Príklady na precvičovanie – plošné integrály, Gaussova–Ostrogradského a Stokesova integrálna veta

Riešené príklady

Príklad 1

Vypočítajme plošný integrál prvého druhu

$$I = \int_\sigma \left(z + 2x + \frac{4}{3}\,y\right) \mathrm{d}S,$$

kde plocha σ je časť grafu funkcie $z = 4 - 2x - \frac{4}{3}\,y$ na elementárnej oblasti

$$M = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3 - \frac{3}{2}\,x \right\}.$$

Riešenie:

Teória plošných integrálov má mnoho analógií s teóriou krivkových integrálov. I v tomto prípade musíme plochu σ vhodne parametrizovať. Nakoľko sa jedná o dvojrozmerný objekt, pracujeme s dvomi parametrami u a v. V našom príklade je plocha σ časťou grafu funkcie dvoch premenných. Preto je výhodne zvoliť samotné premenné x a y za parametre. Máme teda

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 4 - 2u - \frac{4}{3}\,v,$$

pričom body $[u, v]$ patria do elementárnej oblasti M s vyjadrením

$$0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 3 - \frac{3}{2}\,u$$

(všimnime si analógiu s krivkovými integrálmi; pri nich parameter t prebiehal nejaký jednorozmerný interval, pri plošných integráloch parametre u, v prebiehajú nejakú rovinnú elementárnu oblasť :)). Vektor

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \big(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\big), \quad [u, v] \in M,$$

sa nazýva *polohový vektor* plochy σ. Je to vektor so začiatočným bodom $[0, 0, 0]$ a s koncovým bodom na ploche σ. Polohový vektor $\boldsymbol{r}(u, v)$ a elementárna oblasť M udávajú úplnú informáciou o danej ploche σ (tak ako polohový vektor $\varphi(t)$ a vhodný interval pre t jednoznačne určovali krivku φ :)). Parciálne derivácie $\boldsymbol{r}'_u(u,v)$ a $\boldsymbol{r}'_v(u,v)$ predstavujú dva lineárne nezávislé *dotykové vektory* plochy σ a ich vektorový súčin

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \pm \boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_u(u,v)$$

predstavuje *normálový vektor* plochy σ v jej danom bode (premyslite si to; lineárne nezávislé vektory $\boldsymbol{r}'_u(u,v)$ a $\boldsymbol{r}'_v(u,v)$ sú smerové vektory dotykovej roviny ku ploche σ v jej danom bode a vektor $\boldsymbol{n}(u,v)$ je pre obidve znamienka na túto rovinu kolmý :)). Poznamenajme, že pri výpočte plošných integrálov prvého druhu voľba znamienka normálového vektora $\boldsymbol{n}(u,v)$ nehrá žiadnu úlohu, pretože sa pracuje iba s jeho absolútnou hodnotou $\|\boldsymbol{n}(u,v)\|$. V našom prípade teda máme

$$\boldsymbol{r}'_u(u,v) = \big(x'_u(u,v),\ y'_u(u,v),\ z'_u(u,v)\big) = (1,\ 0,\ -2),$$

$$\boldsymbol{r}'_v(u,v) = \big(x'_v(u,v),\ y'_v(u,v),\ z'_v(u,v)\big) = (0,\ 1,\ -4/3),$$

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_u(u,v) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4/3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \boldsymbol{i} + \frac{4}{3} \cdot \boldsymbol{j} + 1 \cdot \boldsymbol{k} = (2,\ 4/3,\ 1),$$

$$\|\boldsymbol{n}(u,v)\| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{61}}{3}$$

(vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ tvoria kanonickú bázu euklidovského priestoru $\mathbb{E}^3$). Plošný integrál v zadaní príkladu teraz prepíšeme na (Riemannov) *dvojný* integrál s integračnými premennými u a v a s oborom integrácie M. Platí

$$I = \iint_M \underbrace{\left(4 - 2u - \frac{4}{3}\,v + 2u + \frac{4}{3}\,v\right)}_{z+2x+\frac{4}{3}\,y} \cdot \underbrace{\|\boldsymbol{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}_{\mathrm{d}S} = \iint_M \frac{4\sqrt{61}}{3}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Vzniknutý dvojný integrál už hravo vypočítame pomocou Fubiniho vety prepisom na dvojnásobný integrál (samy overte detaily výpočtu :))

$$I = \int_0^2 \left[\int_0^{3-\frac{3}{2}u} \frac{4\sqrt{61}}{3}\,\mathrm{d}v \right] \mathrm{d}u = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}\,u \right) \mathrm{d}u = 4\sqrt{61} \quad :).$$

