Príklady na precvičovanie – parametrické integrály

Pri určitých (Riemannových) integráloch sa nám niekedy stáva, že okrem integračnej premennej v ňom vystupuje i nejaký *parameter*, ktorý sa môže meniť, a tým i ovplyvňovať samotnú hodnotu daného integrálu. Jednoduchým príkladom je určitý integrál

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{px}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^p-1}{p}, & p \neq 0, \\ 1, & p = 0 \end{cases}$$

(samy overte detaily výpočtu :)), v ktorom úlohu parametra zohráva symbol p. Vidíme, že hodnota daného určitého integrálu je *funkciou* premennej p, v našom prípade definovanou pre každé $p \in \mathbb{R}$. Vo všeobecnosti máme situáciu

$$F(p) = \int_a^b f(x,p)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

kde premenlivý parameter p nadobúda hodnoty z nejakého pevného intervalu $[c,d]$. Funkcia (dvoch premenných) $f(x,p)$ je teda definovaná na obdĺžniku $[a,b] \times [c,d]$. Ak pre každú zafixovanú hodnotu parametra $p \in [c,d]$ je funkcia $g(x) := f(x,p)$ (jednej premennej x) integrovateľná na intervale $[a,b]$, t.j., integrál $\int_a^b f(x,p)\,\mathrm{d}x$ existuje, potom funkciu $F(p)$ v (1) nazývame *parametrickým integrálom* (alebo aj *integrálom závislým na parametri*). Hlavnou úlohou teórie parametrických integrálov je vyšetrenie vlastností funkcie $F(p)$ *bez priameho počítania* samotného integrálu v (1). Na rozdiel od príkladu v úvode sa totiž nie vždy dá hodnota integrálu v (1) nájsť priamou integráciou (obzvlášť, ak funkcia $g(x) = f(x,p)$ je vyššia transcendentná).

Uvedieme teraz základné vlastnosti parametrického integrálu v (1).

- Ak funkcia $f(x,p)$ je spojitá na obdĺžniku $[a,b] \times [c,d]$, potom i funkcia $F(p)$ je spojitá na intervale $[c,d]$. Naviac, v tomto prípade platí

$$\int_c^d F(p)\,\mathrm{d}p = \int_c^d \underbrace{\left[\int_a^b f(x,p)\,\mathrm{d}x\right]}_{F(p)} \mathrm{d}p = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,p)\,\mathrm{d}p\right] \mathrm{d}x.$$

  Jedná sa vlastne o aplikáciu Fubiniho vety pre dvojné integrály na obdĺžniku, samy si premyslite :).

- Ak funkcie $f(x,p)$ a $\frac{\partial f(x,p)}{\partial p}$ sú spojité na obdĺžniku $[a,b] \times [c,d]$, potom funkcia $F(p)$ je diferencovateľná na intervale $[c,d]$ a platí

$$F'(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\int_a^b f(x,p)\,\mathrm{d}x\right] = \int_a^b \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\,\mathrm{d}x \quad \text{pre každé } p \in [c,d].$$

  Posledná rovnosť sa označuje ako *Leibnizov vzorec* (alebo aj *Leibnizovo pravidlo*). Vidíme, že v prípade splnenia istých predpokladov pri výpočte derivácie $F'(p)$ nemusíme nutne poznať samotnú funkciu $F(p)$.

V praxi sa častokrát vyskytuje situácia, že aj samotné integračné medze sú v danom parametrickom integrále závislé na parametri p, t.j.

$$G(p) = \int_{\varphi(p)}^{\psi(p)} f(x,p)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

kde $\varphi(p)$ a $\psi(p)$ sú funkcie definované na intervale $[c,d]$ a zobrazujúce do intervalu $[a,b]$. Parametrický integrál $G(p)$ v (2) má analogické vlastnosti ako integrál $F(p)$ v (1).

- Ak funkcia $f(x,p)$ je spojitá na obdĺžniku $[a,b] \times [c,d]$ a funkcie $\varphi(p)$ a $\psi(p)$ sú spojité na intervale $[c,d]$ potom i funkcia $G(p)$ je spojitá na intervale $[c,d]$.

- Nech funkcie $f(x,p)$ a $\frac{\partial f(x,p)}{\partial p}$ sú spojité na obdĺžniku $[a,b] \times [c,d]$. Ďalej nech funkcie $\varphi(p)$ a $\psi(p)$ sú diferencovateľné na intervale $[c,d]$. Potom i funkcia $G(p)$ je diferencovateľná na intervale $[c,d]$ a pre každé $p \in [c,d]$ platí rovnosť

$$G'(p) = \int_{\varphi(p)}^{\psi(p)} \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\,\mathrm{d}x + \psi'(p) \cdot f\left(\psi(p),\, p\right) - \varphi'(p) \cdot f\left(\varphi(p),\, p\right).$$

  Posledná identita v prípade konštantných integračných medzí zrejme prechádza na vyššie uvedený Leibnizov vzorec (samy si premyslite :)).

Riešené príklady

Príklad 1
Vypočítajme limitu
$$\lim_{p\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+p^2}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie:
Nech a je nejaké zafixované kladné reálne číslo. Funkcia $f(x,p)=\sqrt{x^2+p^2}$ je iste spojitá na obdĺžniku $[-1,1]\times[-a,a]$. To potom znamená, že funkcia
$$F(p)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+p^2}\,\mathrm{d}x,$$
ako integrál závislý na parametri p, je definovaná a spojitá na intervale $[-a,a]$. Využitím tohto poznatku a faktu, že $0\in[-a,a]$, potom dostávame
$$\lim_{p\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+p^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{p\to 0}F(p)=F(0)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x.$$
Nakoľko funkcia $y=|x|$ je párna, pre hodnotu posledného integrálu platí
$$\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x=2\cdot\int_{0}^{1}|x|\,\mathrm{d}x=2\cdot\int_{0}^{1}x\,\mathrm{d}x=1.$$
Pre limitu v zadaní príkladu teda máme
$$\lim_{p\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+p^2}\,\mathrm{d}x=1.$$
Poznamenajme, že v tomto prípade sa uvedený integrál dá vypočítať i priamo. Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že jednak
$$F(p)=\sqrt{1+p^2}+p^2\cdot\ln\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{|p|},\quad p\neq 0,$$
a jednak následne platí
$$\lim_{p\to 0}F(p)=\lim_{p\to 0}\left[\sqrt{1+p^2}+p^2\cdot\ln\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{|p|}\right]=1\quad :).$$

Príklad 2

Stanovme limitu

$$\lim_{p\to 0} \int_p^{p+1} \frac{1}{1+x^2+p^2}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie:

Postupujeme analogicky ako v predchádzajúcom príklade, avšak teraz aj integračné medze závisia na parametri p. Nech a je nejaké kladné reálne číslo. Funkcie $\varphi(p) = p$ a $\psi(p) = p + 1$ sú spojité na intervale $[-a, a]$, pričom φ zobrazuje tento interval na $[-a, a]$, kým funkcia $\psi(p)$ ho zobrazuje na $[-a+1, a+1]$ (samy si premyslite :)). To potom znamená, že obidve funkcie budú zobrazovať $[-a, a]$ do spoločného intervalu $[-a, a+1]$ (i toto si samy dobre premyslite :)). Ďalej funkcia $f(x,p) = \frac{1}{1+x^2+p^2}$ je definovaná a spojitá na obdĺžniku $[-a, a+1] \times [-a, a]$. Sú teda splnené všetky predpoklady na to, aby funkcia

$$F(p) = \int_p^{p+1} \frac{1}{1+x^2+p^2}\,\mathrm{d}x$$

bola spojitá na intervale $[-a, a]$. A keďže $0 \in [-a, a]$, máme

$$\lim_{p\to 0} \int_p^{p+1} \frac{1}{1+x^2+p^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to 0} F(p) = F(0) = \int_0^{0+1} \frac{1}{1+x^2+0^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Odporúčame čitateľovi vykonať i alternatívny výpočet priamym spôsobom a porovnať obidva prístupy ;).

