic:

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{ A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K}),\ \text{existuje } A^{-1} \}$$

general linear
obecná lineární grupa

Násobení matic je asociativní,
E je neutrální prvek,
z definice ke každé $A \in GL(n, \mathbb{K})$ existuje inverzní

Příklad Množina permutací n prvkové množiny $\{1, 2, \dots n\}$.

Permutace bude pro nás bijekce $\{1, 2, \dots n\} \to \{1, 2, \dots n\}$

Operace mezi permutacemi je skládání zobrazení.

x	1	2	3	4
$\pi(x)$	4	3	1	2

$\pi : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$

y	1	2	3	4
$\sigma(y)$	3	2	1	4

x	1	2	3	4
$\sigma \circ \pi(x)$	4	1	3	2

Neutrální prvek je identická permutace

x	1	2	3	4
$id(x)$	1	2	3	4

Inverzní permutace

x	1	2	3	4
$\pi(x)$	4	3	1	2

y	1	2	3	4
$\pi^{-1}(y)$	3	4	2	1

Homomorfismus grup

Nechť G a H jsou dvě grupy. Zobrazení $f: G \to H$ se nazývá homomorfismus grup, jestliže platí

$$a, b \in G: \quad f(a \circ_G b) = f(a) \circ_H f(b)$$

<u>Příklad</u> Nechť U a V jsou vektorové prostory a $\varphi : U \to V$ lineární zobrazení. Potom $(U, +)$ a $(V, +)$ jsou komutativní grupy a pro φ platí

$$\varphi(u_1 +_U u_2) = \varphi(u_1) +_V \varphi(u_2)$$

Tedy φ je homomorfismus grup

Znaménko permutace

Každé permutaci n prvkové množiny přiřadíme čísla 1 nebo -1 tak, aby toto přiřazení bylo homomorfismus grup $(S_n, \circ) \longrightarrow (\{1, -1\}, \cdot)$

Množina $\{1,-1\}$ s násobením je grupa.

Množinu permutací n-prvkové množiny značíme S_n a operaci skládání značíme $\circ$. Výše uvedené zobrazení nazýváme znaménko permutace a značíme

$$\operatorname{sign} : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{-1,1\}, \cdot)$$

Definice: Nechť $\sigma \in S_n$, tj. $\sigma : \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$ je bijekce.

$$\operatorname{sign}\sigma = \prod_{n \geq i > j \geq 1} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$$

Součin $\prod$ bereme přes všechny dvojice (i,j) splňující podmínku dole.

Příklad

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sign} \sigma = \frac{2-3}{3-1} \cdot \frac{2-1}{3-2} \cdot \frac{1-3}{2-1} \in \{1, -1\}$$

$$= 1$$

Znaménko permutace je vždy 1 nebo -1.

Věta: Pro $\sigma, \pi \in S_n$ platí

$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \pi) = \operatorname{sign} \sigma \cdot \operatorname{sign} \pi$$

Věta říká, že zobrazení $\operatorname{sign}: S_n \longrightarrow (\{1, -1\}, \cdot)$ je homomorfismus grup.

20

Dk:

$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \pi) = \prod_{n \ge i > j \ge 1} \frac{\sigma(\pi(i)) - \sigma(\pi(j))}{i - j} =$$

$$= \prod_{n \ge i > j \ge 1} \frac{\sigma(\pi(i)) - \sigma(\pi(j))}{\pi(i) - \pi(j)} \, \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j} =$$

$$= \underbrace{\prod_{\{k,l\}} \frac{\sigma(k) - \sigma(l)}{k - l}}_{\text{tento výraz je z lemma } \operatorname{sign}\sigma} \cdot \underbrace{\prod_{n \ge i > j \ge 1} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}}_{\operatorname{sign}\pi} = \operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{sign}\pi$$

$\{k,l\}$ cez 2-prvkové podmnožiny $\{1,2 \dots n\}$