Príklad 2

Stanovme plošný integrál prvého druhu

$$I = \int_\sigma z\,\mathrm{d}S,$$

pozdĺž plochy σ s parametrickým vyjadrením

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = v, \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi].$$

Riešenie:

V tomto prípade už máme danú parametrizáciu plochy σ. Jej polohový vektor $\boldsymbol{r}(u,v)$ má preto tvar

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big) = (u\cos v,\ u\sin v,\ v).$$

Určíme normálový vektor $\boldsymbol{n}(u,v)$ plochy σ a jeho veľkosť, t.j.,

$$\boldsymbol{r}'_u(u,v) = (\cos v,\ \sin v,\ 0), \qquad \boldsymbol{r}'_v(u,v) = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 1),$$

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_u(u,v) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v,\ -\cos v,\ u),$$

$$\|\boldsymbol{n}(u,v)\| = \sqrt{(\sin v)^2 + (-\cos v)^2 + u^2} = \sqrt{1+u^2}.$$

Po dosadení do zadania príkladu dostávame pre hľadaný integrál I vyjadrenie

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} v \cdot \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} v \cdot \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}v \right] \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+u^2} \cdot \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}u = 2\pi^2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, \mathrm{d}u.$$

Posledný určitý integrál vypočítame napríklad metódou per-partes

$$\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, \mathrm{d}u = \left| \begin{array}{ll} p' = 1, & q = \sqrt{1+u^2} \\ p = u, & q' = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \end{array} \right| = \left[u\sqrt{1+u^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}u$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}u = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{-1+(1+u^2)}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}u$$

$$= \sqrt{2} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}u$$

$$= \sqrt{2} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}u - \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, \mathrm{d}u.$$

Z poslednej rovnosti teda vyplýva

$$2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, \mathrm{d}u = \sqrt{2} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}u \quad :).$$

Ale z Matematickej analýzy I vieme, že

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}u = \left[\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

(samy overte ;)), preto máme

$$2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, \mathrm{d}u = \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right),$$

a následne pre integrál I v zadaní príkladu platí

$$I = \pi^2 \cdot \left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \quad :).$$

Príklad 3
Určme obsah plochy, ktorá je časťou grafu funkcie $z = x^2 + y^2$ nachádzajúceho sa vo vnútri valca $x^2 + y^2 = 1$.

Riešenie:
Toto je jedna zo základných aplikácií plošného integrálu prvého druhu. Ak σ je po častiach hladká plocha definovaná na rovinnej oblasti M, potom pre jej obsah platí

$$S = \int_\sigma \mathrm{d}S.$$

V našom prípade má plocha σ parametrické vyjadrenie

$$x = u, \quad y = v, \quad z = u^2 + v^2,$$

pričom body $[u, v]$ prebiehajú vnútrom kružnice $M : u^2 + v^2 = 1$ (samy si to dobre premyslite a nakreslite vhodný obrazok; rovinná oblasť M je priemet plochy σ do roviny xy :)). Polohový vektor $\boldsymbol{r}(u, v)$ plochy σ má potom tvar

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (u,\ v,\ u^2 + v^2),$$

pričom postupne dostávame

$$\boldsymbol{r}'_u(u, v) = (1,\ 0,\ 2u), \qquad \boldsymbol{r}'_v(u, v) = (0,\ 1,\ 2v),$$

$$\boldsymbol{n}(u, v) = \boldsymbol{r}'_u(u, v) \times \boldsymbol{r}'_u(u, v) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u,\ -2v,\ 1),$$

$$\|\boldsymbol{n}(u, v)\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}.$$

Využitím vyššie uvedeného vzorca pre hľadaný obsah máme

$$S = \iint_M \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

V poslednom dvojnom integrále sa ukazuje výhodné použiť transformáciu do polárnych súradníc, konkrétne

$$u = \rho \cos\varphi, \quad v = \rho \sin\varphi.$$

V našom prípade $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ a $0 \leq \rho \leq 1$ (samy si premyslite ;)), a teda

$$S = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \sqrt{4\rho^2 + 1} \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} \cdot \sqrt{(4\rho^2 + 1)^3} \right]_0^1 \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} \cdot 2\pi = \frac{\pi \cdot \left(5\sqrt{5} - 1\right)}{6} \qquad :).$$

Príklad 4

Pomocou plošného integrálu prvého druhu odvoďme vzorec na výpočet povrchu gule s polomerom R.