Príklad 3

Pre hodnoty $p > 0$ vypočítajme deriváciu funkcie

$$F(p) = \int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{p}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie:
Intuitívne by sme postupovali takto

$$F'(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{p}\,\mathrm{d}x\right] = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{p}\right]\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{x}{x^2+p^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+p^2)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right) \qquad :)$$

(samy overte detaily výpočtov ;)). Je však nutné sa presvedčiť, či uvedené triky sú skutočne korektné, t.j., či sú na ich realizáciu splnené potrebné predpoklady. Motivovaní obmedzením pre p v zadaní príkladu, nech $\mathcal{I}$ je nejaký netriviálny kompaktný podinterval v $(0,\infty)$. Potom funkcie

$$f(x,p) = \operatorname{arctg}\frac{x}{p} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} = -\frac{x}{x^2+p^2}$$

sú definované a spojité na obdĺžniku $[0,1]\times\mathcal{I}$ (samy si premyslite :)). To potom znamená, že funkcia $F(p)$ je diferencovateľná na intervale $\mathcal{I}$ a pre jej deriváciu $F'(p)$ platí výpočet v úvode príkladu pre každé $p\in\mathcal{I}$. Napokon, interval $\mathcal{I}\subset(0,\infty)$ bol zvolený ľubovoľne, preto uvedené argumenty sú správne pre každé $p>0$ (samy si premyslite, že každé $p>0$ je obsiahnuté vo vnútri nejakého netriviálneho kompaktného intervalu $\mathcal{I}\subset(0,\infty)$:)).

Príklad 4
Pre $p\neq 0$ nájdime deriváciu funkcie

$$F(p) = \int_{p^2}^{3p^2+1} \frac{\mathrm{e}^{px}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie:
V tomto prípade nemôžeme aplikovať priamy výpočet predloženého integrálu, nakoľko primitívna funkcia k výrazu e^{px}/x pre $p\neq 0$ síce existuje (na vhodnom podintervale), ale nie je možné ju vyjadriť pomocou elementárnych funkcií v nejakom rozumnom tvare :-/. Napokon, to, čo skutočne chceme, je

derivácia $F'(p)$, nie nutne samotná funkcia $F(p)$;). Podľa zovšeobecneného Leibnizovho pravidla formálne máme

$$F'(p) = \int_{p^2}^{3p^2+1} \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\mathrm{e}^{px}}{x}\right] \mathrm{d}x + (3p^2+1)' \cdot \frac{\mathrm{e}^{p\cdot(3p^2+1)}}{3p^2+1} - (p^2)' \cdot \frac{\mathrm{e}^{p\cdot p^2}}{p^2}$$

$$= \int_{p^2}^{3p^2+1} \mathrm{e}^{px}\,\mathrm{d}x + \frac{6p\cdot \mathrm{e}^{3p^3+p}}{3p^2+1} - \frac{2\cdot \mathrm{e}^{p^3}}{p} = \left[\frac{\mathrm{e}^{px}}{p}\right]_{p^2}^{3p^2+1} + \frac{6p\cdot \mathrm{e}^{3p^3+p}}{3p^2+1} - \frac{2\cdot \mathrm{e}^{p^3}}{p}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{3p^3+p}}{p} - \frac{\mathrm{e}^{p^3}}{p} + \frac{6p\cdot \mathrm{e}^{3p^3+p}}{3p^2+1} - \frac{2\cdot \mathrm{e}^{p^3}}{p} = \frac{(9p^2+1)\cdot \mathrm{e}^{3p^3+p}}{p\cdot(3p^2+1)} - \frac{3\cdot \mathrm{e}^{p^3}}{p} \quad :).$$

Overíme teraz prípustnosť tohto výpočtu. Nech $[c,d] \subset (0,\infty)$ je nejaký nedegenerovaný interval. Funkcie $\varphi(p) = p^2$ a $\psi(p) = 3p^2+1$ sú spojité, diferencovateľné a rastúce na $(0,\infty)$ a zobrazujú $[c,d]$ postupne na intervaly $[c^2,\, d^2]$ a $[3c^2+1,\, 3d^2+1]$. Interval $[c^2,\, 3d^2+1] \subset (0,\infty)$ je potom spoločný nadinterval pre obidva uvedené intervaly, a teda obidve funkcie $\varphi(p)$ a $\psi(p)$ do neho zobrazujú množinu $[c,d]$ (samy si premyslite :)). Ďalej funkcie

$$f(x,p) = \frac{\mathrm{e}^{px}}{x} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} = \mathrm{e}^{px}$$

sú spojité na obdĺžniku $[c^2,\, 3d^2+1]\times[c,d]$. Preto funkcia $F(p)$ je diferencovateľná a výpočet v úvode príkladu platí pre každé $p \in [c,d]$. Napokon, interval $[c,d] \subset (0,\infty)$ bol zvolený ľubovoľne, a teda všetky tieto závery sú správne pre každé $p > 0$. Analogicky sa overia príslušné predpoklady pre $p < 0$ (samy ich overte :)).

Príklad 5 (ťažší)
Dokážme, že tzv. *Besselova* funkcia prvého druhu

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos\left(nx - t\sin x\right) \mathrm{d}x$$

je pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ riešením (zhodou okolností tiež Besselovej :)) lineárnej diferenciálnej rovnice

$$t^2 \cdot y'' + t \cdot y' + (t^2 - n^2) \cdot y = 0 \quad \text{na celom } \mathbb{R}.$$

Riešenie:
Zafixujme $n \in \mathbb{N}_0$ a nech $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je netriviálny kompaktný interval. Funkcie

$$f(x,t) = \cos\left(nx - t\sin x\right),$$

$$f'_t(x,t) = \sin\left(nx - t\sin x\right) \cdot \sin x, \quad f''_{tt}(x,t) = -\cos\left(nx - t\sin x\right) \cdot \sin^2 x,$$

sú zrejme spojité na obdĺžniku $[0,\pi] \times \mathcal{I}$. To potom znamená, že funkcia $J_n(t)$ je dvakrát diferencovateľná na intervale $\mathcal{I}$ a platí

$$J'_n(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi f'_t(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \sin\left(nx - t\sin x\right) \cdot \sin x\,\mathrm{d}x,$$

$$J''_n(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi f''_{tt}(x,t)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \cos\left(nx - t\sin x\right) \cdot \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Vyjadrenie prvej derivácie $J'_n(t)$ obsahuje, na rozdiel od funkcií $J_n(t)$ a $J''_n(t)$, výraz $\sin\left(nx - t\sin x\right)$. Aby sme túto nesúrodosť odstránili, aplikujeme na $J'_n(t)$ integráciu per-partes, konkrétne

$$J'_n(t) = \left| \begin{array}{cc} u' = \sin x, & u = -\cos x, \\ v = \sin\left(nx - t\sin x\right), & v' = \cos\left(nx - t\sin x\right) \cdot (n - t\cos x) \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[-\cos x \cdot \sin\left(nx - t\sin x\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \cos x \cdot \cos\left(nx - t\sin x\right) \cdot (n - t\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \cos\left(nx - t\sin x\right) \cdot \left(n\cos x - t\cos^2 x\right)\mathrm{d}x$$

(samy overte detaily výpočtu :)). Následne pre $t \in \mathcal{I}$ postupne dostávame

$$t^2 \cdot J''_n(t) + t \cdot J'_n(t) + (t^2 - n^2) \cdot J_n(t)$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \left[-t^2 \sin^2 x \cdot \cos\left(nx - t\sin x\right) + \left(tn\cos x - t^2\cos^2 x\right) \cdot \cos\left(nx - t\sin x\right)\right.$$

$$\left. + (t^2 - n^2) \cdot \cos\left(nx - t\sin x\right)\right]\mathrm{d}x \quad \ldots \text{ po úpravách } \ldots$$

$$= -\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi n \cdot (n - t\cos x) \cdot \cos\left(nx - t\sin x\right)\mathrm{d}x = -\frac{n}{\pi} \cdot \left[\sin\left(nx - t\sin x\right)\right]_0^\pi = 0.$$

Vidíme teda, že funkcia $J_n(t)$ rieši diferenciálnu rovnicu v zadaní príkladu na $\mathcal{I}$. A nakoľko interval $\mathcal{I}$ bol zvolený ľubovoľne, platí to pre celé $\mathbb{R}$:).

