Kongruence na Ω-algebře

Poznámka. Při faktorizaci grup (resp. okruhů) jsme pomocí normální podgrupy (resp. ideálu) sestrojili rozklad na nosné množině grupy (resp. okruhu), a to tak, aby bylo možné korektně definovat operace na tomto rozkladu pomocí reprezentantů tříd. V této situaci byla normální podgrupa (resp. ideál) jednou ze tříd rozkladu, ostatní třídy rozkladu totiž bylo možné odvodit z této jediné třídy (a korektnosti definice operace na rozkladu pomocí reprezentantů). Avšak v případě Ω-algeber nepostačí znát jen jednu ze tříd, ale je nutné zadat všechny třídy, tedy celý rozklad. To lze provést tak, že zadáme jemu odpovídající ekvivalenci.

Definice. Nechť A je univerzální algebra typu Ω, nechť $\sim$ je relace ekvivalence na nosné množině A. Řekneme, že $\sim$ je kongruence na Ω-algebře A, jestliže pro každý n-ární operační symbol $f \in \Omega$ a pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$, $b_1, \dots, b_n \in A$ platí

$$a_1 \sim b_1, \ \dots, \ a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad f_A(a_1, \dots, a_n) \sim f_A(b_1, \dots, b_n).$$

Kongruence a homomorfismy

Poznámka. Následující věta popisuje vztah mezi homomorfismy Ω-algeber a kongruencemi na Ω-algebrách: každý homomorfismus zadává kongruenci. Později dokážeme, že i naopak každá kongruence vzniká tímto způsobem z vhodného homomorfismu.

Věta. *Nechť A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω, $\varphi : A \to B$ homomorfismus Ω-algeber. Pak relace $\sim$ na nosné množině A definovaná předpisem: pro každé $a, b \in A$ platí*

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(a) = \varphi(b) \tag{1}$$

je kongruence na Ω-algebře A.

Definice. Nechť A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω, $\varphi : A \to B$ homomorfismus Ω-algeber. Kongruence $\sim$ definovaná na Ω-algebře A předpisem (1) předchozí věty se nazývá jádro homomorfismu φ.

Poznámka. Zdůrazněme, že jádro homomorfismu není podmnožina množiny A, ale kongruence na Ω-algebře A.

Důkaz věty

<u>Věta.</u> Nechť A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω, $\varphi : A \to B$ homomorfismus Ω-algeber. Pak relace $\sim$ na nosné množině A definovaná předpisem: pro každé $a, b \in A$ platí

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(a) = \varphi(b)$$

je kongruence na Ω-algebře A.

<u>Důkaz.</u> Zřejmě je $\sim$ ekvivalencí příslušnou zobrazení φ. Stačí tedy ukázat, že splňuje implikaci v definici kongruence. Zvolme libovolně n-ární operační symbol $f \in \Omega$ a prvky $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ tak, že $a_1 \sim b_1$, ..., $a_n \sim b_n$. Odtud plyne $\varphi(a_1) = \varphi(b_1)$, ..., $\varphi(a_n) = \varphi(b_n)$. Pak ovšem z definice homomorfismu

$$\begin{aligned}\varphi(f_A(a_1, \ldots, a_n)) &= f_B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = f_B(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)) = \\ &= \varphi(f_A(b_1, \ldots, b_n)),\end{aligned}$$

což znamená dokazované $f_A(a_1, \ldots, a_n) \sim f_A(b_1, \ldots, b_n)$.

Faktorová algebra

Definice. Nechť A je univerzální algebra typu Ω, nechť $\sim$ je kongruence na Ω-algebře A. Označme $R = A/\!\sim$ rozklad daný $\sim$. Pro každý n-ární operační symbol $f \in \Omega$ definujme n-ární operaci na R takto: pro každé $X_1, \ldots, X_n \in R$ zvolme reprezentanty $a_1 \in X_1$, ..., $a_n \in X_n$ a definujme $f_R(X_1, \ldots, X_n)$ tím, že je to třída obsahující prvek $f_A(a_1, \ldots, a_n)$.
Množina R spolu s právě zavedenými operacemi se nazývá faktorová algebra Ω-algebry A podle kongruence $\sim$, značí se $A/\!\sim$.