Riešenie:

Pre jednoduchosť uvažujme guľovú plochu σ so stredom v bode $[0, 0, 0]$, t.j.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Plocha σ má napríklad parametrické vyjadrenie

$$x = R \cos u \sin v, \quad y = R \sin u \sin v, \quad z = R \cos v, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

(parametre u, v predstavujú sférické súradnice φ, θ, samy si to dobre premyslite ;)). Pre polohový a normálový vektor $\boldsymbol{r}(u, v)$ a $\boldsymbol{n}(u, v)$ plochy σ teda dostávame vyjadrenia

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (R \cos u \sin v, \ R \sin u \sin v, \ R \cos v),$$

$$\boldsymbol{r}'_u(u, v) = (-R \sin u \sin v, \ R \cos u \sin v, \ 0),$$
$$\boldsymbol{r}'_v(u, v) = (R \cos u \cos v, \ R \sin u \cos v, \ -R \sin v),$$

$$\boldsymbol{n}(u, v) = \boldsymbol{r}'_u(u, v) \times \boldsymbol{r}'_u(u, v) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -R \sin u \sin v & R \cos u \sin v & 0 \\ R \cos u \cos v & R \sin u \cos v & -R \sin v \end{vmatrix}$$

$$= (-R^2 \cos u \sin^2 v, \ -R^2 \sin u \sin^2 v, \ -R^2 \sin v \cos v),$$

$$\|\boldsymbol{n}(u, v)\| = \sqrt{R^4 \cos^2 u \sin^4 v + R^4 \sin^2 u \sin^4 v + R^4 \sin^2 v \cos^2 v} = R^2 \sin v$$

(samy overte detaily výpočtov :)). Podľa predchádzajúceho príkladu bude mať potom hľadaný vzorec pre povrch danej gule tvar

$$S = \int_\sigma \mathrm{d}S = \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} R^2 \sin v \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = R^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin v \,\mathrm{d}v\right] \mathrm{d}u$$

$$= R^2 \cdot \int_0^{2\pi} [-\cos v]_0^{\pi} \,\mathrm{d}u = R^2 \cdot \int_0^{2\pi} 2 \,\mathrm{d}u = 2R^2 \cdot [u]_0^{2\pi} = 4\pi R^2 \quad :).$$

Príklad 5

Vypočítajme plošný integrál druhého druhu

$$I = \int_\sigma (x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

kde σ je časť grafu funkcie $z = xy + 1$ na štvorci $[0,1] \times [0,1]$ orientovaná tak, že jej normálový vektor zviera s vektorom $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$ ostrý uhol.

Riešenie:

Pri výpočte plošných integrálov druhého druhu postupujeme podobne ako pri plošných integráloch prvého typu, avšak v tomto prípade musíme zohľadniť i *orientáciu* plochy σ. Orientovať plochu σ znamená dopredu zvoliť jednu z jej dvoch strán, pričom táto voľba sa realizuje pomocou výberu jedného z normálových vektorov $\boldsymbol{n}(u,v) = \pm\boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_u(u,v)$. Konkrétne, ak σ je jednoduchá, hladká a orientovaná plocha s normálovým vektorom $\boldsymbol{n}(u,v)$ a $\boldsymbol{r}(u,v)$ je nejaká jej parametrizácia, potom v prípade rovnosti

$$\boldsymbol{n}(u,v) = +\boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_u(u,v) \quad \text{pre každé } [u,v] \in M$$

hovoríme, že daná plocha σ je orientovaná *súhlasne* s paramaterizáciou $\boldsymbol{r}(u,v)$. V opačom prípade, t.j., ak $\boldsymbol{n}(u,v) = -\boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_u(u,v)$, je plocha σ orientovaná *nesúhlasne* s danou parametrizáciou $\boldsymbol{r}(u,v)$. V našom príklade má plocha σ napríklad parametrizáciu

$$x = u, \quad y = v, \quad z = uv + 1, \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,1],$$

teda jej polohový vektor $\boldsymbol{r}(u,v)$ spĺňa

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (u,\ v,\ uv + 1) \quad \text{pre každé } (u,v) \in [0,1] \times [0,1].$$

Ďalej postupne dostávame

$$\boldsymbol{r}'_u(u,v) = (1,\ 0,\ v), \quad \boldsymbol{r}'_v(u,v) = (0,\ 1,\ u),$$

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \pm\boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_u(u,v) = \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = \pm(-v,\ -u,\ 1).$$

Plocha σ je podľa zadania príkladu orientovaná tak, aby uhol vektorov $\boldsymbol{n}(u,v)$ a $\boldsymbol{k}$ bol ostrý. Pomocou analytickej geometrie je tento fakt ekvivalentný s tým, že ich skalárny súčin $\boldsymbol{n}(u,v)\cdot\boldsymbol{k}$ je *kladný* (samy si dobre premyslite :)). Keďže

$$\boldsymbol{n}(u,v)\cdot\boldsymbol{k} = \pm(-v,\ -u,\ 1)\cdot(0,\ 0,\ 1) = \pm 1,$$

vidíme, že normálový vektor $\boldsymbol{n}(u,v)$ musí spĺňať

$$\boldsymbol{n}(u,v) = +(-v,\ -u,\ 1) \quad \text{pre každé } (u,v) \in [0,1]\times[0,1].$$