Príklad 6
Pomocou identity

$$\int_0^b \frac{1}{1+ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(1+ab)}{a}, \quad a, b > 0,$$

nájdime hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^b \frac{x}{(1+ax)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie:
V prvom rade si všimnime, že pre každé $a, b > 0$ platí

$$\frac{x}{(1+ax)^2} = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{1+ax}\right) \quad \text{pre každé } x \in [0, b]$$

(samy overte :)). Pre hodnotu hľadaného integrálu teda máme

$$\int_0^b \frac{x}{(1+ax)^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^b \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{1+ax}\right)\mathrm{d}x.$$

Prirodzene nás napadne zameniť v poslednom výraze integrovanie a parciálne derivovanie :). Poďme sa presvedčiť, či je to možné. Nech $A > 0$ je ľubovoľné, ale pevne dané. Potom funkcie

$$f(x, a) = \frac{1}{1+ax}, \qquad \frac{\partial f(x, a)}{\partial a} = -\frac{x}{(1+ax)^2},$$

sú iste spojité na obdĺžniku $[0, b] \times [0, A]$. Zmienená zámena poradia integrovania a parciálneho derivovania je teda možná pre každé $a \in [0, A]$. Z toho, že $A > 0$ bolo zvolené ľubovoľne, potom vyplýva korektnosť tohto úkonu pre každé $a > 0$ (samy si to dobre premyslite :)). Využitím identity v zadaní príkladu môžeme preto smelo písať

$$\int_0^b \frac{x}{(1+ax)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\int_0^b \frac{1}{1+ax}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\ln(1+ab)}{a}\right)$$

$$= \frac{\ln(1+ab)}{a^2} - \frac{b}{a \cdot (1+ab)} \quad \text{pre každé } a, b > 0 \quad :).$$

Skúste hľadanú hodnotu integrálu stanoviť priamou integráciou a porovnajte náročnosť obidvoch prístupov ;).

Príklad 7

Vypočítajme hodnotu určitého integrálu

$$I = \int_0^1 \frac{x^3 - x}{\ln x} \, \mathrm{d}x.$$

Riešenie:

Predložený určitý integrál sa bohužiaľ nedá vypočítať pomocou tradičnej Newtonovej–Leibnizovej formuly, nakoľko nevieme efektívne vyjadriť neurčitý integrál z funkcie $\frac{x^3-x}{\ln x}$:(. Toto je preto typický príklad aplikácie parametrických integrálov pri výpočte hodnôt niektorých určitých integrálov :). Funkcia $g(x) = \frac{x^3-x}{\ln x}$ je zrejme definovaná a spojitá na otvorenom intervale $(0,1)$, pričom v jeho krajných bodoch platí

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - x}{\ln x} = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - x}{\ln x} = 2$$

(samy overte :)). To znamená, že $g(x)$ je integrovateľná na intervale $[0,1]$ a má význam hľadať hodnotu integrálu v zadaní príkladu (i toto si samy premyslite :)). Ako však na to? Fígeľ je v tom, že si uvedomíme takúto identitu

$$\frac{x^3 - x}{\ln x} = \int_1^3 x^p \, \mathrm{d}p \quad \text{pre každé } x \in [0,1] \quad :)$$

(pokúste sa ju overiť pre hodnoty $x = 0$ a $x = 1$ s tým, že výraz $\frac{x^3-x}{\ln x}$ nahradíte jeho odpovedajúcimi limitami v $x = 0$ a $x = 1$;)). Pre hodnotu I integrálu v zadaní príkladu teda máme

$$I = \int_0^1 \left[\int_1^3 x^p \, \mathrm{d}p \right] \mathrm{d}x.$$

A keďže funkcia $f(x,p) = x^p$ je spojitá na obdĺžniku $[0,1]\times[1,3]$, v poslednom dvojnásobnom integrále môžeme zameniť poradie integrácie a dostaneme

$$I = \int_1^3 \left[\int_0^1 x^p \,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}p = \int_1^3 \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 \mathrm{d}p = \int_1^3 \frac{1}{p+1}\,\mathrm{d}p = \ln 2 \qquad :).$$

Príklad 8

Určime hodnotu integrálu

$$I(r) = \int_0^\pi \ln\left(1 + 2r\cdot\cos x + r^2\right) \mathrm{d}x, \quad |r| < 1.$$

Riešenie:

Toto je ďalší prípad, kedy sa hodnota určitého integrálu nedá stanoviť priamou integráciou. Skúsme formálne zderivovať funkciu $I(r)$ podľa parametra r v súlade s Leibnizovým pravidlom

$$I'(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\int_0^\pi \ln\left(1 + 2r\cdot\cos x + r^2\right) \mathrm{d}x\right]$$

$$= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial r}\left[\ln\left(1 + 2r\cdot\cos x + r^2\right)\right] \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{2\cos x + 2r}{1 + 2r\cdot\cos x + r^2}\,\mathrm{d}x.$$

Integrand v poslednom integrále je však racionálna lomená funkcia vzhľadom na výraz $\cos x$, a teda ju vieme integrovať :). Pre hodnotu $r = 0$ máme

$$I'(0) = \int_0^\pi 2\cos x \,\mathrm{d}x = 0,$$

kým pre hodnotu parametra $r \neq 0$ platí výpočet

$$I'(r) = \frac{1}{r}\cdot\int_0^\pi \frac{2r\cdot\cos x + 2r^2}{1 + 2r\cdot\cos x + r^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r}\cdot\int_0^\pi \left(1 + \frac{r^2 - 1}{1 + 2r\cdot\cos x + r^2}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{r} + \frac{r^2 - 1}{r}\cdot\int_0^\pi \frac{1}{1 + 2r\cdot\cos x + r^2}\,\mathrm{d}x$$

(samy overte detaily ;)). Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že posledný integrál má hodnotu

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + 2r\cdot\cos x + r^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{1 - r^2}$$