Věta. *Předchozí definice je korektní.*

Důkaz. Zachovejme veškeré označení z definice a zvolme ještě další reprezentanty: nechť též $b_1 \in X_1$, ..., $b_n \in X_n$. Patřit do stejné třídy rozkladu znamená být ekvivalentní, tedy platí $a_1 \sim b_1$, ..., $a_n \sim b_n$. Z definice kongruence pak $f_A(a_1, \ldots, a_n) \sim f_A(b_1, \ldots, b_n)$, což znamená, že $f_A(a_1, \ldots, a_n)$ a $f_A(b_1, \ldots, b_n)$ patří do stejné třídy rozkladu, totiž do třídy $f_R(X_1, \ldots, X_n)$.

Příklad: faktorizace svazů

Poznámka. Univerzální algebra nám dává návod, jak faktorizovat libovolnou Ω-algebru, tedy například svaz.

Příklad. Nechť $(S, \vee, \wedge)$ je svaz. Kongruence na něm je ekvivalence $\sim$ na množině S splňující:

pro každé $a, b, c, d \in S$

$$a \sim c, \quad b \sim d \quad \Longrightarrow \quad a \vee b \sim c \vee d, \quad a \wedge b \sim c \wedge d.$$

Je-li $\sim$ kongruence na svazu $(S, \vee, \wedge)$, pak faktorsvaz $S/\sim$ je svaz, jehož nosná množina je rozklad množiny S příslušný ekvivalenci $\sim$, operace na něm jsou definovány pomocí reprezentantů.

Pro libovolné třídy $T, R \in S/\sim$ zvolíme $a \in T$, $b \in R$, definujeme:

$T \vee R$ je třída obsahující $a \vee b$,
$T \wedge R$ je třída obsahující $a \wedge b$.

Projekce na faktorovou algebru

Věta. *Nechť A je univerzální algebra typu Ω, $\sim$ kongruence na Ω-algebře A. Pak zobrazení $\pi : A \to A/\!\sim$ určené předpisem $a \in \pi(a)$ pro libovolné $a \in A$ (tedy $\pi(a)$ je třída obsahující prvek a) je surjektivní homomorfismus Ω-algeber.*

Důkaz. Zobrazení π je surjekce, neboť každá třída rozkladu $X \in A/\!\sim$ je neprázdná, existuje tedy $a \in X$, pro které $\pi(a) = X$. Zvolme libovolně n-ární operační symbol $f \in \Omega$ a prvky $a_1, \dots, a_n \in A$. Označme $X_1 = \pi(a_1)$, ..., $X_n = \pi(a_n)$. Pak tedy $a_1 \in X_1$, ..., $a_n \in X_n$ a $f_{A/\sim}(X_1, \dots, X_n)$ je určeno tím, že obsahuje prvek $f_A(a_1, \dots, a_n)$, tj.

$$\pi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = f_{A/\sim}(X_1, \dots, X_n) = f_{A/\sim}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)),$$

a tedy π je homomorfismus Ω-algeber.

Definice. Homomorfismus Ω-algeber $\pi : A \to A/\!\sim$ z předchozí věty se nazývá projekce Ω-algebry A na faktorovou algebru $A/\!\sim$.

Jádro projekce na faktorovou algebru

<u>*Věta.*</u> *Nechť A je univerzální algebra typu Ω, $\sim$ kongruence na Ω-algebře A. Nechť $\pi : A \to A/\sim$ je projekce Ω-algebry A na faktorovou algebru $A/\sim$. Pak platí: jádrem projekce π je kongruence $\sim$.*

<u>*Důkaz.*</u> Označme $\approx$ jádro π. Podle definice jádra homomorfismu pro libovolné $a, b \in A$ platí $a \approx b$ právě tehdy, když $\pi(a) = \pi(b)$, což podle definice projekce znamená, že a a b patří do téže třídy rozkladu $A/\sim$, neboli $a \sim b$.