Predpísaná orientácia plochy σ je teda súhlasná so zvolenou parametrizáciou $\boldsymbol{r}(u,v)$. Teraz môžeme, podobne ako pri plošnom integrále prvého druhu, previesť integrál I v zadaní príkladu na dvojný integrál. Postupne platí

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \underbrace{(u,\ v,\ uv+1)}_{(x,y,z)} \underbrace{\cdot}_{\text{skalárny súčin}} \underbrace{\boldsymbol{n}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}_{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} (u,\ v,\ uv+1)\cdot(-v,\ -u,\ 1)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^1 \left[\int_0^1 (1-uv)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^1 \left[v - \frac{uv^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}u = \int_0^1 \left(1-\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}u = \left[u - \frac{u^2}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4} \quad :).$$

Príklad 6

Pre $R > 0$ určme plošný integrál druhého druhu

$$I = \int_\sigma (z-R)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde σ je časť guľovej plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2zR, \quad R \le z \le 2R,$$

orientovanej normálou von.

Riešenie:
Plocha σ je zrejme časťou grafu funkcie

$$z = R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

na kruhu $M : x^2 + y^2 \le R^2$ (samy overte pomocou vhodného obrázka ;)). Budeme preto pracovať s parametrizáciou

$$x = u, \quad y = v, \quad z = R + \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, \quad [u, v] \in M.$$

Pre príslušný normálový vektor $\boldsymbol{n}(u, v)$ plochy σ potom máme

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & \frac{-u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \end{vmatrix}$$

$$= \pm \left(\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, \ \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, \ 1 \right)$$

(samy si premyslite :)). Nakoľko podľa zadania príkladu plocha σ (resp. celá uzavretá guľová plocha) je orientovaná normálou von, ten správny normálový vektor je

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, \ \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, \ 1 \right) \quad \text{pre každé } [u, v] \in M$$

(i toto si samy dobre premyslite pomocou vhodného obrázka ;)). Plošný integrál v zadaní príkladu je uvedený v alternatívnom vyjadrení, pri ktorom sa vektor d$\boldsymbol{S}$ chápe v zmysle

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \ \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

a integrovaná vektorová funkcia $f(x, y, z)$ má tvar

$$f(x, y, z) = \left(0, \ 0, \ (z - R)^2\right).$$

Pri prepise integrálu I na dvojný integrál s integračnými premennými u, v sa potom symbol dxdy pomocou vyššie uvedených výpočtov nahradzuje

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y \rightsquigarrow \overbrace{+}^{\text{orientácia plochy } \sigma} \underbrace{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}_{\text{jakobián transformácie } [u,v]\to[x,y]} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

(je to podobné ako pri transformácii dvojného integrálu do nových integračných premenných, samy si dobre premyslite :)). Teda

$$I = \iint_M \underbrace{(R^2 - u^2 - v^2)}_{(z-R)^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Získaný dvojný integrál vypočítame napríklad pomocou transformácie do polárnych súradníc

$$u = \rho\cos\varphi, \quad v = \rho\sin\varphi, \quad (\rho, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$$

(samy overte :)). Napokon postupne dostávame

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \left(R^2 - \rho^2\right) \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho\right] \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\left(R^2-\rho^2\right)^2}{4}\right]_0^R \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi R^4}{2}$$

(samy overte detaily výpočtu :)).

Príklad 7

Pomocou plošného integrálu druhého druhu odvoďme vzorec na výpočet objemu vnútra elipsoidu s polosami $a, b, c > 0$.

Riešenie:

Pri riešení tohto príkladu využívame nasledujúcu vlastnosť plošného integrálu druhého druhu. Ak σ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká plocha, orientovaná normálou von, potom hodnota

$$V = \frac{1}{3} \cdot \int_\sigma [x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$$

vyjadruje objem vnútra plochy σ. V našom prípade uvažujme pre jednoduchosť elipsoid σ so stredom v bode $[0,0,0]$ a s polosami na súradnicových osiach, t.j.,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Jeho vhodné parametrické vyjadrenie má napríklad tvar

$$x=a\cdot\cos u\sin v,\quad x=b\cdot\sin u\sin v,\quad z=c\cdot\cos v,\quad (u,v)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

