Co je to univerzální algebra?

Při studiu řadu algebraických struktur (grupoidy, pologrupy, grupy, komutativní grupy, okruhy, obory integrity, tělesa, polosvazy, svazy, Booleovy algebry) se často některé pojmy a úvahy opakovaly:

- homomorfismy: vždy platilo, že složením homomorfismů opět dostaneme homomorfismus;
- podobjekty (podgrupy, podokruhy, podtělesa, podsvazy, Booleovy podalgebry atd.): vždy platilo, že průnikem libovolného neprázdného systému podobjektů je opět podobjekt, což umožnilo definovat podobjekt generovaný podmnožinou ve všech případech stejnou konstrukcí;
- součiny algebraických struktur (grup, okruhů, svazů): na kartézském součinu jsme definovali stejnou strukturu.

Jedním z cílů univerzální algebry je tyto společné rysy postihnout a jednotně popsat.

Zobecnění pojmu operace na množině

Operací na množině G pro nás dosud bylo zobrazení $G \times G \to G$. Nyní tento pojem zobecníme, vždyť jsme užívali zobrazení $G \to G$ (přiřazení inverzního prvku v grupě nebo komplementu v Booleově algebře). Pracovali jsme s význačnými prvky množiny G (neutrální prvek grupy, 0 a 1 okruhu, nejmenší a největší prvek Booleovy algebry). Výběr význačného prvku lze chápat jako volbu zobrazení z jednoprvkové množiny do G.

__Definice.__ Nechť G je množina, n nezáporné celé číslo. Pak n-ární operací na množině G rozumíme zobrazení $G^n \to G$. Přitom pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme $G^n = \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{n}$, pro $n = 0$ je $G^0 = \{\emptyset\}$.

__Poznámka.__ Místo 2-ární operace budeme říkat binární operace, místo 1-ární budeme říkat unární, místo 0-ární nulární. Číslu n z definice říkáme arita dotyčné operace.

Univerzální algebra daného typu

Poznámka. Při popisu konkrétní operace jsme vždy operaci označovali nějakým symbolem, užívali jsme $+$, $\cdot$, $\vee$, $\wedge$ pro binární operace, $-$, $^{-1}$, $'$ pro unární operace, 0, 1 pro nulární operace. Těmto symbolům budeme říkat operační symboly; je podstatné, že u každého symbolu je dána arita operace, kterou symbolizuje.

Definice. Množina Ω spolu se zobrazením $a : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ se nazývá typ. Prvky množiny Ω se nazývají operační symboly. Pro $f \in \Omega$ se $a(f)$ nazývá arita symbolu f. Operační symbol, jehož arita je n, se nazývá n-ární.

Definice. Univerzální algebra typu Ω (neboli stručně Ω-algebra) je množina A, na níž je pro každý n-ární operační symbol z $f \in \Omega$ definována n-ární operace $f_A : A^n \to A$. Pro libovolné $a_1, \ldots, a_n \in A$ značíme $f_A(a_1, \ldots, a_n)$ hodnotu operace f_A na uspořádané n-tici $(a_1, \ldots, a_n)$. Pro $n = 0$ je $A^0 = \{\emptyset\}$, nulární operací je zobrazení $f_A : \{\emptyset\} \to A$ zadané jediným prvkem $f_A(\emptyset) \in A$, pro zjednodušení jej budeme zapisovat f_A místo $f_A(\emptyset)$.

