

Príklady na precvičovanie – krivkové integrály, Greenova integrálna veta

Riešené príklady

Príklad 1

Vypočítajme krivkový integrál prvého druhu

$$I = \int_{\varphi} \sin 2x \, ds,$$

kde trajektória krivky φ je časť grafu funkcie $y = \cos x$ pre $x \in [0, \pi/2]$.

Riešenie:

Štandardný postup je nasledujúci. Najprv vhodne parametrizujeme danú krivku φ . V prípade, keď sa jedná o rovinnú krivku, ktorej trajektória splýva s časťou grafu nejakej funkcie jednej reálnej premennej x , najpriamočiarejšie je zvoliť za parameter t samotné x . V našom príklade má parametrizácia krivky φ teda tvar

$$x = t, \quad y = \cos t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Predložený krivkový integrál potom prepíšeme na bežný určitý integrál s integračnou premennou t . Za tým účelom je nutné vyjadriť deriváciu krivky φ podľa parametra t . Keďže vektor $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, \pi/2]$, máme

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, -\sin t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(v krajných bodoch daného intervalu uvažujeme príslušné jednostranné derivácie funkcií $x(t)$ a $y(t)$). Pre absolútnu hodnotu vektora $\varphi'(t)$ potom platí

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{1 + \sin^2 t}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Pre krivkový integrál v zadaní príkladu potom dostávame

$$I = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin 2t}_{\sin 2x} \cdot \underbrace{\|\varphi'(t)\|}_{ds} dt = \int_0^{\pi/2} \sin 2t \cdot \sqrt{1 + \sin^2 t} dt.$$

Posledný určitý integrál môžeme vypočítať napríklad použitím substitúcie $u = 1 + \sin^2 t$. Potom

$$du = 2 \sin t \cos t dt = \sin 2t dt$$

a nové integračné medze sú od 1 do 2. Po dosadení pre hodnotu I máme

$$I = \int_1^2 \sqrt{u} du = \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{u^3} \right]_1^2 = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{8} - 1).$$

Príklad 2

Stanovme krivkový integrál prvého druhu

$$I = \int_{\varphi} (x^2 + y^2 + z^2) ds,$$

kde φ je časť skrutkovice s parametrickým vyjadrením

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad t \in [0, 2\pi],$$

kde a, b sú kladné konštanty.

Riešenie:

V tomto prípade integrujeme funkciu troch premenných po priestorovej krivke, postupujeme však podobne ako v predchádzajúcom príklade :). Danú krivku už máme parametrizovanú. Vypočítame absolútnu hodnotu vektora $\varphi'(t)$ jej prvej derivácie. Postupne dostávame

$$x' = -a \sin t, \quad y' = a \cos t, \quad z' = b$$

↓

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(samy overte :)). Pre krivkový integrál v zadaní príkladu potom máme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} ([a \cos t]^2 + [a \sin t]^2 + [bt]^2) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(a^2 + \frac{4}{3} \cdot \pi^2 b^2 \right). \end{aligned}$$

Príklad 3

Pre dané $a > 0$ určme dĺžku časti tzv. *reťazovky*, ktorá je grafom funkcie

$$y = a \cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad x \in [-2, 2].$$

Riešenie:

Jednou zo základných geometrických aplikácií krivkového integrálu prvého druhu je práve výpočet dĺžky trajektórie krivky. Konkrétne, ak φ je po častiach hladká krivka definovaná na intervale $[a, b]$, potom pre jej dĺžku platí

$$L = \int_{\varphi} ds.$$

V našom prípade najprv vykonáme parametrizáciu danej krivky

$$x = t, \quad y = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}} \right), \quad t \in [-2, 2].$$

Ďalej stanovíme jej prvú deriváciu

$$x' = 1, \quad y' = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}} \right), \quad t \in [-2, 2].$$

Pre hľadajú dĺžku krivky potom podľa vzorca vyššie máme

$$L = \int_{-2}^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}} \right) dt$$

(samy overte detaily výpočtu ;)). Elementárnou integráciou napokon pre hodnotu L dostaneme výraz

$$L = \left[\frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}} \right) \right]_{-2}^2 = a \cdot \left(e^{\frac{2}{a}} - e^{-\frac{2}{a}} \right) = 2a \cdot \sinh \frac{2}{a}.$$

Príklad 4

Vypočítajme obsah prednej steny klinu, ktorý vznikol z trojbokého hranola ohraničeného rovinami

$$x + y = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

odsekom plochou $z = 4 - y^2$.