<u>*Poznámka.*</u> Jádro libovolného homomorfismu Ω-algeber je podle definice kongruencí. Platí to však i naopak:

<u>*Důsledek.*</u> *Nechť A je univerzální algebra typu Ω. Pak každá kongruence $\sim$ na Ω-algebře A je jádrem vhodného homomorfismu Ω-algeber vycházejícího z Ω-algebry A.*

<u>*Důkaz.*</u> Kongruence $\sim$ je jádrem projekce $\pi : A \to A/\sim$.

Vztah kongruencí a podalgeber

Poznámka. Každá ekvivalence na množině A je relace na A, tedy podmnožina množiny $A \times A$. Vždyť $a \sim b$ znamená $(a, b) \in \sim$.

Věta. *Nechť $\sim$ je ekvivalence na nosné množině Ω-algebry A. Pak platí: $\sim$ je kongruence na Ω-algebře A, právě když je $\sim$ podalgebrou Ω-algebry $A \times A$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Zvolme libovolný n-ární operační symbol $f \in \Omega$ a prvky $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in A \times A$. Jestliže všechny tyto uspořádané dvojice patří do $\sim$, pak platí $a_1 \sim b_1$, ..., $a_n \sim b_n$, podle definice kongruence $f_A(a_1, \dots, a_n) \sim f_A(b_1, \dots, b_n)$. Tedy dvojice $(f_A(a_1, \dots, a_n), f_A(b_1, \dots, b_n))$ je také prvkem $\sim$.

„$\Leftarrow$“ Zvolme libovolně n-ární operační symbol $f \in \Omega$ a prvky $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ takové, že $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$. Pak dvojice $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ jsou prvky podalgebry $\sim$, tedy také $f_{A\times A}((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) = (f_A(a_1, \dots, a_n), f_A(b_1, \dots, b_n))$ patří do podalgebry $\sim$, neboli $f_A(a_1, \dots, a_n) \sim f_A(b_1, \dots, b_n)$.

Svaz kongruencí na dané Ω-algebře

Nechť A je Ω-algebra, $\sim$ a $\approx$ kongruence na Ω-algebře A. Pak $\approx\ \subseteq\ \sim$, právě když pro každé $a, b \in A$ platí implikace

$$a \approx b \Longrightarrow a \sim b.$$

Systém všech kongruencí na A je uspořádán inkluzí.

Uvažme libovolnou neprázdnou množinu K kongruencí na Ω-algebře A. Průnikem všech kongruencí $\sim\ \in K$ je relace $\approx$ na množině A, pro kterou platí: pro libovolné $a, b \in A$ je $a \approx b$ právě tehdy, když pro každé $\sim\ \in K$ platí $a \sim b$.
Relace $\approx$ je zřejmě reflexivní, symetrická a tranzitivní, je tedy také ekvivalencí na množině A.
Z předchozí věty a odpovídající věty o průnicích podalgeber pak plyne, že $\approx$ je kongruencí na Ω-algebře A.

Existuje také největší ze všech kongruencí na Ω-algebře A, totiž relace $A \times A$. Proto množina všech kongruencí na Ω-algebře A uspořádaná inkluzí tvoří úplný svaz.

Průnik množiny kongruencí

<u>*Věta.*</u> *Nechť A je univerzální algebra typu Ω, K neprázdná množina kongruencí na Ω-algebře A. Nechť relace $\approx$ na množině A je průnikem všech kongruencí z množiny K, tj. pro libovolné $a, b \in A$ klademe $a \approx b$ právě tehdy, když pro každé $\sim \in K$ je $a \sim b$.*

Uvažme součin Ω-algeber $B = \prod_{\sim \in K} A/\sim$. Pro každé $\sim \in K$ označme $\pi_\sim : B \to A/\sim$ projekci ze součinu a $\mu_\sim : A \to A/\sim$ projekci Ω-algebry A na faktorovou algebru $A/\sim$. Podle věty o součinu existuje jediný homomorfismus Ω-algeber $\varphi : A \to B$ takový, že $\pi_\sim \circ \varphi = \mu_\sim$. Pak platí: jádrem homomorfismu φ je kongruence $\approx$.

