

Na cvičeniach sme pomocou Weierstrassovho kritéria ukázali, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

má za obor (bodovej) konvergenzie otvorený interval $(1, \infty)$, pričom na každom *konečnom a uzavretom* intervale $\mathcal{I} \subset (1, \infty)$ konverguje dokonca rovnomerne. Priamo z definície teraz dokážeme, že rad (1) na celom svojom obore konvergenzie $(1, \infty)$ nekonverguje rovnomerne. Ukážeme to sporom. Predpokladajme, že rad (1) konverguje rovnomerne na $(1, \infty)$. To znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $N \in \mathbb{N}$ tak, že pre každý index $n \geq N$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť

$$\left| \frac{1}{(n+1)^x} + \frac{1}{(n+2)^x} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^x} \right| < \varepsilon \quad \text{pre každé } x \in (1, \infty).$$

Nakoľko členy radu (1) sú kladné, nemusíme písať absolútnu hodnotu, t.j.,

$$\frac{1}{(n+1)^x} + \frac{1}{(n+2)^x} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^x} < \varepsilon \quad \text{pre každé } x \in (1, \infty).$$

Každý člen na ľavej strane poslednej nerovnosti je pre každé dané n, m a $x \in (1, \infty)$ väčší alebo rovný než zlomok $\frac{1}{(n+m)^x}$. Preto platí

$$\underbrace{\frac{1}{(n+m)^x} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^x}}_{m \text{ členov}} \leq \frac{1}{(n+1)^x} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^x} < \varepsilon$$

↓

$$\frac{m}{(n+m)^x} < \varepsilon \quad \text{pre každé } x \in (1, \infty).$$

Zvoľme $\varepsilon := 1/3$ a pre každé dané $n \geq N$ položme $m := n$. Platí teda

$$\frac{n}{(n+n)^x} = \frac{n}{(2n)^x} < \frac{1}{3} \quad \text{pre každé } n \geq N \text{ a každé } x \in (1, \infty). \quad (2)$$

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ zrejme číslo $1 + \frac{1}{n} \in (1, \infty)$. Zvoľme preto pre každé dané $n \geq N$ hodnotu $x := 1 + \frac{1}{n}$. Potom podľa (2) máme

$$\frac{n}{(2n)^{1+\frac{1}{n}}} < \frac{1}{3} \quad \iff \quad \frac{1}{2^{1+\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}}} < \frac{1}{3} \quad \text{pre každé } n \geq N.$$

Limitovaním poslednej rovnosti pre $n \rightarrow \infty$ dostávame

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{1+\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}}} < \frac{1}{3}$$

↓

$$\frac{1}{2^{1+0} \cdot 1} < \frac{1}{3} \iff \frac{1}{2} < \frac{1}{3} \dots \text{spor!!!}$$

To znamená, že rad (1) nemôže konvergovať rovnomerne na celom otvorenom intervale $(1, \infty)$. Všimnime si, že v prípade uzavretého intervalu typu $[a, \infty)$ pre *dané* $a > 1$ nenastáva žiadny problém, pretože hodnota $x = 1 + \frac{1}{n}$ patrí do $[a, \infty)$ iba pre *konečne veľa* indexov n , avšak nie pre *všetky* $n \in \mathbb{N}$.