Příklady Ω-algeber

1. Pro prázdný typ, tj. $\Omega = \emptyset$, je univerzální algebrou typu Ω libovolná množina.
2. Grupoid je totéž, co množina s jednou binární operací, je to tedy univerzální algebra typu, který má jeden binární operační symbol $\cdot$.
3. Každá grupa je univerzální algebra typu $\{\cdot, {}^{-1}, 1\}$. Nikoliv naopak, ne každá univerzální algebra typu $\{\cdot, {}^{-1}, 1\}$ je grupou (aby byla grupou, musí splňovat jisté axiomy).
4. Každý okruh je univerzální algebra typu $\{+, \cdot, -, 0, 1\}$.
5. Každý svaz je univerzální algebra typu $\{\vee, \wedge\}$.
6. Každá Booleova algebra je univerzální algebra typu $\{\vee, \wedge, ', 0, 1\}$.
7. Pro dané těleso T lze každý vektorový prostor nad tělesem T chápat jako univerzální algebru typu $\{+, -, 0\} \cup T$ (pro každý prvek tělesa $t \in T$ máme unární operační symbol pro skalární násobek, což je unární operace na množině vektorů: $t(v) = t.v$).

Jednoprvková Ω-algebra

Příklad. Nechť Ω je libovolný typ, $A = \{a\}$ libovolná jednoprvková množina. Pak existuje jediný způsob, jak na nosné množině A definovat Ω-algebru. Pro libovolný n-ární operační symbol $f \in \Omega$ je hodnota operace f_A na (jediné existující) n-tici $(a, \ldots, a)$ rovna (jediné možné) hodnotě a.

Poznámka. V předchozích definicích je určitá nepřesnost, správně bychom totiž měli místo o univerzální algebře A mluvit o univerzální algebře $\mathcal{A}$ s nosnou množinou A a s operacemi f_A pro každé $f \in \Omega$. Například na jedné a téže nosné množině můžeme mít definovány různé grupoidy, tedy to, o který jde grupoid, není určeno pouze nosnou množinou, ale i operací na ní. Protože to však vždy z kontextu bude patrné, můžeme si snad touto nepřesností usnadnit vyjadřování: budeme hovořit o Ω-algebře A nebo o nosné množině A.

Podalgebra Ω-algebry

<u>*Definice.*</u> Nechť A je univerzální algebra typu Ω, $H \subseteq A$ podmnožina. Řekneme, že H je podalgebra Ω-algebry A, jestliže pro každý n-ární operační symbol $f \in \Omega$ a pro každé $a_1, \dots, a_n \in H$ platí $f_A(a_1, \dots, a_n) \in H$.

<u>*Poznámka.*</u> V případě nulárního operačního symbolu $f \in \Omega$ je $n = 0$, tedy $A^0 = \{\emptyset\}$. Obraz tohoto jediného prvku jsme se dohodli značit stručně f_A místo (možná přesnějšího) označení $f_A(\emptyset)$. Podmínku z definice je tedy třeba chápat ve smyslu $f_A \in H$.

<u>*Poznámka.*</u> Obsahuje-li typ Ω alespoň jeden nulární operační symbol, pak je každá podalgebra libovolné Ω-algebry neprázdná.

<u>*Poznámka.*</u> Každá podalgebra H libovolné Ω-algebry A je sama Ω-algebrou, stačí pro každý n-ární operační symbol $f \in \Omega$ definovat f_H jako restrikci zobrazení f_A na H^n a zmenšit obor hodnot na H, pak totiž $f_H : H^n \to H$.

Příklady podalgeber

V jednotlivých případech z předchozího příkladu univerzálních algeber dostáváme tyto podalgebry:

1. Podmnožina množiny ($\Omega = \emptyset$).
2. Podgrupoid grupoidu ($\Omega = \{\cdot\}$).
3. Podgrupa grupy ($\Omega = \{\cdot, {}^{-1}, 1\}$).
4. Podokruh okruhu ($\Omega = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$).
5. Podsvaz svazu ($\Omega = \{\vee, \wedge\}$).
6. Booleova podalgebra Booleovy algebry ($\Omega = \{\vee, \wedge, ', 0, 1\}$).
7. Vektorový podprostor vektorového prostoru ($\Omega = \{+, -, 0\} \cup T$, kde T je těleso).