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[drr, "\pi_\sim"] \arrow[drrrr, "\pi_\simeq"] & & & & & & \\
 & \ldots & A/\sim & \ldots & A/\simeq & \cdots & (\sim, \simeq, \ldots \in K) \\
A \arrow[uu, dashed, "\varphi"] \arrow[urr, "\mu_\sim"] \arrow[urrrr, "\mu_\simeq"'] & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Důkaz věty

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[drr, "\pi_\sim"] \arrow[drrrr, "\pi_\simeq"] & & & & & & \\
 & \dots & A/{\sim} & \dots & A/{\simeq} & \cdots & (\sim, \simeq, \ldots \in K) \\
A \arrow[uu, dashed, "\varphi"] \arrow[urr, "\mu_\sim"'] \arrow[urrrr, "\mu_\simeq"'] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Důkaz. Označme $\bowtie$ jádro homomorfismu φ. Pro libovolné $a, b \in A$ platí $a \bowtie b$ právě tehdy, když $\varphi(a) = \varphi(b)$, což podle definice součinu Ω-algeber nastane právě tehdy, když pro každé $\sim \in K$ platí $\pi_\sim(\varphi(a)) = \pi_\sim(\varphi(b))$, což vzhledem k $\pi_\sim \circ \varphi = \mu_\sim$ znamená právě $\mu_\sim(a) = \mu_\sim(b)$, neboli $a \sim b$.

Dokázali jsme, že pro libovolné $a, b \in A$ platí $a \bowtie b$ právě tehdy, když pro každé $\sim \in K$ je $a \sim b$, což však podle definice relace $\approx$ nastane, právě když $a \approx b$.

Hlavní věta o faktorových algebrách

<u>*Věta.*</u> *Nechť A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω, $\varphi\colon A \to B$ homomorfismus Ω-algeber s jádrem $\sim$. Nechť $\approx$ je libovolná kongruence na Ω-algebře A, přičemž $\approx \subseteq \sim$. Označme $\pi\colon A \to A/{\approx}$ projekci Ω-algebry A na faktorovou algebru $A/{\approx}$. Pak platí*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & A/{\approx} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

- *Existuje jediné zobrazení $\widetilde{\varphi}\colon A/{\approx} \to B$ takové, že $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.*
- *Toto zobrazení $\widetilde{\varphi}$ je homomorfismus Ω-algeber.*
- *Homomorfismus $\widetilde{\varphi}$ je injektivní, právě když jsou obě kongruence $\sim$ a $\approx$ stejné (tj. $\sim = \approx$).*
- *Homomorfismus $\widetilde{\varphi}$ je surjektivní, právě když homomorfismus φ je surjektivní.*

Důkaz věty

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & A/\approx \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Existuje jediné zobrazení $\widetilde{\varphi}: A/\approx \to B$ takové, že $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

Důkaz. Sestrojme zobrazení $\widetilde{\varphi}: A/\approx \to B$ tak, aby $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.
Zvolme libovolně $X \in A/\approx$. Existuje $a \in X$, tedy $\pi(a) = X$. Pak
$\widetilde{\varphi}(X) = \widetilde{\varphi}(\pi(a)) = (\widetilde{\varphi} \circ \pi)(a) = \varphi(a)$.
Pokud nějaké zobrazení $\widetilde{\varphi}: A/\approx \to B$ splňující $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ existuje, je jediné. Definujme tedy $\widetilde{\varphi}: A/\approx \to B$ tímto jediným způsobem: pro libovolné $X \in A/\approx$ tedy zvolíme $a \in X$ a klademe
$\widetilde{\varphi}(X) = \varphi(a)$.
Ověřme korektnost této definice, neboli nezávislost na volbě $a \in X$.
Mějme další $b \in X$, pak oba prvky a, b leží v téže třídě X rozkladu $A/\approx$, odkud $a \approx b$. Protože $\approx \subseteq \sim$, plyne odtud $a \sim b$. Ovšem $\sim$ je jádrem homomorfismu φ, proto poslední znamená $\varphi(a) = \varphi(b)$.
Je tedy skutečně definice zobrazení $\widetilde{\varphi}$ korektní.