(použite substitúciu $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;)). Celkovo teda máme

$$I'(r) = \frac{\pi}{r} + \frac{r^2 - 1}{r} \cdot \frac{\pi}{1 - r^2} = 0.$$

Ukazuje sa teda, že derivácia $I'(r) = 0$ pre každé $r \in (-1, 1)$, a teda funkcia $I(r)$ je konštantná na intervale $(-1, 1)$. Poďme teraz overiť prípustnosť našich výpočtov. Nech ε je nejaké reálne číslo z intervalu $(0, 1)$. Potom funkcie

$$f(x, r) = \ln\left(1 + 2r \cdot \cos x + r^2\right) \qquad \text{a} \qquad f'_r(x, r) = \frac{2\cos x + 2r}{1 + 2r \cdot \cos x + r^2}$$

sú definované a spojité na obdĺžniku $[0, \pi] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. Vyplýva to zo skutočnosti, že výraz

$$1 + 2r \cdot \cos x + r^2 = (1 + r \cdot \cos x)^2 + (r \cdot \sin x)^2 \geq 0$$

môže byť nulový iba pre $r = \pm 1$ (samy sa pokúste ukázať :)). V našom prípade však máme $|r| \leq \varepsilon < 1$. Teda vyššie vykonané výpočty sú korektné a funkcia $I(r)$ je konštantná na intervale $[-\varepsilon, \varepsilon]$ pre každé $\varepsilon \in (0, 1)$, t.j., na celom intervale $(-1, 1)$. Nakoľko pre hodnotu parametra $r = 0 \in (-1, 1)$ je

$$I(0) = \int_0^\pi \ln\left(1 + 2 \cdot 0 \cdot \cos x + 0^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^\pi \ln 1 \, \mathrm{d}x = 0,$$

môžeme uzavrieť, že

$$I(r) = \int_0^\pi \ln\left(1 + 2r \cdot \cos x + r^2\right) \mathrm{d}x = 0 \quad \text{pre každé } r \in (-1, 1) \quad :).$$

Ponúka sa prirodzená myšlienka rozšíriť koncept parametrického integrálu i pre nevlastné integrály, t.j., uvažovať situáciu

$$F(p) = \int_a^\infty f(x, p) \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

pre parameter p z nejakého konečného intervalu $[c, d]$. Ak nevlastný integrál $\int_a^\infty f(x, p) \, \mathrm{d}x$ konverguje pre každé $p \in [c, d]$, potom funkcia $F(p)$ v (3) sa nazýva *nevlastný parametrický integrál prvého druhu* (alebo aj *nevlastný integrál závislý na parametri prvého druhu*). V tomto prípade hovoríme, že nevlastný integrál v (3) *konverguje* (alebo je *konvergentný*) na intervale $[c, d]$. Jedná sa teda o konvergenciu vzhľadom na parameter p. Popri tejto „bodovej“ konvergencii zavádzame i pojem *rovnomernej konvergencie* na danom intervale $[c, d]$. Konkrétne, parametrický integrál $F(p)$ v (3) *konverguje rovnomerne* na intervale $[c, d]$, ak pre každé kladné číslo ε existuje (dostatočne veľké) kladné číslo A tak, že pre každé reálne číslo $b > A$ platí nerovnosť

$$\left| F(p) - \int_a^b f(x,p)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_b^\infty f(x,p)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \quad \text{pre každé } p \in [c, d].$$

Posledná nerovnosť nám hovorí, že nevlastný integrál v (3) jednak konverguje pre každé $p \in [c, d]$ (spomeňme si z Matematickej analýzy I, že $\int_a^\infty f(x,p)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x,p)\,\mathrm{d}x$:)), a že jednak táto konvergencia (resp. jej rýchlosť) *nezávisí* na parametri $p \in [c, d]$. Je to analogická situácia ako pri funkcionálnych radoch, bodová verzus rovnomerná konvergencia na danom intervale :). Odporúčame čitateľovi premyslieť si to i z tohto uhlu pohľadu ;). Nuž a rovnako ako pri radoch funkcií, i tu funguje tzv. *Weierstrassovo kritérium* rovnomernej konvergencie nevlastného integrálu v (3) :).

Weierstrassovo kritérium konvergencie nevlastného integrálu v (3)

Nech pre každé $p \in [c, d]$ a každé $b > a$ je funkcia $f(x, p)$ (jednej premennej x) integrovateľná na intervale $[a, b]$. Nech $g(x)$ je funkcia spĺňajúca:

- Nevlastný integrál $\int_a^\infty g(x\,\mathrm{d}x$ konverguje.
- Nerovnosť $|f(x, p)| \leq g(x)$ platí pre každý bod $[x, p] \in [a, \infty) \times [c, d]$.

Potom integrál $F(p)$ v (3) konverguje rovnomerne na intervale $[c, d]$.

Základné vlastnosti nevlastných parametrických integrálov prvého druhu sú analogické ako pri vlastných parametrických integráloch, vždy však za dodatočného predpokladu rovnomernej konvergencie. Konkrétne, platia takéto „nevlastné“ verzie tvrdení v úvode dokumentu.

- Ak funkcia $f(x, p)$ je spojitá na množine $[a, \infty) \times [c, d]$ a nevlastný integrál $F(p)$ v (3) konverguje rovnomerne na intervale $[c, d]$, potom i funkcia $F(p)$ je spojitá na intervale $[c, d]$ a

$$\int_c^d F(p)\,\mathrm{d}p = \int_c^d \underbrace{\left[\int_a^\infty f(x,p)\,\mathrm{d}x\right]}_{F(p)} \mathrm{d}p = \int_a^\infty \left[\int_c^d f(x,p)\,\mathrm{d}p\right] \mathrm{d}x.$$

- Ak funkcie $f(x,p)$ a $\frac{\partial f(x,p)}{\partial p}$ sú spojité na množine $[a,\infty)\times[c,d]$ a nevlastné integrály

$$\int_a^\infty f(x,p)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^\infty \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\,\mathrm{d}x$$

konvergujú rovnomerne na intervale $[c,d]$, potom funkcia $F(p)$ v (3) je diferencovateľná na intervale $[c,d]$ a platí

$$F'(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\int_a^\infty f(x,p)\,\mathrm{d}x\right] = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\,\mathrm{d}x \quad \text{pre každé } p\in[c,d].$$

Významným príkladom nevlastných parametrických integrálov, ktoré sa objavujú v rozličných partiách matematickej analýzy, ako aj matematiky vôbec, sú tzv. *Eulerove integrály* prvého a druhého druhu.

Eulerov integrál druhého druhu – gama funkcia

Pod pojmom *gama funkcia* rozumieme nevlastný parametrický integrál

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Funkcia $\Gamma(t)$ je definovaná pre každé $t\in(0,\infty)$, pre nekladné hodnoty parametra t daný nevlastný integrál diverguje. Jedná sa o funkciu spojitú a majúcu spojité derivácie všetkých rádov, pričom pre každé $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\Gamma^{(n)}(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\ln^n x\,\mathrm{d}x, \quad t\in(0,\infty).$$

Obzvlášť, nevlastný integrál v (4) rovnomerne konverguje na každom uzavretom a ohraničenom podintervale v $(0,\infty)$. Funkcia $\Gamma(t)$ nadobúda na $(0,\infty)$ kladné hodnoty a platí

$$\lim_{t\to 0^+}\Gamma(t) = \infty = \lim_{t\to\infty}\Gamma(t).$$

Zaujímavou vlastnosťou gama funkcie je fakt, že v istom zmysle zovšeobecňuje pojem faktoriálu i pre neceločíselné kladné hodnoty. Konkrétne, platí

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{pre každé } n\in\mathbb{N}_0.$$

Z tohto pohľadu potom možno číslo $\Gamma(t+1)$ chápať ako „faktoriál“ hodnoty $t \in (0, \infty)$:). Túto ideu potvrdzuje aj identita

$$\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t)$$

platiaca pre každé $t > 0$. Ďalšie základné vlastnosti funkcie $\Gamma(t)$ sú:

- $$\Gamma(t+n) = (t+n-1) \cdot (t+n-2) \cdots (t+1) \cdot t \cdot \Gamma(t)$$
  $$\text{pre každé } t > 0 \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

- $$\Gamma(t) \cdot \Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t} \quad \text{pre každé } t \in (0,1).$$