Svaz všech podalgeber dané Ω-algebry

<u>*Věta.*</u> *Nechť A je univerzální algebra typu Ω, I neprázdná množina. Pro každé $i \in I$ nechť je dána podalgebra $H_i \subseteq A$ algebry A. Pak jejich průnik $\bigcap_{i \in I} H_i$ je podalgebra Ω-algebry A.*

<u>*Důkaz.*</u> Nechť $f \in \Omega$ je n-ární, $a_1, \dots, a_n \in \bigcap_{i \in I} H_i$ libovolné. Pro každé $i \in I$ platí $a_1, \dots, a_n \in H_i$. Protože H_i je podalgebra, je $f_A(a_1, \dots, a_n) \in H_i$. Pak $f_A(a_1, \dots, a_n) \in \bigcap_{i \in I} H_i$.

<u>*Důsledek.*</u> *Obsahuje-li typ Ω alespoň jeden nulární operační symbol, pak je průnik libovolného neprázdného systému podalgeber dané algebry neprázdný.*

<u>*Důkaz.*</u> V tomto případě není prázdná množina podalgebrou.

<u>*Důsledek.*</u> *Nechť P je množina všech podalgeber dané univerzální algebry A typu Ω. Pak platí: $(P, \subseteq)$ je úplný svaz.*

<u>*Důkaz.*</u> $(P, \subseteq)$ má největší prvek A i infimum libovolné neprázdné podmnožiny (průnik všech podalgeber této podmnožiny).

Podalgebra generovaná podmnožinou

<u>*Definice.*</u> Nechť A je univerzální algebra typu Ω, $M \subseteq A$ podmnožina nosné množiny. Průnik všech podalgeber Ω-algebry A, které obsahují M jako svou podmnožinu, značíme $\langle M \rangle$ a nazýváme podalgebrou Ω-algebry A generovanou množinou M.

<u>*Poznámka.*</u> Díky tomu, že alespoň jedna podalgebra Ω-algebry A obsahující množinu M existuje (je jí jistě celá Ω-algebra A), podle předchozí věty je zmíněným průnikem $\langle M \rangle$ skutečně podalgebra Ω-algebry A.
Zřejmě je to ze všech podalgeber Ω-algebry A obsahujících množinu M ta nejmenší (vzhledem k množinové inkluzi).

Příklady podalgeber generovaných podmnožinou

V jednotlivých případech příkladu univerzálních algeber z předchozí kapitoly dostáváme tyto podalgebry generované množinou:

1. V případě Ω-algebry A prázdného typu $\Omega = \emptyset$ je každá podmnožina množiny A podalgebrou, proto v tomto případě pro libovolné $M \subseteq A$ je podalgebrou Ω-algebry A generovanou množinou M sama množina M.
2. Podgrupoid grupoidu generovaný množinou (tento pojem jsme v přednášce neměli).
3. Podgrupa $\langle M \rangle$ grupy generovaná množinou M.
4. Podokruh $\langle M \rangle$ okruhu generovaný množinou M.
5. Podsvaz svazu generovaný množinou (neměli jsme).
6. Booleova podalgebra Booleovy algebry generovaná množinou (neměli jsme).
7. Vektorový podprostor vektorového prostoru generovaný množinou vektorů (jeden z nejdůležitějších pojmů lineární algebry).

Homomorfismy Ω-algeber

Definice. Nechť A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω, $\varphi\colon A \to B$ zobrazení. Řekneme, že φ je homomorfismus Ω-algeber, jestliže pro každý operační symbol $f \in \Omega$ arity n a každé prvky $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

$$f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \varphi(f_A(a_1, \dots, a_n)).$$

Je-li navíc φ bijektivní, hovoříme o izomorfismu Ω-algeber. Řekneme, že Ω-algebry A a B jsou izomorfní, jestliže existuje nějaký izomorfismus Ω-algeber $A \to B$.

Poznámka. Pro nulární operační symbol předchozí podmínka samozřejmě znamená $\varphi(f_A) = f_B$.