Důkaz věty

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & A/{\approx} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Zobrazení $\widetilde{\varphi}$ je homomorfismus Ω-algeber.

__Důkaz.__ Zvolme libovolně operační symbol $f \in \Omega$ arity n a prvky $X_1, \dots, X_n \in A/{\approx}$. Zvolme $a_1, \dots, a_n \in A$, aby $\pi(a_1) = X_1, \dots, \pi(a_n) = X_n$. Protože π a φ jsou homomorfismy Ω-algeber, platí

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}\big(f_{A/\approx}(X_1, \dots, X_n)\big) &= \widetilde{\varphi}\big(f_{A/\approx}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))\big) = \\ &= \widetilde{\varphi}\big(\pi(f_A(a_1, \dots, a_n))\big) = \\ &= (\widetilde{\varphi} \circ \pi)(f_A(a_1, \dots, a_n)) = \\ &= \varphi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = \\ &= f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \\ &= f_B((\widetilde{\varphi} \circ \pi)(a_1), \dots, (\widetilde{\varphi} \circ \pi)(a_n)) = \\ &= f_B(\widetilde{\varphi}(\pi(a_1)), \dots, \widetilde{\varphi}(\pi(a_n))) = \\ &= f_B(\widetilde{\varphi}(X_1), \dots, \widetilde{\varphi}(X_n)). \end{aligned}$$

Důkaz věty

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & A/{\approx} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\widetilde{\varphi}$ je injekce $\iff$ $\sim\, = \,\approx$.

Důkaz. „$\Leftarrow$“ Nechť $X_1, X_2 \in A/{\approx}$ jsou libovolné prvky splňující $\widetilde{\varphi}(X_1) = \widetilde{\varphi}(X_2)$. Zvolme $a_1, a_2 \in A$, aby $\pi(a_1) = X_1$, $\pi(a_2) = X_2$. Pak

$$\begin{aligned} \varphi(a_1) = (\widetilde{\varphi} \circ \pi)(a_1) = \widetilde{\varphi}(\pi(a_1)) = \widetilde{\varphi}(X_1) = \\ = \widetilde{\varphi}(X_2) = \widetilde{\varphi}(\pi(a_2))(\widetilde{\varphi} \circ \pi)(a_2) = \varphi(a_2), \end{aligned}$$

odkud z definice jádra homomorfismu plyne $a_1 \sim a_2$, a proto $a_1 \approx a_2$, což znamená, že prvky a_1 a a_2 leží v téže třídě rozkladu, kterou je $X_1 = X_2$.

„$\Rightarrow$“ Stačí ověřit $\sim\, \subseteq\, \approx$, neboť $\approx\, \subseteq\, \sim$ předpokládáme. Nechť tedy jsou $a, b \in A$ takové, že $a \sim b$. Pak $\varphi(a) = \varphi(b)$, tedy $\widetilde{\varphi}(\pi(a)) = \widetilde{\varphi}(\pi(b))$. Protože předpokládáme, že $\widetilde{\varphi}$ je injektivní, máme $\pi(a) = \pi(b)$. Podle definice projekce na faktorovou algebru leží a a b v téže třídě rozkladu $A/{\approx}$, tedy $a \approx b$.

Důkaz věty

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & A/{\approx} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\widetilde{\varphi}$ je surjekce $\iff$ φ je surjekce.

Důkaz. „$\Leftarrow$“ Pro každé $b \in B$ existuje $a \in A$ tak, že $b = \varphi(a) = (\widetilde{\varphi} \circ \pi)(a) = \widetilde{\varphi}(\pi(a))$, a tedy $\widetilde{\varphi}$ je surjekce.