(samy si premyslite, že parametre u,v znamenajú sférické súradnice φ,θ :)). Pre normálový vektor $\boldsymbol{n}(u,v)$ plochy σ potom máme

$$\boldsymbol{n}(u,v)=\pm\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ x'_u&y'_u&z'_u\\ x'_v&y'_v&z'_v\end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ -a\cdot\sin u\sin v&b\cdot\cos u\sin v&0\\ a\cdot\cos u\cos v&b\cdot\sin u\cos v&-c\cdot\sin v\end{vmatrix}$$

$$=\pm\left(-bc\cdot\cos u\sin^2 v,\ -ac\cdot\sin u\sin^2 v,\ -ab\cdot\sin v\cos v\right).$$

Nakoľko pre $u=0$ a $v=\pi/2$ je $\boldsymbol{n}(0,\pi/2)=\pm(-bc,0,0)$ a $bc>0$, správny normálový vektor, orientovaný von z vnútra plochy σ je

$$\boldsymbol{n}(u,v)=-\left(-bc\cdot\cos u\sin^2 v,\ -ac\cdot\sin u\sin^2 v,\ -ab\cdot\sin v\cos v\right)$$

(samy si veľmi dobre premyslite :)). Na základne tohto poznatku potom platí

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ \rightsquigarrow\ -\begin{vmatrix}y'_u&y'_v\\ z'_u&z'_v\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=-\begin{vmatrix}b\cdot\cos u\sin v&b\cdot\sin u\cos v\\ 0&-c\cdot\sin v\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=bc\cdot\cos u\sin^2 v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}z\mathrm{d}x\ \rightsquigarrow\ -\begin{vmatrix}z'_u&z'_v\\ x'_u&x'_v\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=-\begin{vmatrix}0&-c\cdot\sin v\\ -a\cdot\sin u\sin v&a\cdot\cos u\cos v\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=ac\cdot\sin u\sin^2 v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \rightsquigarrow\ -\begin{vmatrix}x'_u&x'_v\\ y'_u&y'_v\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=-\begin{vmatrix}-a\cdot\sin u\sin v&a\cdot\cos u\cos v\\ b\cdot\cos u\sin v&b\cdot\sin u\cos v\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= ab \cdot \sin v \cos v \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Dosadením do vyššie uvedeného vzorca pre objem vnútra plochy σ dostaneme

$$V = \frac{1}{3} \cdot \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \left[abc \cdot \cos^2 u \sin^3 v + abc \cdot \sin^2 u \sin^3 v + abc \cdot \sin v \cos^2 v\right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \frac{abc}{3} \cdot \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \sin v \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{abc}{3} \cdot \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin v \, \mathrm{d}v\right] \mathrm{d}u$$

$$= \frac{abc}{3} \cdot \int_0^{2\pi} [-\cos v]_0^{\pi} \, \mathrm{d}u = \frac{2abc}{3} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u = \frac{4}{3} \cdot \pi abc \quad :).$$

Príklad 8

Pomocou Gaussovej–Ostrogradského integrálnej vety vypočítajme plošný integrál druhého druhu

$$I = \int_{\sigma} f(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

kde vektorová funkcia $f(x, y, z) = (x^2, \, y^2, \, z^2)$ a plocha σ je hranica kocky

$$M \ : \ [0, a] \times [0, a] \times [0, a], \quad a > 0,$$

orientovaná normálou von.

Riešenie:

Gaussova–Ostrogradského integrálna veta je významným tvrdením s početnými aplikáciami najmä vo fyzike. Vyjadruje súvislosť medzi plošným integrálom druhého druhu pozdĺž uzavretej plochy a trojným integrálom cez vnútro tejto plochy. Konkrétne, ak σ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká plocha, orientovaná normálou von a funkcie $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}$, $\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}$ a $\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$ sú spojité na oblasti M tvorenej plochou σ a jej vnútrom, potom platí

$$\int_{\sigma} [P(x, y, z) \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x, y, z) \, \mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x, y, z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y]$$

$$= \iiint_M \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Posledná identita sa obvykle píše v kompaktnejšom tvare

$$\int_\sigma f(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_M \operatorname{div} f(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $f(x,y,z) = (P(x,y,z),\, Q(x,y,z),\, R(x,y,z))$ a skalárna funkcia

$$\operatorname{div} f(x,y,z) := \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$$

sa nazýva *divergencia* vektorového poľa $f(x,y,z)$. V našom prípade máme

$$P(x,y,z) = x^2, \quad Q(x,y,z) = y^2, \quad R(x,y,z) = z^2,$$

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} = 2z.$$

Všetky tieto funkcie sú spojité vo vnútri i na hranici kocky M v zadaní príkladu, pričom daná plocha σ zrejme spĺňa všetky predpoklady Gaussovej–Ostrogradského vety (samy overte :)). Pre hľadaný integrál I potom platí

$$I = \iiint_M (2x + 2y + 2z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2 \cdot \int_0^a \left[\int_0^a \left[\int_0^a (x + y + z)\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z.$$