Riešenie:

Toto je ďalšia typická geometrická aplikácia krivkového integrálu prvého druhu. Nech φ je po častiach hladká krivka, ktorej trajektória leží v rovine xy a nech $z = f(x, y)$ je nejaká spojitá funkcia dvoch premenných definovaná na krivke φ . Potom pre obsah valcovej plochy kolmej na rovinu xy , ktorej základňou je trajektória krivky φ a ktorá je zhora ohraničená grafom funkcie $z = f(x, y)$, platí vzorec

$$S = \int_{\varphi} f(x, y) \, ds.$$

V našom prípade po nakreslení vhodného obrázka zistíme, že daná krivka φ je úsečka

$$x + y = 2, \quad x \in [0, 2],$$

a pre danú funkciu $f(x, y)$ platí $f(x, y) = 4 - y^2$ (samý si premyslite :)). Pre hľadaný obsah S potom platí

$$S = \int_{\varphi} (4 - y^2) \, ds.$$

Ďalej už postupujeme štandardným spôsobom ako v predchádzajúcich príkladoch :). Krivka φ má napríklad parametrizáciu

$$x = t, \quad y = 2 - t, \quad t \in [0, 2].$$

Pre vektor jej derivácie potom platí

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, -1) \implies \|\varphi'(t)\| = \sqrt{2}, \quad t \in [0, 2].$$

Pre hodnotu S potom dostávame (samý overte detaily vypočtu :))

$$S = \int_0^2 [4 - (2 - t)^2] \cdot \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} \cdot \left[4t + \frac{(2 - t)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

Príklad 5

Vypočítajme krivkový integrál druhého druhu

$$I = \int_{\varphi} f(x, y) \cdot dr,$$

kde φ je časť paraboly $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$, orientovaná v smere rastu premennej x , a vektorová funkcia $f(x, y)$ má tvar

$$f(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy).$$

Riešenie:

Krivkové integrály druhého druhu počítame podobne ako krivkové integrály prvého druhu – opäť parametrizujeme danú krivku a zostavíme určitý Riemannov integrál. V tomto prípade však vo výpočte musíme zohľadniť jednak dopredu danú *orientáciu* krivky, a jednak, či si táto orientácia rozumie s nami zvolenou parametrizáciou krivky. V našom prípade máme integrovať po oblúku paraboly $y = x^2$, ktorý spája body $[-1, 1]$ a $[1, 1]$, pričom postupujeme v smere od bodu $[-1, 1]$ do bodu $[1, 1]$ (samy si premyslite :)). Uvažujme takúto parametrizáciu krivky φ

$$x = t, \quad y = t^2, \quad t \in [-1, 1].$$

↓

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, 2t)$$

Pri prirodzenom pohybe parametra t vo svojom intervale $[-1, 1]$, t.j., od hodnoty -1 do hodnoty 1 , nám potom budú postupne jednotlivé body na parabole naskakovať práve v súlade s jej predpísanou orientáciou, t.j., prvý naskočí bod $[-1, 1]$ (pre hodnotu parametra $t = -1$) a posledný naskočí bod $[1, 1]$ (pre hodnotu parametra $t = 1$) (samy overte :)). V tomto prípade je teda nami zvolená parametrizácia *súhlasná* s danou orientáciou paraboly. Táto skutočnosť sa potom pri samotnom výpočte predloženého krivkového integrálu odrazí v podobe znamienka plus pred znakom integrálu. Konkrétne,

$$I = + \int_{-1}^1 \underbrace{(t^2 - 2t \cdot t^2, (t^2)^2 - 2t \cdot t^2)}_{f(x,y)=(x^2-2xy, y^2-2xy)} \cdot \underbrace{\varphi'(t) dt}_{dr}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 (t^2 - 2t^3, t^4 - 2t^3) \cdot (1, 2t) dt = \int_{-1}^1 (2t^5 - 4t^4 - 2t^3 + t^2) dt \\
&= \left[\frac{t^6}{3} - \frac{4t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = -\frac{14}{15}.
\end{aligned}$$

Príklad 6

Stanovme krivkový integrál druhého druhu

$$I = \int_{\varphi} (y dx + z dy + x dz)$$

po skrutkovici φ s parametrickým vyjadrením

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad a, b > 0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

ktorá je orientovaná nesúhlasne s touto parametrizáciou.