- $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1)}{2^n} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Eulerov integrál prvého druhu – beta funkcia

Beta funkcia je definovaná predpisom

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, \mathrm{d}x. \tag{5}$$

Jedná sa o funkciu dvoch premenných definovanú pre $p, q > 0$. Významný poznatok je vyjadrenie funkcie $B(p,q)$ pomocou gama funkcie v tvare

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \text{pre každé } p, q \in (0, \infty).$$

Z poslednej identity napríklad vyplýva symetrickosť beta funkcie vzhľadom na svoje premenné, t.j., $B(p,q) = B(q,p)$ pre každý bod $[p,q] \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Riešené príklady

Príklad 9

Pomocou identity

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+p}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{p}}, \qquad p>0,$$

nájdime hodnotu nevlastného integrálu

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+p)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie:

Nakoľko pre každé $x\in[0,\infty)$ a každé $p\in(0,\infty)$ platí

$$\frac{1}{(x^2+p)^2} = \frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{1}{x^2+p}\right),$$

môžeme hľadaný nevlastný integrál písať v tvare

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+p)^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{x^2+p}\right)\mathrm{d}x.$$

Formálnou zámenou integrácie a parciálneho derivovania v poslednom výraze a následným využitím identity v zadaní príkladu potom dostaneme

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+p)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\int_0^\infty \frac{1}{x^2+p}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{p}}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{p^3}}.$$

Overíme teraz korektnosť tejto zámeny. Nech $\varepsilon\in(0,1)$ a uvažujme interval $\left[\varepsilon,\,\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Všimnime si, že pre $\varepsilon\to 0^+$ tento interval postupne vyčerpá všetky kladné reálne čísla (a o to nám aj ide :)). Funkcie

$$f(x,p)=\frac{1}{x^2+p}, \qquad \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} = -\frac{1}{(x^2+p)^2}$$

sú zrejme spojité na rovinnom páse $[0,\infty)\times\left[\varepsilon,\,\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Okrem toho

$$|f(x,p)|\le\frac{1}{x^2+\varepsilon}, \qquad \left|\frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\right| \le \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^2} \quad \text{pre každé } [x,p]\in[0,\infty)\times\left[\varepsilon,\,\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

(samy si premyslite :)) a nevlastné integrály

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\varepsilon}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^2}\,\mathrm{d}x$$

konvergujú (i toto si samy dobre premyslite a nájdite ich hodnoty ;)). Podľa Weiestrassovho kritéria potom nevlastné integrály

$$\int_0^\infty f(x,p)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+p}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+p)^2}\,\mathrm{d}x$$

konvergujú rovnomerne (vzhľadom na parameter p) na intervale $\left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]$. Preto vykonaná zámena integrácie a parciálneho derivovania bola prípustná pre každé $p \in \left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]$. A nakoľko $\varepsilon \in (0,1)$ je ľubovoľné, je táto zámena korektná pre každú kladnú hodnotu parametra p (samy si premyslite v súvislosti s poznámkou vyššie o intervale $\left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]$:)).

Príklad 10 (ťažší)
Pomocou funkcie

$$F(p) = \left(\int_0^p \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

nájdime hodnotu tzv. *Poissonovho integrálu*

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie:
Keďže funkcia $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ je spojitá na celom $\mathbb{R}$, integrál $\int_0^p \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ ako funkcia hornej medze p, je diferencovateľný (podľa p) pre každé $p \in (-\infty, \infty)$ (samy si premyslite :)). Potom aj funkcia $F(p)$ má na celom $\mathbb{R}$ deriváciu (i toto si samy premyslite :)), pričom platí

$$F'(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\left(\int_0^p \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2\right] = 2\cdot\left(\int_0^p \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\int_0^p \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= 2\cdot\left(\int_0^p \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\cdot \mathrm{e}^{-p^2} = 2\mathrm{e}^{-p^2}\cdot\int_0^p \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{pre každé } p \in \mathbb{R}$$

($F(p)$ sme podľa premennej p derivovali ako zloženú funkciu :)). Vo vzniknutom integrále ďalej zavedieme novú integračnú premennú u substitúciu $x = p \cdot u$ (premenná p sa vzhľadom na daný integrál správa ako konštanta :))

$$F'(p) = \left| \begin{array}{c} x = p \cdot u \\ \mathrm{d}x = p \cdot \mathrm{d}u \\ 0 \rightsquigarrow 0, \quad p \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = 2\mathrm{e}^{-p^2} \cdot \int_0^1 \mathrm{e}^{-p^2 \cdot u^2} \cdot p \, \mathrm{d}u = \int_0^1 2p \cdot \mathrm{e}^{-p^2(1+u^2)} \, \mathrm{d}u.$$

Ak sa však lepšie pozrieme na integrand v poslednom určitom integrále, zistíme, že pre každé $u \in [0,1]$ a $p \in \mathbb{R}$ platí rovnosť

$$2p \cdot \mathrm{e}^{-p^2(1+u^2)} = \frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-p^2(1+u^2)}}{1+u^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\mathrm{e}^{-p^2(1+u^2)}}{1+u^2}\right) \qquad :)$$

(samy si to dobre premyslite ;)). Máme teda pre $F'(p)$ vyjadrenie

$$F'(p) = \int_0^1 -\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\mathrm{e}^{-p^2(1+u^2)}}{1+u^2}\right) \mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\mathrm{e}^{-p^2(1+u^2)}}{1+u^2}\right) \mathrm{d}u$$

platné pre každé reálne číslo p. Radi by sme teraz zamenili poradie integrácie a parciálneho derivovania vo vzniknutom výraze pre $F'(p)$. Nakoľko funkcia

$$f(u,p) = \frac{\mathrm{e}^{-p^2(1+u^2)}}{1+u^2}$$

je spojitá a spojito diferencovateľná na obdĺžniku $[0,1] \times \mathcal{I}$ pre každý reálny kompaktný interval $\mathcal{I}$, táto zámena je korektná. Dostávame preto

$$F'(p) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-p^2(1+u^2)}}{1+u^2} \, \mathrm{d}u\right] \quad \text{pre každé } p \in \mathbb{R}.$$

Poslednú rovnosť však potom môžeme spätne *integrovať* podľa premennej p

$$\int F'(p) \, \mathrm{d}p = \int -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-p^2(1+u^2)}}{1+u^2} \, \mathrm{d}u\right] \mathrm{d}p$$

$$\Downarrow$$

$$F(p) = C - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-p^2(1+u^2)}}{1+u^2} \, \mathrm{d}u, \quad C \text{ je integračná konštanta.}$$

Posledná identita zrejme platí pre každé reálne číslo p. Špeciálne, voľbou $p = 0$ zistíme hodnotu konštanty C, nakoľko

$$\underbrace{F(0)}_{\left(\int_0^0 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = 0} = C - \int_0^1 \frac{\overbrace{\mathrm{e}^{-0^2\cdot(1+u^2)}}^{1}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$\Downarrow$$

$$C = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = [\operatorname{arctg} u]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Pre funkciu $F(p)$ máme teda k dispozícii dve vyjadrenia, jednak samotné definičné, a jednak práve teraz odvodené. Platí teda takáto krásna identita

$$\left(\int_0^p \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-p^2(1+u^2)}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \quad \text{pre každé } p \in \mathbb{R} \quad :).$$

Túto rovnosť teraz limitujeme pre $p \to \infty$. Keďže v tomto prípade výraz $\mathrm{e}^{-p^2(1+u^2)} \to 0$ rovnomerne pre $u \in [0, 1]$ (samy overte :)), napokon dostaneme

$$\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{0}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad :).$$

Príklad 11

Vypočítajme nevlastný integrál

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-px^2} - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

pre hodnoty parametra $p > 0$.