Postupným výpočtom dostávame

$$I = 2 \cdot \int_0^a \left[\int_0^a \left[\frac{x^2}{2} + xy + xz \right]_0^a \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z = 2 \cdot \int_0^a \left[\int_0^a \left(\frac{a^2}{2} + ay + az \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z$$

$$= 2 \cdot \int_0^a \left[y \cdot \frac{a^2}{2} + a \cdot \frac{y^2}{2} + azy \right]_0^a \mathrm{d}z = 2 \cdot \int_0^a \left(a^3 + a^2 z \right) \mathrm{d}z = 2 \cdot \left[a^3 z + a^2 \cdot \frac{z^2}{2} \right]_0^a = 3a^4.$$

Príklad 9

Využitím Stokesovej integrálnej vety stanovme krivkový integrál druhého druhu

$$I = \int_\varphi f(x,y,z) \cdot \mathrm{d}r,$$

kde vektorová funkcia $f(x, y, z)$ má tvar

$$f(x, y, z) = (x(z - y),\ y(x - z),\ z(y - x))$$

a trajektória krivky φ je obvod rovinného trojuholníka ABC s vrcholmi

$$A = [a,\, 0,\, 0], \quad B = [0,\, a,\, 0], \quad C = [0,\, 0,\, a], \quad a > 0,$$

orientovaný v smere $A \to B \to C$.

Riešenie:
V tomto príklade ilustrujeme ďalšie významné tvrdenie s výrazne fyzikálnym uplatnením. Stokesova integrálna veta ukazuje, ako možno krivkový integrál druhého druhu pozdĺž uzavretej (priestorovej) krivky transformovať na plošný integrál druhého druhu cez plochu, ktorej okrajom je daná krivka. Na jej formuláciu je nutné zaviesť dva pojmy. Hovoríme, že plocha σ s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}(u, v)$, $[u, v] \in M \subset \mathbb{R}^2$, je hladká *druhého rádu* ak funkcie $\boldsymbol{r}''_{uu}(u, v)$, $\boldsymbol{r}''_{uv}(u, v)$, $\boldsymbol{r}''_{vu}(u, v)$ a $\boldsymbol{r}''_{vv}(u, v)$ sú spojité na množine M. Ďalej povieme, že uzavretá orientovaná krivka φ ležiaca na orientovanej ploche σ je s touto plochou *súhlasne orientovaná*, ak platí tzv. pravidlo pravej ruky – ak palec pravej ruky ukazuje v smere normálového vektora plochy σ, určujúceho jej orientáciu, potom ostatné prsty pravej ruky ukazujú v smere orientácie krivky φ (samy si premyslite na vhodnom príklade :)). No a Stokesova integrálna veta potom hovorí, že ak σ je jednoduchá, po častiach hladká plocha druhého rádu a krivka φ je jej s ňou súhlasne orientovaný okraj, a funkcie $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$ a $\frac{\partial R}{\partial y}$ sú spojité na ploche σ, potom platí rovnosť

$$\int_\varphi [P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z]$$

$$= \int_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right].$$

Táto identita sa zvykne písať v tvare

$$\int_\varphi f(x, y, z) \cdot \mathrm{d}r = \int_\sigma \operatorname{rot} f(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

kde $f(x, y, z) = (P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z))$ a vektorová funkcia

$$\operatorname{rot} f(x, y, z) := \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

sa označuje ako *rotácia* vektorového poľa $f(x,y,z)$. V našom prípade krivka φ leží v rovine $x+y+z=a$ (samy overte :)). Za plochu σ zvolíme časť tejto roviny, ktorá je ohraničená krivkou φ, t.j., vnútro trojuholníka ABC. Plocha σ potom má parametrické vyjadrenie

$$x=u, \quad y=v, \quad z=a-u-v, \quad [u,v]\in M,$$

kde M je rovinná oblasť daná nerovnosťami

$$0\le u\le a, \quad 0\le v\le a-u$$

(samy si premyslite pomocou vhodného obrázka ;)). Ďalej máme

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(u,\ v,\ a-u-v), \quad \boldsymbol{r}'_u(u,v)=(1,\ 0,\ -1), \quad \boldsymbol{r}'_v(u,v)=(0,\ 1,\ -1),$$

$$\boldsymbol{n}(u,v)=\pm\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\pm(1,\ 1,\ 1).$$