Poznámka. Jestliže je Ω-algebra A prázdná (v tomto případě tedy typ Ω nemůže obsahovat žádný nulární operační symbol), pak pro libovolnou Ω-algebru B existuje jediný homomorfismus Ω-algeber $A \to B$, totiž prázdné zobrazení. Jestliže naopak Ω-algebra B je prázdná, pak homomorfismus Ω-algeber $A \to B$ existuje pouze v případě, kdy i Ω-algebra A je prázdná.

Příklady homomorfismů Ω-algeber

Porovnejme v jednotlivých případech předchozích příkladů tuto definici s definicemi uváděnými dříve pro jednotlivé speciální případy univerzálních algeber:

1. V případě Ω-algeber prázdného typu $\Omega = \emptyset$ je každé zobrazení homomorfismem.
2. Pro grupoidy je tato definice totožná s obvyklou definicí homomorfismu grupoidů.
3. Pro grupy byl homomorfismus definován stejně jako pro grupoidy, tedy v definici bylo vyžadováno, aby zachovával součin. Právě uvedená definice pro případ grup vyžaduje, aby homomorfismus zachovával též inverzní prvky a zobrazil neutrální prvek grupy A na neutrální prvek grupy B. Je asi jasné, proč tyto požadavky nebyly obsaženy v definici homomorfismu grup: jak jsme si dokazovali, to jsou pouhé důsledky toho, že homomorfismus grup zachovává součin.

Příklady homomorfismů Ω-algeber

4. Pro okruhy jsme v definici homomorfismu vyžadovali, aby zachovával sčítání, násobení a převáděl na sebe jedničky okruhů. Jako důsledek jsme dostali další podmínky z právě provedené obecné definice, týkající se opačných prvků a nul okruhů.
5. V případě svazů obě definice splývají: vyžaduje se, aby homomorfismus zachovával $\vee$ a $\wedge$.
6. V případě Booleových algeber jsme požadovali, aby homomorfismus zachovával $\vee$, $\wedge$, 0 a 1. Jako důsledek jsme pak obdrželi, že už nutně musí zachovávat též komplementy, proto nebylo nutné komplementy zahrnout do definice homomorfismu Booleových algeber.
7. V případě vektorových prostorů jsou homomorfismy právě lineární zobrazení.

Složení homomorfismů Ω-algeber

__Věta.__ Nechť A, B, C jsou univerzální algebry téhož typu Ω, $\varphi : A \to B$ a $\psi : B \to C$ homomorfismy Ω-algeber. Pak je též složení $\psi \circ \varphi$ homomorfismus Ω-algeber.

__Důkaz.__ Protože je φ homomorfismus Ω-algeber, pro každý operační symbol $f \in \Omega$ arity n a každé prvky $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

$$\varphi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)).$$

Protože je též ψ homomorfismus Ω-algeber, platí

$$\psi(f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))) = f_C(\psi(\varphi(a_1)), \dots, \psi(\varphi(a_n))).$$

Dohromady tedy

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)(f_A(a_1, \dots, a_n)) &= \psi(\varphi(f_A(a_1, \dots, a_n))) = \\
&= \psi(f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))) = \\
&= f_C(\psi(\varphi(a_1)), \dots, \psi(\varphi(a_n))) = \\
&= f_C((\psi \circ \varphi)(a_1), \dots, (\psi \circ \varphi)(a_n)),
\end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

Obraz v homomorfismu Ω-algeber

Věta. *Nechť A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω, $\varphi: A \to B$ homomorfismus Ω-algeber. Pak obraz Ω-algebry A v homomorfismu φ*

$$\varphi(A) = \{\varphi(a);\ a \in A\}$$

je podalgebra Ω-algebry B.

Důkaz. Zvolme libovolně operační symbol $f \in \Omega$ arity n. Pak pro každé prvky $b_1, \dots, b_n \in \varphi(A)$ existují $a_1, \dots, a_n \in A$ tak, že $\varphi(a_1) = b_1, \dots, \varphi(a_n) = b_n$. Z definice homomorfismu plyne $f_B(b_1, \dots, b_n) = f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \varphi(f_A(a_1, \dots, a_n)) \in \varphi(A)$.