Riešenie:

Postupujeme analogicky ako v predchádzajúcom príklade. Z charakteru zadania daného krivkového integrálu potrebujeme vyjadriť diferenciály premenných x , y a z ako funkcií parametra t . Platí

$$dx = -a \sin t dt, \quad dy = a \cos t dt, \quad dz = b dt.$$

Po dosadení do predloženého integrálu a s ohľadom na predpísanú orientáciu krivky φ postupne dostávame (samy overte detaily výpočtu :))

$$\begin{aligned}
I &= - \int_0^{2\pi} \left[\underbrace{(a \sin t) \cdot (-a \sin t dt)}_{y \cdot dx} + \underbrace{(bt) \cdot (a \cos t dt)}_{z \cdot dy} + \underbrace{(a \cos t) \cdot (b dt)}_{x \cdot dz} \right] \\
&= \int_0^{2\pi} [a^2 \sin^2 t - abt \cos t - ab \cos t] dt = \pi a^2.
\end{aligned}$$

Príklad 7

Pomocou krivkového integrálu druhého druhu odvoďme vzorec na výpočet obsahu vnútra elipsy s polosami $a, b > 0$.

Riešenie:

Tento príklad ilustruje jednu zo základných geometrických aplikácií krivkového integrálu druhého druhu. Konkrétne, ak φ je po častiach hladká, kladne orientovaná Jordanova krivka, potom hodnota

$$\frac{1}{2} \cdot \oint_{\varphi} (-y dx + x dy)$$

vyjadruje obsah vnútra krivky φ . Krúžok na znaku integrálu nám pripomína, že integrujeme po uzavretej krivke (krivkovému integrálu druhého druhu po uzavretej krivke sa niekedy hovorí aj *cirkulácia* po danej krivke). V našom prípade uvažujme pre jednoduchosť elipsu φ so stredom v začiatku systému súradníc s polosami ležiacimi na súradnicových osiach, t.j.,

$$\varphi : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jej parametrické vyjadrenie má napríklad tvar

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(samy si premyslite ;)). Elipsa φ je hladká Jordanova krivka, pričom máme

$$dx = -a \sin t dt, \quad dy = b \cos t dt.$$

Uvažujúc orientáciu φ súhlasnú s touto parametrizáciou, pre obsah jej vnútra potom platí

$$\begin{aligned} S &= +\frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} [(-b \sin t) \cdot (-a \sin t dt) + (a \cos t) \cdot (b \cos t dt)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} ab dt = \frac{ab}{2} \cdot [t]_0^{2\pi} = \pi ab \quad (:). \end{aligned}$$

Príklad 8

Určme prácu silového poľa $f(x, y, z) = (y, z, x)$, ktorá sa vykoná pri posune telesa s jednotkovou hmotnosťou z bodu $[-1, 0, e^\pi]$ do bodu $[1, 0, 1]$ pozdĺž krivky φ s vyjadrením

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = e^t, \quad t \in [0, \pi].$$

Riešenie:

Toto je jedna zo základných aplikácií krivkového integrálu druhého druhu vo fyzike. Podľa klasickej mechaniky sa práca W sily $f(x, y, z)$ pozdĺž priestorovej krivky φ definuje práve ako krivkový integrál druhého druhu z vektorovej funkcie $f(x, y, z)$ po krivke φ , t.j.,

$$W = \int_{\varphi} f(x, y, z) \cdot dr.$$

Je pochopiteľné, že celková vykonaná práca bude závisieť na orientácii danej krivky, t.j., v akom smere budeme cestovať po krivke. V našom prípade začiatočnému bodu $[-1, 0, e^{\pi}]$ odpovedá hodnota parametra $t = \pi$, kým koncovému bodu odpovedá hodnota parametra $t = 0$ (samy overte :)). To teda znamená, že daná parametrizácia krivky φ je nesúhlasná s jej predpísanou orientáciou. Ďalej platí

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-\sin t, \cos t, e^t), \quad t \in [0, \pi].$$

Pre celkovú vykonanú prácu potom dostávame

$$\begin{aligned} W &= - \int_0^{\pi} (\sin t, e^t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, e^t) dt = \int_0^{\pi} (\sin^2 t - 2e^t \cos t) dt \\ &= 1 + e^{\pi} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(samy overte detaily výpočtu ;)). Kladná hodnota W znamená, že v celkovej energetickej bilancii vykonalo na telese prácu silové pole $f(x, y, z)$. Prípadná záporná hodnota W by signalizovala, že v konečnom dôsledku samo teleso vykonalo prácu (potrebnú na prekonanie pôsobenia poľa $f(x, y, z)$) :).