V súlade s predpokladmi Stokesovej integrálnej vety plochu σ orientujeme súhlasne s orientáciou krivky φ. Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že to odpovedá výberu normálového vektora $\boldsymbol{n}(u,v)=+(1,\ 1,\ 1)$:). Plocha σ je zrejme hladkou druhého rádu (samy overte :)) a funkcie

$$P(x,y,z)=x(z-y), \quad Q(x,y,z)=y(x-z), \quad R(x,y,z)=z(y-x),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-x, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=x, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=-y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=y, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=-z, \quad \frac{\partial R}{\partial y}=z$$

sú spojité na ploche σ. Pre krivkový integrál I v zadaní príkladu teda platí

$$I=\int_\sigma \underbrace{(z+y,\ x+z,\ y+x)}_{\operatorname{rot} f(x,y,z)}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Prepisom na dvojný integrál s integračnými prememnnými u,v dostaneme

$$I=\iint_M (a-u,\ a-v,\ u+v)\cdot \underbrace{\boldsymbol{n}(u,v)}_{(1,1,1)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2a\cdot\iint_M \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=2a\cdot\int_0^a\left[\int_0^{a-u}\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u=2a\cdot\int_0^a(a-u)\,\mathrm{d}u=2a\cdot\left[-\frac{(a-u)^2}{2}\right]_0^a=a^3.$$

Príklad 10
Využitím Stokesovej integrálnej vety vypočítajme plošný integrál druhého druhu

$$I = \int_\sigma \operatorname{rot} f(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

kde vektorová funkcia $f(x,y,z) = (y^2,\ xy,\ xz)$ a plocha σ je časť guľovej plochy $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 1$, orientovaná tak, že jej normálový vektor $\boldsymbol{n}$ má nezápornú z-ovú súradnicu.

Riešenie:
V tomto príklade aplikujeme Stokesovu integrálnu vetu opačne – plošný integrál prevedieme na krivkový :). Nakoľko

$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = (0,\ -z,\ -y),$$

funkcie $f(x,y,z)$ a $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sú spojité na ploche σ (samy overte :)). Okrem toho plocha σ je hladká druhého rádu (i toto si samy premyslite :)). Jej okrajom je zrejme kružnica $\varphi : x^2+y^2=1$ (v rovine xy). Predpokladajúc kladnú orientáciu krivky φ, v súlade so zadaním príkladu bude plocha σ súhlasne orientovaná s krivkou φ (samy overte ;)). Podľa Stokesovej integrálnej vety má potom plošný integrál I vyjadrenie

$$I = \int_\varphi f(x,y,z) \cdot \mathrm{d}r = \int_\varphi (y^2,\ xy,\ xz) \cdot \mathrm{d}r.$$

Aby sme stanovili vzniknutý krivkový integrál, parametrizujeme krivku φ, avšak ako krivku v $\mathbb{R}^3$, t.j.,

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = 0, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(samy si dobre premyslite :)). Táto parametrizácia je súhlasná s kladnou orientáciou krivky φ. Ďalej máme

$$x'(t) = -\sin t, \quad y'(t) = \cos t, \quad z'(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ 0).$$

Napokon dostávame

$$I = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t,\ \cos t \sin t,\ 0) \cdot (-\sin t,\ \cos t,\ 0)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^2 t \sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (2\cos^2 t - 1)\cdot \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = \cos t \\ \mathrm{d}u = -\sin t \cdot \mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1, \quad 2\pi \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \int_1^1 (1-u^2)\,\mathrm{d}u = 0 \qquad :)$$

(samy si premyslite tieto výpočty ;)). Ak sa niekomu zdá použitá substitúcia nekorektná a podozrivá, môže overiť tento alternatívny výpočet

$$\int_0^{2\pi} (2\cos^2 t - 1)\cdot \sin t\,\mathrm{d}t = 2\cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\cdot \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} - [-\cos t]_0^{2\pi} = 0 \qquad :).$$

Príklad 11
Rozhodnime, či krivkový integrál druhého druhu

$$\int_\varphi \left[(3x^2 - 3yz + 2)\,\mathrm{d}x + (3y^2 - 3xz + \ln y + 1)\,\mathrm{d}y + (3z^2 - 3xy + 1)\,\mathrm{d}z\right]$$

závisí na integračnej ceste φ v oblasti $\Omega = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ y > 0\}$. V prípade zápornej odpovede nájdime hodnotu

$$I = \int_{[0,1,0]}^{[1,1,1]} \left[(3x^2 - 3yz + 2)\,\mathrm{d}x + (3y^2 - 3xz + \ln y + 1)\,\mathrm{d}y + (3z^2 - 3xy + 1)\,\mathrm{d}z\right].$$