„$\Rightarrow$“ Složení dvou surjekcí je surjekce.

Důsledek. *Nechť A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω, $\varphi : A \to B$ surjektivní homomorfismus Ω-algeber s jádrem $\sim$. Pak Ω-algebra B je izomorfní s faktorovou algebrou $A/{\sim}$.*

Důkaz. Stačí užít předchozí větu pro $\approx\, = \,\sim$.

Definice termu typu Ω

Abychom mohli definovat například grupu nebo okruh, potřebujeme rovnosti. Příkladem rovností jsou komutativní, asociativní, distributivní a další identity, se kterými jsme se setkali. Jde vždy o rovnost mezi dvěma výrazy, které obsahují nějaké proměnné spolu svázané operacemi. Tyto výrazy nazýváme termy. Je jasné, že vždy máme v rovnosti jen konečně mnoho proměnných. Proto bude stačit pracovat s proměnnými $x_1, x_2, x_3, \dots$

Definice. Nechť Ω je typ, pro každé nezáporné celé číslo n označme Ω_n množinu všech operačních symbolů z Ω, které jsou n-ární. Položme $M_0 = \Omega_0 \cup \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ a pro každé $i \in \mathbb{N}$ označme

$$M_i = M_{i-1} \cup \{f(t_1, \dots, t_n); n \in \mathbb{N},\ f \in \Omega_n,\ t_1, \dots, t_n \in M_{i-1}\}.$$

Pak $F(\Omega) = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ nazýváme množinou všech termů typu Ω, jejím prvkům říkáme termy typu Ω.

Termy

Poznámka. Termy jsou tedy konečné posloupnosti symbolů z abecedy, která se skládá z množiny proměnných, množiny Ω, kulatých závorek a čárky, tedy slova nad touto abecedou. Jsou to právě ta slova, která lze zkonstruovat konečně mnoha aplikacemi následujících pravidel:

- Pro libovolné přirozené číslo n je proměnná x_n term typu Ω.
- Pro libovolný nulární operační symbol $f \in \Omega$ je f term typu Ω.
- Pro libovolné přirozené číslo n, libovolný n-ární operační symbol $f \in \Omega$ a libovolné termy $t_1, \ldots, t_n$ typu Ω je výraz $f(t_1, \ldots, t_n)$ term typu Ω.

Poznámka. Definici termu nebudeme užívat dogmaticky. Je-li $\Omega = \{+\}$, pak je termem například $+(x_1, +(x_2, x_3))$. Je jasné, že tento zápis nevyhovuje svou nepřehledností. Proto budeme i nadále tento term psát ve tvaru $x_1 + (x_2 + x_3)$. Podobně pro $\Omega = \{\vee, \wedge, '\}$ budeme term $\vee(x_1, '(x_1))$ psát raději nepřesně ve tvaru $x_1 \vee x_1'$.

Arita termu

Definice. Řekneme, že term t typu Ω je n-ární, jestliže se při jeho konstrukci nevyužilo žádné proměnné x_m pro $m > n$.

Příklad. Term x_2 je binární, ovšem je též 3-ární a také 4-ární atd. Není však unární, přestože v něm vystupuje jen jedna proměnná.

Příklad. Nulární term typu Ω je term, při jehož konstrukci se nepoužila žádná proměnná. Je jasné, že takové termy existují jen pro typy obsahující alespoň jeden nulární operační symbol.

Poznámka. Každý n-ární term t typu Ω nám v libovolné Ω-algebře A zadává n-ární operaci: místo proměnné x_k dosadíme prvek a_k a provedeme naznačené operace. Například pro $\Omega = \{+, \cdot\}$ s binárními operačními symboly term $t = (x_1 + x_2) \cdot x_3$ na libovolné Ω-algebře A určuje 3-ární operaci $t_A(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2) \cdot a_3$, kde bychom správně měli psát operace $+_A$ a $\cdot_A$ místo operačních symbolů $+$ a $\cdot$. Chceme-li však tento jasný fakt definovat přesně, je nutné užít opět induktivní definici.