Príklad 9

Vypočítajme krivkový integrál druhého druhu

$$I = \oint_{\varphi} [2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy],$$

kde geometrický obraz krivky φ predstavuje kladne orientovaný obvod rovinného trojuholníka ABC s vrcholmi

$$A = [1, 1], \quad B = [2, 2], \quad C = [1, 3].$$

Riešenie:

Popri štandardnom spôsobe výpočtu krivkových integrálov druhého druhu (parametrizáciou integračnej cesty a následným prevodom na určitý Riemannov integrál) sa v prípade rovinných uzavretých kriviek s výhodou využíva prevod krivkového integrálu druhého druhu na dvojný integrál na základe *Greenovej integrálnej vety*. Ak $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ je vektorová funkcia definovaná na rovinnej oblasti Ω , pričom funkcie $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ a $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ sú spojité na Ω , potom pre každú po častiach hladkú, kladne orientovanú Jordanovu krivku φ ležiacu aj so svojim vnútrom v Ω platí identita

$$\int_{\varphi} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_M \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy,$$

kde M je zjednotenie vnútra a trajektórie krivky φ . V našom prípade máme

$$P(x, y) = 2(x^2 + y^2), \quad Q(x, y) = (x + y)^2,$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 2(x + y), \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2(x - y).$$

Funkcie P , Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$ a $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sú iste spojité na celom \mathbb{R}^2 a krivka φ je po častiach hladká, kladne orientovaná Jordanova krivka (samý si premyslite :)). Sú teda splnené všetky predpoklady Greenovej integrálnej vety. Potom pre hodnotu krivkového integrálu v zadaní príkladu platí

$$I = \iint_M 2(x - y) dx dy,$$

kde M je zjednotenie vnútra a hranice trojuholníka ABC . Samý si premyslite, že množina M je elementárna vzhľadom na os x s vyjadrením

$$M : \quad 1 \leq x \leq 2, \quad x \leq y \leq 4 - x.$$

Prepisom daného dvojného integrálu na dvojnásobný postupne dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left[\int_x^{4-x} 2(x - y) dy \right] dx = \int_1^2 [-(x - y)^2]_x^{4-x} dx \\ &= -4 \cdot \int_1^2 (x - 2)^2 dx = -4 \cdot \left[\frac{(x - 2)^3}{3} \right]_1^2 = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Odporúčame čitateľovi, aby sa pokúsil vypočítať predložený integrál i tradičným spôsobom a porovnal náročnosť obidvoch výpočtov ;).

Príklad 10

Stanovme krivkový integrál druhého druhu

$$I = \oint_{\psi} \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] dy \right\},$$

pozdlž kladne orientovanej Jordanovej krivky $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \psi_3 \oplus \psi_4$, kde

$$\psi_1 : x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\psi_2 : x = t, \quad y = 0, \quad t \in [1, 2],$$

$$\psi_3 : x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\psi_4 : x = 0, \quad y = t, \quad t \in [1, 2].$$

Riešenie:

Toto je výstižný príklad poukazujúci na výpočtovú efektívnosť Greenovej integrálnej vety. Počítať predložený krivkový integrál prevodom na určitý Riemannov integrál je v tomto prípade náročné (nie však nemožné :) z dvoch dôvodov – pomerne komplikovaná je jednak integrovaná funkcia, a jednak i samotná integračná cesta :-/ (samy si nakreslite vhodný obrázok a vyznačte predpísanú orientáciu krivky ψ :)). Poďme preto overiť predpoklady Greenovej vety :). Nakoľko máme

$$P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = y \left[xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right],$$

parciálnym derivovaním dostaneme (samy overte :))

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = y^2.$$

Ďalej krivka ψ je iste po častiach hladká. To znamená, že všetky predpoklady Greenovej integrálnej vety sú splnené (samy si dôkladne premyslite :)). Pre hľadanú hodnotu I potom platí

$$I = \iint_M y^2 dx dy,$$

kde M je zjednotenie vnútra a trajektórie krivky ψ . Posledný dvojný integrál transformujeme do polárnych súradníc, nakoľko množina M je v tejto reprezentácii obdĺžnikom s vyjadrením

$$M : \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq \rho \leq 2$$

(samy si dobre premyslite :)). Dostávame teda

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho \sin \varphi)^2 \rho d\rho d\varphi = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \sin^2 \varphi d\rho d\varphi \\ &= \left(\int_1^2 \rho^3 d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \right) = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 \cdot \left[\frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15\pi}{16} \end{aligned}$$

(samy overte detaily medzivýpočtov ;)).