Riešenie:
Pomocou Greenovej integrálnej vety sa dá odvodiť kritérium nezávislosti krivkového integrálu druhého druhu na integračnej ceste v jednoducho súvislej rovinnej oblasti. Podobne, Stokesova integrálna veta (ako zovšeobecnenie Greenovej vety :)), poskytuje kritérium na nezávislosť krivkového integrálu druhého druhu na integračnej ceste φ v jednoducho súvislej oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Konkrétne, spojito diferencovateľné vektorové pole

$$f(x,y,z) = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

je potenciálové v jednoducho súvislej oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ práve vtedy, keď platí

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{pre každé } [x, y, z] \in \Omega$$

(v reči vyššie zavedených objektov posledné identity znamenajú, že rotácia poľa $f(x, y, z)$ spĺňa $\operatorname{rot} f(x, y, z) = 0$ na celom Ω; vektorové pole $f(x, y, z)$ s touto vlastnosťou sa preto niekedy označuje aj termínom *nevírové* v oblasti Ω :)). V našom prípade máme

$$P = 3x^2 - 3yz + 2, \quad Q = 3y^2 - 3xz + \ln y + 1, \quad R = 3z^2 - 3xy + 1,$$

$$R'_y = -3x = Q'_z, \quad P'_y = -3y = R'_x, \quad Q'_x = -3z = P'_y$$

a oblasť Ω je jednoducho súvislá (samy overte :)). Preto vektorové pole $f = (P, Q, R)$ je potenciálové v oblasti Ω, a teda krivkový integrál v zadaní príkladu nezávisí na integračnej ceste φ v Ω. Nájdeme teraz potenciál tohto poľa, t.j., skalárnu funkciu $V(x, y, z)$ spĺňajúcu

$$V'_x = P, \quad V'_y = Q, \quad V'_z = R \quad \text{na } \Omega.$$

Integráciou prvej rovnosti podľa premennej x dostaneme

$$V(x, y, z) = \int P(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \int (3x^2 - 3yz + 2)\,\mathrm{d}x = x^3 - 3xyz + 2x + C(y, z),$$

kde neznáma funkcia $C(y, z)$ predstavuje „integračnú konštantu“. Spätným výpočtom parciálnych derivácií V'_y a V'_z máme

$$-3xz + C'_y(y, z) = Q(x, y, z) = 3y^2 - 3xz + \ln y + 1$$

$$\Downarrow$$

$$C'_y(y, z) = 3y^2 + \ln y + 1,$$

$$-3xy + C'_z(y, z) = R(x, y, z) = 3z^2 - 3xy + 1$$

$$\Downarrow$$

$$C'_z(y, z) = 3z^2 + 1.$$

Trojrozmerný problém sme teda pretransformovali na dvojrozmerný – máme nájsť potenciál $C(y,z)$ pre dvojicu funkcií $3y^2 + \ln y + 1$ a $3z^2 + 1$:). Platí

$$C(y,z) = \int (3y^2 + \ln y + 1)\,\mathrm{d}y = y^3 + y\ln y + D(z),$$

kde funkcia $D(z)$ je integračná konštanta. Potom

$$D'(z) = 3z^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad D(z) = z^3 + z + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Hľadaný potenciál $V(x,y,z)$ vektorového poľa $f(x,y,z)$ má teda tvar

$$V(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2x + y\ln y + z + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Napokon, pre hodnotu integrálu I v druhej časti zadania príkladu dostaneme

$$I = V(1,1,1) - V(0,1,0) = (3+K) - (1+K) = 2.$$

Poznamenajme, že pre kmeňovú funkciu $V(x,y,z)$ sa dá odvodiť i explicitná formula. Nechávame na čitateľa, aby overil, že pre pevný bod $[x_0, y_0, y_0]$ je skalárna funkcia

$$V(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\,\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)\,\mathrm{d}t$$

potenciál vektorového poľa $f(x,y,z)$ spĺňajúci $V(x_0,y_0,z_0) = 0$ (derivovaním daných integrálov podľa parametrov x, y, z a využitím faktu, že pole $f(x,y,z)$ je potenciálové, nájdite parciálne derivácie funkcie $V(x,y,z)$;)). V našom prípade položiac $[x_0, y_0, z_0] = [0,1,0]$ máme

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= \int_0^x (3t^2+2)\,\mathrm{d}t + \int_1^y (3t^2 + \ln t + 1)\,\mathrm{d}t + \int_0^z (3t^2 - 3xy + 1)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^3 + 2t\right]_0^x + \left[t^3 + t\ln t\right]_1^y + \left[t^3 - 3xyt + t\right]_0^z \\ &= x^3 + 2x + y^3 + y\ln y - 1 + z^3 - 3xyz + z \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2x + y\ln y + z - 1 \quad :). \end{aligned}$$

Potom $I = V(1,1,1) - V(0,1,0) = 2 - 0 = 2.$