

A. Písemka z lineární algebry I, leden 2005 – početní část*Max. počet bodů 12*

1. Najděte všechny dvojice parametrů $a, b \in \mathbb{R}$, pro které je množina řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x + y + az &= 1 \\x + ay + 2z &= 1 \\x + y + 3z &= b\end{aligned}$$

o neznámých $x, y, z \in \mathbb{R}$ (a) prázdná, (b) nekonečná. V druhém případě soustavu vyřešte. (3 body)

2. Vypočtěte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$ tvaru 2005×2005 . (3 body)

3. V \mathbb{R}^4 jsou dány podprostory U a V . Najděte bázi $U \cap V$ a bázi $U + V$, jestliže

$$U = [(1, 1, 0, -1)^T, (0, 1, 1, -2)^T], \quad V = [(0, 1, -1, 1), (1, 3, 0, -2)].$$

Výpočet doprovodte slovním komentářem. (3 body)

4. $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení takové, že $\varphi(1, 1, 0, 0)^T = (1, -1, 1)^T$, $\varphi(0, 1, 1, 0)^T = (1, 1, 1)^T$, $\varphi(1, 0, 0, 1)^T = (2, 4, 2)^T$, $\varphi(0, 0, 1, 0)^T = (0, 3, 0)^T$. Najděte hodnoty zobrazení φ na vektorech standardní báze e_1, e_2, e_3, e_4 . Najděte bázi $\text{Ker } \varphi$ a bázi $\text{Im } \varphi$. Výpočet doprovodte slovním komentářem. (3 body)

Teoretická část*Max. počet bodů 10*

- Napište definici součtu $U + V$ dvou podprostorů ve vektorovém prostoru W . (1 bod)
- Napište jeden axiom vektorového prostoru, který není splněn pro množinu $V = \mathbb{R}$, pole \mathbb{R} , součet $x \oplus y = x + y$ a násobení skalárem $a \odot x = a^{-1}x$. Ukažte, proč není splněn. (1 bod)
- Napište přesnou formulaci věty, která dává do souvislosti hodnotu matice a řešitelnost soustavy $Ax = b$. (1 bod)
- \mathbb{C}^2 je vektorový prostor nad \mathbb{R} . Napište nějakou jeho bázi, která obsahuje vektor $(1 + i, i)$. (1 bod)
- V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polynomů stupně nejvýše 3 s reálnými koeficienty napište souřadnice polynomu $x^2 + x + 1$ v bázi $\alpha = (x^2 + x^3, x^3 + x, 1, x^2 + 1)$. (1 bod)
- Podle definice najděte matici přechodu $(\text{id})_{\beta, \alpha}$ od báze $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ k bázi $\beta = (v_1 + v_2, v_2, v_1 + v_2 + v_3)$. (1 bod)
- Napište matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $\varphi(p) = (x^2 + 1)p'(x)$ v bázích $\alpha = (1, x, x^2)$ a $\beta = (1, x, x^2, x^3)$. (p' je derivace polynomu p .) (1 bod)
- Nechť $\varphi : U \rightarrow V$ je lineární. Jestliže, $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k)$ jsou lineárně nezávislé ve V , pak u_1, u_2, \dots, u_k jsou lineárně nezávislé v U . Dokažte. (1 bod)
- Udejte příklad lineárního zobrazení z $\mathbb{R}_{2005}[x]$ do $\mathbb{R}_{1005}[x]$, jehož jádro má dimenzi 2000. Napište bázi jádra. (1 bod)
- Předpisem $\varphi(ax^2 + bx + c) = \dots$ definujte nějaký lineární izomorfismus z $\mathbb{R}_2[x]$ do \mathbb{R}^3 s vlastností $\varphi(x^2 + 2x + 1) = (1, 2, 3)$. (1 bod)