Věty o izomorfismech Ω-algeber

<u>*Věta.*</u> *Nechť A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω, $\varphi : A \to B$ izomorfismus Ω-algeber. Pak inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : B \to A$ je také izomorfismus Ω-algeber.*

<u>*Důkaz.*</u> Zvolme libovolně operační symbol $f \in \Omega$ arity n. Pak pro každé prvky $b_1, \dots, b_n \in B$ existují $a_1, \dots, a_n \in A$ tak, že $\varphi(a_1) = b_1$, ..., $\varphi(a_n) = b_n$. Z definice homomorfismu $f_B(b_1, \dots, b_n) = \varphi(f_A(a_1, \dots, a_n))$, a tedy $\varphi^{-1}(f_B(b_1, \dots, b_n)) = f_A(\varphi^{-1}(b_1), \dots, \varphi^{-1}(b_n))$.

<u>*Věta.*</u> *Nechť A, B, C jsou univerzální algebry téhož typu Ω. Platí:*

- *A je izomorfní s A;*
- *je-li A izomorfní s B, pak je též B izomorfní s A;*
- *jestliže A je izomorfní s B a B je izomorfní s C, pak je též A izomorfní s C.*

<u>*Důkaz.*</u> To je zřejmé.

Součin dvou Ω-algeber

Definice. Nechť A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω. Na kartézském součinu $A \times B$ definujeme novou univerzální algebru typu Ω, kterou nazveme součinem Ω-algeber A a B. Pro každý operační symbol $f \in \Omega$ arity n a každé prvky $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b_1, \ldots, b_n \in B$ klademe

$$f_{A\times B}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = (f_A(a_1, \ldots, a_n), f_B(b_1, \ldots, b_n)).$$

Poznámka. Předchozí podmínka v případě nulárního operačního symbolu f znamená $f_{A\times B} = (f_A, f_B)$.

Definice. Nechť A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω, $A \times B$ součin těchto Ω-algeber. Definujme projekce $\pi_1 : A \times B \to A$, $\pi_2 : A \times B \to B$ ze součinu $A \times B$ předpisem: pro každé $a \in A$, $b \in B$ klademe $\pi_1((a, b)) = a$, $\pi_2((a, b)) = b$.

Poznámka. Protože Ω-algebry mohou být i prázdné, nemusí být obecně projekce ze součinu surjektivní.

Projekce ze součinu dvou Ω-algeber

<u>*Věta.*</u> *Nechť A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω, $A \times B$ součin těchto Ω-algeber. Pak obě projekce π_1, π_2 jsou homomorfismy Ω-algeber.*

<u>*Důkaz.*</u> Ukažme, že projekce π_1 je homomorfismus Ω-algeber. Zvolme libovolně operační symbol $f \in \Omega$ arity n a prvky $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b_1, \ldots, b_n \in B$. Platí

$$\begin{aligned} \pi_1\big(f_{A\times B}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))\big) = \\ &= \pi_1\big((f_A(a_1, \ldots, a_n), f_B(b_1, \ldots, b_n))\big) = \\ &= f_A(a_1, \ldots, a_n) = \\ &= f_A(\pi_1((a_1, b_1)), \ldots, \pi_1((a_n, b_n))). \end{aligned}$$

Analogicky se dokáže, že projekce π_2 je homomorfismus Ω-algeber.