Riešenie:

V prvom rade poznamenajme, že pre pevne zvolené $p > 0$ je podintegrálny výraz $\frac{\mathrm{e}^{-px^2} - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2}$ definovaný pre každé $x \in (0, \infty)$, pričom

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-px^2} - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2} = 1 - p$$

(samy overte :)). Ďalej si všimnime, že pre každé $x \in [0,\infty)$ a každé $p > 0$ platí identita

$$\frac{\mathrm{e}^{-px^2} - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2} = -\int_1^p \mathrm{e}^{-ux^2}\,\mathrm{d}u$$

(v prípade $x = 0$ ľavú stranu nahradíme vyššie uvedenou limitou, premyslite si to ;)). Z tejto analýzy vyplýva, že hľadaný integrál I môžeme pre každé $p > 0$ vyjadriť v tvare

$$I = -\int_0^\infty \left[\int_1^p \mathrm{e}^{-ux^2}\,\mathrm{d}u\right] \mathrm{d}x.$$

Ak $p = 1$, potom zrejme $I = 0$ (samy si premyslite :)). Nech teraz $p > 1$ je nejaká zafixovaná hodnota. Potom funkcia

$$f(x,u) = \mathrm{e}^{-ux^2}$$

je iste spojitá na rovinnom páse $[0,\infty) \times [1,p]$. Naviac, nevlastný integrál

$$\int_0^\infty f(x,u)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ux^2}\,\mathrm{d}x$$

rovnomerne konverguje (vzhľadom na parameter u) na intervale $[1,p]$. Tento fakt je zaručený Weierstrassovým kritériom, pretože

$$|f(x,u)| = |\mathrm{e}^{-ux^2}| \leq \mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{pre každé } [x,u] \in [0,\infty) \times [1,p]$$

a nevlastný integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ konverguje (Poissonov integrál, pozri Príklad 10 :)). Tieto skutočnosti potom umožňujú zameniť poradie integrácií vo vyššie odvodenom výraze pre hľadaný integrál I, konkrétne platí

$$I = -\int_1^p \left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ux^2}\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}u.$$

Nechávame na čitateľa, aby sa presvedčil, že rovnaké argumenty fungujú i pre prípad $1 > p > 0$, samozrejme, s rovnakým výsledkom :) (bude však nutné sa vysporiadať s nevlastným integrálom $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-px^2}\,\mathrm{d}x$;)). Po vykonanej zámene však už vieme stanoviť hodnotu I. Vnútorný nevlastný integrál sa dá substitúciou $s = x \cdot \sqrt{u}$ previesť na Poissonov integrál

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ux^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} s = x \cdot \sqrt{u} \\ \mathrm{d}s = \sqrt{u} \cdot \mathrm{d}x \\ 0 \rightsquigarrow 0, \quad \infty \rightsquigarrow \infty \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{u}} \quad :).$$

Spätným dosadením do získaného vyjadrenia pre I dostaneme

$$I = -\int_1^p \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\left[2\sqrt{u}\right]_1^p = \sqrt{\pi}\cdot(1-\sqrt{p}).$$

Nakoniec poznamenajme, že získaný výraz platí i v prípade hodnoty $p = 1$, teda pre každé $p > 0$ máme

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-px^2} - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} - \sqrt{\pi p} \quad :).$$

Príklad 12

Dokážme, že funkcia

$$y(t) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

vyhovuje na intervale $(0,\infty)$ lineárnej diferenciálnej rovnici $y'' + y = 1/t$.

Riešenie:

Nech $[c,d] \subset (0,\infty)$ je nejaký kompaktný interval. Funkcie

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}, \quad f'_t(x,t) = -\frac{x\cdot\mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}, \quad f''_{tt}(x,t) = \frac{x^2\cdot\mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}$$

sú zrejme spojité na rovinnom páse $[0,\infty)\times[c,d]$. Okrem toho pre každý bod $[x,t] \in [0,\infty)\times[c,d]$ platia nerovnosti

$$|f(x,t)| \le \mathrm{e}^{-dx}, \quad |f'_t(x,t)| \le \mathrm{e}^{-dx}, \quad |f''_{tt}(x,t)| \le \mathrm{e}^{-dx}$$

(samy overte :)) a nevlastný integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-dx}\,\mathrm{d}x = 1/d$ konverguje. Podľa Weierstrassovho kritéria potom nevlastné integrály

$$\int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty f'_t(x,t)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \frac{x\cdot\mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^\infty f''_{tt}(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^2\cdot\mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

konvergujú rovnomerne na intervale $[c,d]$. To potom umožňuje efektívne počítať derivácie funkcie $y(t)$ pre $t \in [c,d]$. Konkrétne, platí

$$y'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \frac{x\cdot \mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$y''(t) = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^2\cdot \mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

(samy overte :)). Následne, pre každé $t \in [c,d]$ máme

$$y''(t) + y(t) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{x^2\cdot \mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}$$

(samy si premyslite detaily výpočtu ;)). Teda funkcia $y(t)$ na intervale $[c,d]$ skutočne vyhovuje diferenciálnej rovnici v zadaní príkladu. A keďže interval $[c,d]$ bol zvolený ľubovoľne, tento záver platí i na celom $(0,\infty)$:).

Príklad 13 (ťažší)
Nájdime hodnotu nevlastného integrálu

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cdot \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie:
Pri tomto type príkladov obvykle býva pomerne náročné sa nejako „chytiť“, nakoľko v predloženom integrále sa nevyskytuje žiadny parameter :). Štandardný postup pri riešení takýchto úloh spočíva v zostrojení vhodného parametrického integrálu, ktorý by pre istú hodnotu parametra prechádzal na náš skúmaný integrál. V tomto prípade budeme pracovať s integrálom

$$F(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px}\cdot \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

s hodnotami parametra $p \in [0,\infty)$. Ihneď vidíme, že pre hľadanú hodnotu I platí $I = F(1)$:). Budeme sa preto snažiť odvodiť explicitnú formulu pre funkčnú hodnotu $F(p)$ pre každé $p > 0$ (prípad $p = 0$ preskúmame osobitne v nasledujúcom príklade :)). V prvom rade dokážeme, že funkcia $F(p)$ je na intervale $[0,\infty)$ dobre definovaná, t.j., pre každé $p \geq 0$ daný nevlastný parametrický integrál konverguje. Ukážeme to pomocou Dirichletovho kritéria pre nevlastné integrály (pripomeňte si z Matematickej analýzy I ;)). Označme

$$f(x) = \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x, \qquad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Funkcia $g(x)$ je monotónna na intervale $(0,\infty)$ a $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Ďalej funkcia $f(x)$ je iste integrovateľná na každom intervale $[0,A]$, $A > 0$, pričom určitý integrál $\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$, ako funkcia hornej hranice A, je na $(0,\infty)$ rovnomerne ohraničený, t.j., existuje $K \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $A > 0$ platí

$$\left| \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq K.$$

Uvedená nerovnosť je splnená napríklad pre $K = 3$. Vyplýva to z výpočtov

$$\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-px}}{p^2+1} \cdot (p\sin x + \cos x) \right]_0^A$$

$$= \frac{1 - \mathrm{e}^{-pA} \cdot (p\sin A + \cos A)}{p^2+1} \quad \text{pre každé } A > 0,$$

$$\left| \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \frac{1 - \mathrm{e}^{-pA} \cdot (p\sin A + \cos A)}{p^2+1} \right| \leq \frac{1 + \overbrace{\mathrm{e}^{-pA}}^{\leq 1} \cdot (p \cdot \overbrace{|\sin A|}^{\leq 1} + \overbrace{|\cos A|}^{\leq 1})}{p^2+1}$$

$$\leq \frac{1 + (p+1)}{p^2+1} = \frac{p+2}{p^2+1} < 3 \quad \text{pre každé } A > 0$$