Príklad 11

Zistíme, či hodnota krivkového integrálu druhého druhu

$$I = \int_{\varphi} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \right]$$

závisí na integračnej ceste φ v oblasti $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$. V prípade zápornej odpovede stanovme hodnotu integrálu

$$\int_{[0,1]}^{[4,3]} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \right].$$

Riešenie:

Keďže oblasť Ω je jednoducho súvislá (samy si premyslite :)) a funkcie

$$P(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad Q(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sú spojito diferencovateľné na Ω (tiež si samy premyslite :)), nezávislosť predloženého krivkového integrálu na integračnej ceste φ v Ω je ekvivalentná s platnosťou identity

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{na celom } \Omega.$$

Elementárnym derivovaním dostaneme rovnosti

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} = \frac{yx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

pre každý bod $[x, y] \in \Omega$. Vektorové pole $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ je preto potenciálové v oblasti Ω , a teda hodnota krivkového integrálu v zadaní príkladu nezávisí v Ω na integračnej ceste φ . Pre hodnotu I potom platí

$$I = V(B) - V(A),$$

kde $V(x, y)$ je (ľubovoľný) potenciál vektorového poľa $f(x, y)$ a A a B sú začiatkový a koncový bod orietnovanej krivky φ . V druhej časti príkladu teda potrebujeme nájsť aspoň jeden potenciál $V(x, y)$ vektorového poľa $f(x, y)$. Nakoľko podľa definície potenciálu platí

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = P(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

hľadané $V(x, y)$ je kmeňová funkcia pre dvojicu $P(x, y)$ a $Q(x, y)$. Nasadíme preto štandardný aparát známy z Matematickej analýzy II :). Samy ukážte, že množina všetkých potenciálov $V(x, y)$ poľa $f(x, y)$ má tvar

$$V(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + C, \quad \text{kde } C \text{ je reálna konštanta :).}$$

Využitím tohto výsledku potom dostávame

$$\int_{[0,1]}^{[4,3]} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \right] = [V(x, y)]_{[0,1]}^{[4,3]} = V(4, 3) - V(0, 1)$$

$$= \left(\sqrt{4^2 + 3^2} + C \right) - \left(\sqrt{0^2 + 1^2} + C \right) = \sqrt{25} - \sqrt{1} = 4.$$

Vidíme, že hodnota daného krivkového integrálu nezávisí na konkrétnom výbere príslušného potenciálu $V(x, y)$.

Nakoniec poznamenajme, že všetky vykonané výpočty by fungovali i na väčšej oblasti $\Psi = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$. Samy overte, že funkcie $V(x, y)$, $P(x, y)$ a $Q(x, y)$, ako aj ich prvé parciálne derivácie, možno spojito rozšíriť i na oblasť Ψ so zachovaním všetkých vzájomných vzťahov :). Obzvlášť, rovnosť $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ platí v každom bode oblasti Ψ a možno ju použiť ako argument na to, že vektorové pole $f = (P, Q)$ je potenciálové na celom Ψ s potenciálom $V(x, y)$. Napriek tomu oblasť Ψ *nie je* jednoducho súvislá. To podčiarkuje skutočnosť, že predpoklad jednoduchej súvislosti danej oblasti je len *postačujúci* na argument

$$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x \implies \text{vektorové pole } f = (P, Q) \text{ je potenciálové,}$$

nie však *nutný*. V nasledujúcom príklade preberieme ďalšiu možnú variantu tejto problematiky.

Príklad 12

Rozhodnime, či vektorové pole

$$f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

je potenciálové v oblasti $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$.

Riešenie:

Nutné podmienky na to, aby vektorové pole $f = (P, Q)$ bolo potenciálové v oblasti Ω , sú splnené. Funkcie

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

totiž splňajú rovnosť $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ na celom Ω (samy overte ;)). V tomto prípade ale Ω *nie je* jednoducho súvislá oblasť, a preto platnosť uvedenej rovnosti ešte *nemusí zaručiť*, že pole $f(x, y)$ je potenciálové na celom Ω . Uvažujme napríklad kladne orientovanú kružnicu φ so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom 2, t.j.,

$$\varphi : x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(samy si premyslite, že táto parametrizácia je súhlasná s kladnou orientáciou krivky φ :)). Ďalej máme

$$dx = -2 \sin t \, dt, \quad dy = 2 \cos t \, dt.$$

Potom pre hodnotu krivkového integrálu z $f(x, y)$ pozdĺž krivky φ platí

$$\oint_{\varphi} f(x, y) \cdot dr = \oint_{\varphi} \left[-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right] = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

(samy overte detaily výpočtu :)). Cirkulácia vektorového poľa $f(x, y)$ po uzavretej krivke φ je teda *nenulová*. To signalizuje, že krivkový integrál z funkcie $f(x, y)$ v oblasti Ω *závisí* na integračnej ceste, a preto pole $f(x, y)$ nemôže byť potenciálové v Ω .