Operace na Ω-algebře určená termem typu Ω

Definice. Nechť t je n-ární term typu Ω, nechť A je Ω-algebra. Definujeme n-ární operaci t_A určenou termem t na Ω-algebře A následujícím způsobem. Nechť $a_1, \dots, a_n \in A$ jsou libovolné prvky.

- Je-li $t = x_k$, pak $t_A(a_1, \dots, a_n) = a_k$.
- Je-li termem t nulární operační symbol $f \in \Omega$, pak $t_A(a_1, \dots, a_n) = f_A$.
- Je-li $t = f(t_1, \dots, t_n)$, kde $f \in \Omega$ je k-ární, $k \geq 1$, a t_1, ..., t_k jsou n-ární termy typu Ω, pak $t_A(a_1, \dots, a_n) = f_A((t_1)_A(a_1, \dots, a_n), \dots, (t_k)_A(a_1, \dots, a_n))$.

Příklad. Je-li n-ární $f \in \Omega$, pak $(f(x_1, \dots, x_k))_A = f_A$ pro každou Ω-algebru A.

Poznámka. Protože libovolný n-ární term typu Ω lze považovat též za m-ární term typu Ω pro libovolné $m \geq n$, dopustili jsme se v předchozí definici jisté nepřesnosti: stejným symbolem t_A označujeme různé operace!

Nezávislost operace na zbytečně vysoké aritě termu

Příklad. Jestliže Ω obsahuje binární operační symbol $+$ a my považujeme term $x_1 + x_2$ za binární, pak podle předchozí definice platí $(x_1 + x_2)_A(a_1, a_2) = a_1 + a_2$, pokud tento term však považujeme za 3-ární, pak $(x_1 + x_2)_A(a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2$. Obecně, pro libovolné $n \geq 2$, je-li term $x_1 + x_2$ považován za n-ární, pak $(x_1 + x_2)_A(a_1, \dots, a_n) = a_1 + a_2$.

Věta. *Nechť t je n-ární term typu Ω, nechť přirozené číslo $m > n$. Pak pro libovolnou univerzální algebru A typu Ω a libovolné $a_1, \dots, a_m \in A$ platí*

$$t_A(a_1, \dots, a_n) = t_A(a_1, \dots, a_m),$$

kde symbolem t_A rozumíme vlevo n-ární operaci určenou termem t na A, kdežto vpravo m-ární operaci určenou termem t na A.

Důkaz indukcí vzhledem ke složitosti termu t.

Popis podalgebry generované podmnožinou

Věta. *Nechť A je univerzální algebra typu Ω, M podmnožina nosné množiny A. Pak podalgebra $\langle M \rangle$ Ω-algebry A generovaná množinou M je tvaru*

$$\langle M \rangle = \{t_A(a_1, \dots, a_n);\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0,\ t \text{ je } n\text{-ární term typu } \Omega,\ a_1, \dots, a_n \in M\}.$$

Důkaz. Označme N množinu na pravé straně. Nejprve dokážeme $M \subseteq N$, stačí vzít $n = 1$ a unární term x_1, neboť pro libovolné $a \in M$ je $(x_1)_A(a) = a$.

Nechť H je libovolná podalgebra Ω-algebry A obsahující množinu M. Indukcí vzhledem ke složitosti n-árního termu t lze snadno ukázat, že $t_A(a_1, \dots, a_n) \in H$.

Zbývá ukázat, že N je podalgebra Ω-algebry A.

