Domácí úkoly ke cvičení č. 9

1. Nechť zobrazení $\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je lineárním zobrazením vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, které je zadáno předpisem: pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, je $\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, kde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ se vypočte podle formule

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Najděte matici lineárního zobrazení η v bázích $\gamma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ a $\delta = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (1, 3, 1), \\ \mathbf{f}_2 &= (2, 5, 1), \\ \mathbf{f}_3 &= (3, -7, 1), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (1, -1, 2, 1), \\ \mathbf{g}_2 &= (0, 1, -1, 2), \\ \mathbf{g}_3 &= (0, 0, 1, -1), \\ \mathbf{g}_4 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

2. V obou následujících případech najděte ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$ matici přechodu od báze $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5)$ k bázi $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$ tohoto vektorového prostoru.

a) $$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (1, 0, 0, 0, 1), \\ \mathbf{u}_2 &= (1, 1, 0, 0, 0), \\ \mathbf{u}_3 &= (0, 1, 1, 0, 0), \\ \mathbf{u}_4 &= (0, 0, 1, 1, 0), \\ \mathbf{u}_5 &= (0, 0, 0, 1, 1), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1, 1, 2, 2, 2), \\ \mathbf{v}_2 &= (2, 1, 1, 2, 2) \\ \mathbf{v}_3 &= (2, 2, 1, 1, 2), \\ \mathbf{v}_4 &= (2, 2, 2, 1, 1), \\ \mathbf{v}_5 &= (1, 2, 2, 2, 1), \end{aligned}$$

b) $\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 1, 1, -1)$, $\mathbf{v}_1 = (2, 2, -1, -1, -1)$,
$\mathbf{u}_2 = (-1, -1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 2, -1, -1)$,
$\mathbf{u}_3 = (1, -1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, -1, 2, 2, -1)$,
$\mathbf{u}_4 = (1, 1, -1, -1, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (-1, -1, -1, 2, 2)$,
$\mathbf{u}_5 = (1, 1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{v}_5 = (2, -1, -1, -1, 2)$.

3. Nechť zobrazení $\xi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ je lineárním zobrazením vektorového prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, které je na vektorech báze $\chi = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{h}_4, \mathbf{h}_5)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$, kde

$$\mathbf{h}_1 = (1, 1, -1, 2, -1),\ \mathbf{h}_2 = (-1, 1, 1, -1, 2),\ \mathbf{h}_3 = (2, -1, 1, 1, -1),\ \mathbf{h}_4 = (-1, 2, -1, 1, 1),\ \mathbf{h}_5 = (1, -1, 2, -1, 1),$$

zadáno obrazy těchto vektorů

$$\xi(\mathbf{h}_1) = (1, 1, 1, 1),\ \xi(\mathbf{h}_2) = (1, 1, 2, 3),\ \xi(\mathbf{h}_3) = (1, 2, 3, 5),\ \xi(\mathbf{h}_4) = (2, 3, 3, 4),\ \xi(\mathbf{h}_5) = (3, 3, 5, 7).$$

Pomocí matice přechodu od báze χ ke standardní bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$ najděte matici B typu 4/5 nad $\mathbb{R}$ takovou, aby pro libovolný vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ a pro jeho obraz $\xi((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \in \mathbb{R}^4$, $\xi((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ platilo

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$