Věta o součinu dvou Ω-algeber

Věta. *Nechť A, B, C jsou univerzální algebry téhož typu Ω, $\varphi : C \to A$, $\psi : C \to B$ homomorfismy Ω-algeber, $\pi_1 : A \times B \to A$, $\pi_2 : A \times B \to B$ projekce ze součinu $A \times B$. Pak existuje jediný homomorfismus Ω-algeber $\rho : C \to A \times B$ s vlastností $\pi_1 \circ \rho = \varphi$, $\pi_2 \circ \rho = \psi$.*

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & & B \\
 & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] \arrow[uu, dashed, "\rho"'] &
\end{tikzcd}
$$

Důkaz. Podmínky $\pi_1 \circ \rho = \varphi$, $\pi_2 \circ \rho = \psi$ platí, právě když $\rho(c) = (\varphi(c), \psi(c))$ pro každé $c \in C$. Zvolme libovolně operační symbol $f \in \Omega$ arity n a prvky $c_1, \ldots, c_n \in C$. Platí

$$
\begin{aligned}
f_{A\times B}(\rho(c_1), \ldots, \rho(c_n)) &= f_{A\times B}((\varphi(c_1), \psi(c_1)), \ldots, (\varphi(c_n), \psi(c_n))) = \\
&= \big(f_A(\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_n)), f_B(\psi(c_1), \ldots, \psi(c_n))\big) = \\
&= \big(\varphi(f_C(c_1, \ldots, c_n)), \psi(f_C(c_1, \ldots, c_n))\big) = \\
&= \rho(f_C(c_1, \ldots, c_n)),
\end{aligned}
$$

což se mělo dokázat.

Součin libovolného počtu množin

Definice. Jestliže pro libovolný prvek i množiny I je dána množina A_i, pak kartézským součinem množin A_i rozumíme množinu všech zobrazení χ z množiny I takových, že $\chi(i) \in A_i$ pro každé $i \in I$:

$$\prod_{i \in I} A_i = \Big\{ \chi : I \to \bigcup_{i \in I} A_i ;\ \forall i \in I : \chi(i) \in A_i \Big\}.$$

Pro libovolné $j \in I$ definujeme j-tou projekci π_j z kartézského součinu $A = \prod_{i \in I} A_i$ takto: $\pi_j : A \to A_j$ je určeno předpisem $\pi_j(\chi) = \chi(j)$ pro každé $\chi \in A$.

Poznámka. Ve speciálním případě $I = \emptyset$ vlastně žádnou množinu A_i nemáme. Přesto jsme oprávněni mluvit o součinu: dle definice je součinem $\prod_{i \in \emptyset} A_i$ množina všech zobrazení $\chi : \emptyset \to \bigcup_{i \in \emptyset} A_i$. Protože $\bigcup_{i \in I} A_i$ je množina všech prvků x, pro které existuje $i \in I$ tak, že $x \in A_i$, je zřejmě $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$. Ovšem zobrazení $\chi : \emptyset \to \emptyset$ je jediné, totiž prázdné zobrazení. Proto množina $\prod_{i \in \emptyset} A_i$ je jednoprvková; jejím jediným prvkem je prázdné zobrazení.

Součin libovolného počtu Ω-algeber

Definice. Nechť Ω je typ. Nechť pro libovolný prvek i množiny I je dána univerzální algebra A_i typu Ω. Součinem těchto Ω-algeber rozumíme novou Ω-algebru definovanou na kartézském součinu $A = \prod_{i\in I} A_i$ takto: pro každý operační symbol $f \in \Omega$ arity n a každé prvky $\chi_1, \dots, \chi_n \in A$, klademe $f_A(\chi_1, \dots, \chi_n) = \chi$, kde $\chi \in A$ je určeno podmínkou

$$\chi(i) = f_{A_i}(\chi_1(i), \dots, \chi_n(i)) \qquad \text{pro každé } i \in I$$

(pro $n = 0$ tedy $f_A = \chi$, kde $\chi(i) = f_{A_i}$).

Poznámka. Ve speciálním případě $I = \emptyset$ je součinem Ω-algebra na jednoprvkové množině, jejímž jediným prvkem je prázdné zobrazení. Tato Ω-algebra je jediná (na jednoprvkové množině pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ existuje jen jedna n-ární operace). Ačkoli nemáme dánu žádnou Ω-algebru, jako součin dostáváme jednoprvkovou Ω-algebru, a tedy máme informaci o tom, jak vypadá Ω.
Není to paradox: součin $\prod$ je součin Ω-algeber, lze jej aplikovat pouze na Ω-algebry pro určité Ω. Informace o tom, jak toto Ω vypadá, je tedy uložena v tom, o jaký součin $\prod$ se jedná.