(samy detailne overte všetky kroky ;)). Podľa Dirichletovho kritéria to potom znamená, že nevlastný integrál

$$\int_0^\infty f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = F(p)$$

(bodovo) konverguje pre každú hodnotu parametra $p \in [0,\infty)$. Ukážeme ďalej, že táto konvergencie je dokonca rovnomerná na každom kompaktnom podintervale v $(0,\infty)$. Skutočne, nech a,b sú ľubovoľné kladné reálne čísla s $a<b$. Keďže $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$ pre každé $x \in [0,\infty)$ (samy si premyslite ;)), platí

$$\left|\mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x}\right| = \mathrm{e}^{-px} \cdot \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \mathrm{e}^{-ax} \quad \text{pre každé } [x,p] \in [0,\infty) \times [a,b].$$

Okrem toho, nevlastný integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}$ konverguje. Podľa Weierstrassovho kritéria potom nevlastný parametrický integrál $F(p)$ rovnomerne konverguje na intervale $[a,b]$. Z toho vyplýva, že funkcia $F(p)$ je spojitá na $(0,\infty)$. Ukážeme, že je na tomto intervale dokonca diferencovateľná. Máme

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = -\mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x \quad \text{pre každé } [x,p] \in [0,\infty) \times (0,\infty).$$

Z vyššie uvedených výpočtov dostávame

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{A\to\infty}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-pA} \cdot (p\sin A + \cos A)}{p^2+1}\right] = \frac{1}{p^2+1}\end{aligned}$$

pre každé $p \in (0,\infty)$. Ďalej na základe analogických argumentov ako pre integrál $F(p)$ platí, že nevlastný integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$ konverguje rovnomerne vzhľadom na p na každom kompaktnom podintervale v $(0,\infty)$ (pokúste sa samy overiť :)). Tieto pozorovania nám potom zaručujú existenciu derivácie $F'(p)$ pre každé $p \in (0,\infty)$ s vyjadrením

$$\begin{aligned}F'(p) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p}\left(\mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{p^2+1}.\end{aligned}$$

Spätnou integráciou poslednej rovnosti dostávame

$$F(p) = -\int \frac{1}{p^2+1}\,\mathrm{d}p = -\operatorname{arctg} p + C, \quad p \in (0,\infty).$$

Hodnotu integračnej konštanty C získame z pozorovania $\lim_{p\to\infty} F(p) = 0$. Táto identita je dôsledkom nerovnosti

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \underbrace{\left|\frac{\sin x}{x}\right|}_{\leq 1}\mathrm{d}x \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}$$

platnej pre každé $p \in (0, \infty)$ (samy si premyslite :)). Teda

$$\lim_{p \to \infty} F(p) = C - \lim_{p \to \infty} \operatorname{arctg} p$$

$$\Downarrow$$

$$0 = C - \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

Napokon dostávame finálnu formulu pre funkciu $F(p)$

$$F(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p, \quad p \in (0, \infty) \quad :).$$

Z nej potom ihneď vyplýva hodnota hľadaného integrálu I (pre $p = 1$)

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \cdot \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \quad :).$$

Príklad 14 (ťažší)
Pomocou výsledkov v Príklade 13 určme hodnotu tzv. *Dirichletovho integrálu*

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Riešenie:
V predchádzajúcom príklade sme skúmali parametrický integrál

$$F(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$$

a ukázali sme, že rovnomerne konverguje (vzhľadom na parameter p) na intervale $(0, \infty)$. Na základe tejto skutočnosti sme potom odvodili jeho explicitné vyjadrenie

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p, \quad p \in (0, \infty).$$

Limitovaním poslednej rovnosti pre $p \to 0^+$ dostaneme

$$\lim_{p\to 0^+} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{p\to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Na druhej strane, náš integrál I konverguje, ako sme pomocou Dirichletovho kritéria dokázali v Príklade 13, pričom $I = F(0)$. Takže

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim_{p\to 0^+} \left(\mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) \mathrm{d}x.$$

Prirodzene teda očakávame, že by mohla platiť rovnosť

$$\lim_{p\to 0^+} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \overset{???}{=} \int_0^\infty \lim_{p\to 0^+} \left(\mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) \mathrm{d}x,$$

ktorá by ihneď implikovala $I = \frac{\pi}{2}$ a problém by bol vyriešený :). Poslednú zámenu limitovania a integrácie však zatiaľ *nemáme ničím zaručenú* (dokázali sme rovnomernú konvergenciu, a teda i spojitosť funkcie $F(p)$ na každom kompaktnom intervale v $(0, \infty)$, nie však v $[0, \infty)$). Napriek tomu táto zámena *je korektná* a my to teraz dokážeme využitím iných argumentov :). Nech $A > 0$ je pevne dané. Ukážeme, že pre každé $p \in (0, \infty)$ platí nerovnosť

$$\left| \int_A^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \right| \le \frac{1}{A}. \tag{6}$$

Z predchádzajúceho príkladu dostávame identitu

$$\int_A^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-px}}{p^2+1} \cdot (p \sin x + \cos x) \right]_A^\infty = \frac{\mathrm{e}^{-pA}}{p^2+1} \cdot (p \sin A + \cos A)$$

(samy overte :)). Okrem toho nevlastný integrál $\int_A^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$ konverguje rovnomerne vzhľadom na parameter p na každom kompaktnom podintervale v $(0, \infty)$ (využijú sa analogické argumenty ako pre nevlastný integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$ v Príklade 13, samy si to premyslite ;)). To potom znamená, že pre každú dvojicu $b > a > 0$ je korektná zámena integrácií

$$\int_A^\infty \left[\int_a^b \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x \, \mathrm{d}p \right] \mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_A^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}p$$

(samy si dobre premyslite :)). Dosadením za integrál $\int_A^\infty \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$ máme

$$\int_A^\infty \left[\int_a^b \mathrm{e}^{-px} \cdot \sin x \, \mathrm{d}p \right] \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-pA}}{p^2+1} \cdot (p \sin A + \cos A) \, \mathrm{d}p.$$

Na ľavej strane poslednej rovnosti vykonáme integráciu podľa premennej p

$$\int_A^{\infty} \left[-\mathrm{e}^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x} \right]_a^b \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-pA}}{p^2+1} \cdot (p \sin A + \cos A)\, \mathrm{d}p$$

$$\Downarrow$$

$$\int_A^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}\right) \cdot \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-pA}}{p^2+1} \cdot (p \sin A + \cos A)\, \mathrm{d}p. \tag{7}$$

Pravú stranu poslednej rovnosti sa pokúsime v absolútnej hodnote vhodne odhadnúť zhora. Využijeme pri tom identitu a následne nerovnosť

$$(p^2+1) - (p \sin A + \cos A)^2 = (p^2+1) - (p^2 \sin^2 A + \cos^2 A + 2p \sin A \cos A)$$

$$= p^2 \cdot \underbrace{(1 - \sin^2 A)}_{\cos^2 A} + \underbrace{(1 - \cos^2 A)}_{\sin^2 A} - 2p \sin A \cos A = (p \cos A + \sin A)^2 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$(p \sin A + \cos A)^2 \leq p^2 + 1 \leq (p^2+1)^2$$

$$\Downarrow \text{ po odmocnení } \Downarrow$$

$$|p \sin A + \cos A| \leq p^2 + 1, \quad \text{teda} \quad \frac{|p \sin A + \cos A|}{p^2+1} \leq 1$$