Zvolme libovolně k-ární operační symbol $f \in \Omega$ a k libovolných prvků $b_1, \dots, b_k \in N$ a ukažme, že $f_A(b_1, \dots, b_k) \in N$. Ovšem pro každé $j = 1, \dots, k$ existuje n_j-ární term t_j typu Ω a n_j prvků $a_{j,1}, \dots, a_{j,n_j} \in M$ tak, že $b_j = (t_j)_A(a_{j,1}, \dots, a_{j,n_j})$. Potřebujeme prvky $b_1, \dots, b_k$ získat jako hodnoty operací příslušných nějakým termům typu Ω na stejné n-tici prvků množiny M. Proto položme $n = n_1 + \dots + n_k$ a uvažme n-tici
$(a_{1,1}, \dots, a_{1,n_1}, \dots, a_{k,1}, \dots, a_{k,n_k})$
vzniklou poskládáním zmíněných n_j-tic za sebe. Označme t'_j term, který vznikne z termu t_j tím, že se indexy všech proměnných v něm použitých zvětší o číslo $n_1 + \dots + n_{j-1}$ (tedy speciálně $t'_1 = t_1$). Platí tedy pro každé $j = 1, \dots, k$

$$b_j = (t_j)_A(a_{j,1}, \dots, a_{j,n_j}) = (t'_j)_A(a_{1,1}, \dots, a_{1,n_1}, \dots, a_{k,1}, \dots, a_{k,n_k}),$$

a proto

$$f_A(b_1, \dots, b_k) = (f(t'_1, \dots, t'_k))_A(a_{1,1}, \dots, a_{1,n_1}, \dots, a_{k,1}, \dots, a_{k,n_k}).$$

To je ale dle definice množiny N prvek N, což se mělo dokázat.

Rovnost typu Ω

Definice. Nechť t_1, t_2 jsou termy typu Ω. Výraz $t_1 = t_2$ nazýváme rovností typu Ω.

Poznámka. Zdůrazněme, že v předchozí definici je užito symbolu $=$ jen jako dalšího znaku abecedy, který oba termy spojil do jediného slova. V žádném případě tímto zápisem není myšleno, že jsou termy t_1 a t_2 stejné.

Příklad. Nechť $\Omega = \{\cdot\}$, kde $\cdot$ je binární operační symbol, pak rovností typu Ω je například rovnost $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$. Tato rovnost psána naprosto formálně je tvaru $\cdot(x_1, x_2) = \cdot(x_2, x_1)$, ale je jasné, že není třeba si zbytečně komplikovat život přehnanou snahou po formálnosti, podstatné je to, že víme, jak formálně rovnost vypadá, a jsme schopni v případě potřeby ji správně formálně přepsat.

Příklad. Uvažme typ $\Omega = \{\cdot, {}^{-1}, 1\}$, kde operační symbol $\cdot$ je binární, symbol ${}^{-1}$ je unární a symbol 1 je nulární. Příklady rovností jsou $(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$, $x_1 \cdot x_1^{-1} = 1$, atd.

Ω-algebra splňuje rovnost typu Ω

Definice. Nechť t_1 a t_2 jsou termy typu Ω, nechť A je univerzální algebra typu Ω. Nechť n je nejmenší přirozené číslo takové, že oba termy t_1 a t_2 jsou n-ární. Řekneme, že rovnost $t_1 = t_2$ platí v Ω-algebře A (neboli Ω-algebra A splňuje rovnost $t_1 = t_2$), jestliže termy t_1, t_2 určují stejnou n-ární operaci na Ω-algebře A, tj. pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ platí $(t_1)_A(a_1, \dots, a_n) = (t_2)_A(a_1, \dots, a_n)$.

Poznámka. Díky nezávislosti operace na aritě termu lze za n vzít libovolné přirozené číslo takové, že oba termy t_1 a t_2 jsou n-ární.

Příklad. Nechť $\Omega = \{\cdot\}$, kde $\cdot$ je binární operační symbol, pak rovnost $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$ platí v Ω-algebře A, právě když je A komutativní grupoid.

Příklad. Nechť $t_1 = t_2$ je libovolná rovnost typu Ω. Pak v libovolné jednoprvkové Ω-algebře A platí rovnost $t_1 = t_2$. Jestliže existuje prázdná Ω-algebra (tj. jestliže typ Ω nemá žádný nulární operační symbol), pak v této prázdné algebře rovnost $t_1 = t_2$ také platí.

Příklad. Rovnost $x_1 = x_2$ neplatí v žádné Ω-algebře A mající alespoň dva prvky.