Projekce ze součinu Ω-algeber

<u>Věta.</u> Nechť pro libovolný prvek i množiny I je dána univerzální algebra A_i daného typu Ω, nechť $A = \prod_{i \in I} A_i$ je jejich součin. Pak pro každé $j \in I$ je j-tá projekce $\pi_j : A \to A_j$ homomorfismus Ω-algeber.

<u>Důkaz.</u> Připomeňme, že projekce $\pi_j : A \to A_j$ je definována předpisem $\pi_j(\chi) = \chi(j)$ pro každé $\chi \in A$. Zvolme libovolně operační symbol $f \in \Omega$ arity n a prvky $\chi_1, \ldots, \chi_n \in A$. Označme $\chi = f_A(\chi_1, \ldots, \chi_n)$. Přímo z definice plyne

$$\begin{aligned} \pi_j(f_A(\chi_1, \ldots, \chi_n)) = \pi_j(\chi) = \chi(j) = f_{A_j}(\chi_1(j), \ldots, \chi_n(j)) = \\ = f_{A_j}(\pi_j(\chi_1), \ldots, \pi_j(\chi_n)), \end{aligned}$$

což se mělo dokázat.

Věta o součinu Ω-algeber

Věta. Nechť pro libovolný prvek i množiny I je dána univerzální algebra A_i daného typu Ω, nechť $A = \prod_{i \in I} A_i$ je jejich součin a $\pi_j : A \to A_j$ je j-tá projekce pro každé $j \in I$. Nechť C je univerzální algebra téhož typu Ω, a pro každé $j \in I$ nechť je dán homomorfismus Ω-algeber $\varphi_j : C \to A_j$. Pak existuje jediný homomorfismus Ω-algeber $\varphi : C \to A$ takový, že $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$ pro každé $j \in I$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, "\pi_j"] \arrow[drrrr, "\pi_{j'}"] & & & & & & \\
& \dots & A_j & \dots & A_{j'} & \cdots & (j, j', \dots \in I) \\
C \arrow[uu, dashed, "\varphi"] \arrow[urr, "\varphi_j"] \arrow[urrrr, "\varphi_{j'}"'] & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Důkaz věty o součinu Ω-algeber

<u>*Důkaz.*</u> Rovnost $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$ pro každé $j \in I$ platí, právě když pro každé $c \in C$ je $\varphi(c) \in A$ určené podmínkou: pro libovolné $j \in I$

$$(\varphi(c))(j) = \pi_j(\varphi(c)) = (\pi_j \circ \varphi)(c) = \varphi_j(c).$$

Ověřme, že takto definované zobrazení $\varphi\colon C \to A$ je homomorfismus Ω-algeber. Zvolme libovolně operační symbol $f \in \Omega$ arity n a prvky $c_1, \ldots, c_n \in C$. Označme $\chi = f_A(\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_n))$, pak pro každé $i \in I$ platí

$$\begin{aligned}\chi(i) = f_{A_i}((\varphi(c_1))(i), \ldots, (\varphi(c_n))(i)) = f_{A_i}(\varphi_i(c_1), \ldots, \varphi_i(c_n)) = \\ = \varphi_i(f_C(c_1, \ldots, c_n)) = \big(\varphi(f_C(c_1, \ldots, c_n))\big)(i).\end{aligned}$$

To znamená, že χ a $\varphi(f_C(c_1, \ldots, c_n))$ jsou (jakožto prvky kartézského součinu) zobrazení se stejným definičním oborem, oborem hodnot i předpisem, proto platí $\chi = \varphi(f_C(c_1, \ldots, c_n))$, tj. $f_A(\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_n)) = \varphi(f_C(c_1, \ldots, c_n))$, což se mělo dokázat.