(samy overte jednotlivé kroky :)). Potom platí

$$\left| \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-pA}}{p^2+1} \cdot (p \sin A + \cos A)\, \mathrm{d}p \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\mathrm{e}^{-pA}}{p^2+1} \cdot (p \sin A + \cos A) \right| \mathrm{d}p$$

$$\leq \int_a^b \mathrm{e}^{-pA} \cdot \underbrace{\frac{|p \sin A + \cos A|}{p^2+1}}_{\leq 1} \mathrm{d}p \leq \int_a^b \mathrm{e}^{-pA}\, \mathrm{d}p = \frac{\mathrm{e}^{-aA} - \mathrm{e}^{-bA}}{A} \leq \frac{\overbrace{\mathrm{e}^{-aA}}^{\leq 1}}{A} \leq \frac{1}{A}$$

(samy pozorne overte jednotlivé kroky :)). Využitím tejto nerovnosti v identite (7) dostaneme

$$\left| \int_A^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}\right) \cdot \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{A}.$$

Nakoľko posledný integrál konverguje rovnomerne vzhľadom na premennú b na intervale $[a, \infty)$ (pokúste sa samy dokázať pomocou Weierstrassovho kritéria :)), limitovaním pre $b \to \infty$ máme

$$\lim_{b\to\infty}\left|\int_A^\infty \left(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}\right)\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{A}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\int_A^\infty \lim_{b\to\infty}\left(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}\right)\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{A}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\int_A^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{A}.$$

Posledná nerovnosť zrejme platí pre každé $a > 0$. Tým sme dokázali reláciu v (6) (po premennovaní a na p :)). Už sa blížime do cieľa :). Nerovnosť v (6) nám totiž umožňuje vykonať nasledujúce odhady výrazu $\left|\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - F(p)\right|$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - F(p)\right| &= \left|\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px}\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^A \mathrm{e}^{-px}\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_A^\infty \mathrm{e}^{-px}\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_0^A (1-\mathrm{e}^{-px})\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_A^\infty \mathrm{e}^{-px}\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le \left|\int_0^A (1-\mathrm{e}^{-px})\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| + \underbrace{\left|\int_A^\infty \mathrm{e}^{-px}\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|}_{\le\frac{1}{A}} \le \left|\int_0^A (1-\mathrm{e}^{-px})\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| + \frac{1}{A}
\end{aligned}$$

(samy overte jednotlivé kroky :)). Pre každé $p > 0$ teda platí odhad

$$\left|\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - F(p)\right| \le \left|\int_0^A (1-\mathrm{e}^{-px})\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| + \frac{1}{A}.$$

Využitím elementárnej nerovnosti $0 \le 1-\mathrm{e}^{-u} \le u$ pre každé $u \ge 0$ (samy dokážte pomocou vhodného obrázka :)) ho môžeme ešte zlepšiť, pretože

$$\left|\int_0^A (1-\mathrm{e}^{-px})\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^A \underbrace{(1-\mathrm{e}^{-px})}_{\le px}\cdot\underbrace{\left|\frac{\sin x}{x}\right|}_{\le 1}\mathrm{d}x \le \int_0^A p\cdot x\,\mathrm{d}x = p\cdot\frac{A^2}{2}.$$

To znamená, že napokon máme

$$\left|\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - F(p)\right| \le p\cdot\frac{A^2}{2}+\frac{1}{A}.$$

No a konečne prichádzame do záverečného dejstva :). Túto nerovnosť teraz limitujeme *najprv* pre $p\to 0^+$

$$\left|\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \lim_{p\to 0^+} F(p)\right| \le \frac{1}{A},$$

a *následne* pre $A\to\infty$

$$\left|\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \lim_{p\to 0^+} F(p)\right| \le 0,$$

z čoho ihneď vyplýva vytúžená identita

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to 0^+} F(p) = \frac{\pi}{2} \qquad :).$$

Príklad 15

Priamo z definície gama funkcie dokážme, že $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Riešenie:

Pre hodnotu funkcie $\Gamma(t)$ v bode $t=1/2$ podľa definície platí

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Použitím substitúcie $u=\sqrt{x}$ prejde posledný integrál na tvar

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} u=\sqrt{x} \\ \mathrm{d}u=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ 0\rightsquigarrow 0,\quad \infty\rightsquigarrow\infty \end{array}\right| = 2\cdot\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Vzniknutý nevlastný integrál je Poissonov integrál a jeden spôsob jeho výpočtu sme už predviedli v Príklade 10 :). Ukážeme teraz iný spôsob jeho určenia s využitím teórie nevlastných dvojných integrálov. Najprv sa presvedčíme o samotnej konvergencii Poissonovho integrálu. Z Maclaurinovho rozvoja funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ máme nerovnosť

$$\mathrm{e}^{u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{n!} = 1 + u^2 + \frac{u^4}{2} + \cdots \geq 1 + u^2$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{e}^{-u^2} \leq \frac{1}{1+u^2} \quad \text{pre každé } u \in \mathbb{R}$$

(samy si to dobre premyslite :)). A keďže nevlastný integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = [\operatorname{arctg} u]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

konverguje, je konvergentný i Poissonov integrál. Potom môžeme písať

$$\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2 = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v \cdot \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-w^2}\,\mathrm{d}w = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(v^2+w^2)}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

(premenovanie integračnej premennej nemá vplyv na hodnotu integrálu ;)). Na posledný dvojnásobný integrál aplikujeme transformáciu do polárnych súradníc, konkrétne

$$v = \rho\cos\varphi, \quad w = \rho\sin\varphi.$$

Nakoľko integrujeme cez celý prvý kvadrant, polárny uhol φ prebieha interval $[0, \pi/2]$, kým sprievodič ρ postupne nadobúda všetky nezáporné hodnoty, t.j.,

$$\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho^2} \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho\right] \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho^2} \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \quad :)$$

(detaily výpočtu nechávame na čitateľa ;)). Pre hodnotu Poissonovho integrálu a následne i pre hľadanú hodnotu gama funkcie potom dostaneme

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Príklad 16
Dokážme identitu $\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t)$ pre každé $t \in (0, \infty)$.

Riešenie:
Na nevlastný integrál $\Gamma(t+1)$, $t > 0$, vhodne aplikujeme metódu per-partes. Postupne dostávame (samy overte detaily výpočtu :))

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{-x}, & u = -\mathrm{e}^{-x}, \\ v = x^t, & v' = t \cdot x^{t-1} \end{array} \right| = \underbrace{\left[-x^t \cdot \mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty}_{0}$$

$$+ \int_0^\infty t \cdot x^{t-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = t \cdot \int_0^\infty x^{t-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = t \cdot \Gamma(t).$$

Príklad 17
S využitím beta funkcie nájdime hodnotu určitého integrálu

$$I = \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x, \quad a > 0.$$

Riešenie:
V predloženom určitom integrále vykonáme substitúciu $x = a\sqrt{t}$. Dostaneme

$$I = \left| \begin{array}{c} x = a\sqrt{t} \\ \mathrm{d}x = \frac{a}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 0, \quad a \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \frac{a^4}{2} \cdot \int_0^1 \sqrt{t} \cdot \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{2} \cdot \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} \cdot (1-t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Posledný určitý integrál je však hodnota beta funkcie v bode $[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, t.j.,

$$I = \frac{a^4}{2} \cdot B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^4}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)} = \frac{a^4}{2} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{a^4}{2} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}\right]^2}{2!} = \frac{\pi a^4}{16} \qquad :).$$

Určitý integrál I možno samozrejme vypočítať i priamou integráciou (samy overte náročnosť oboch postupov :)).