

Kongruence na Ω -algebře

Poznámka. Při faktorizaci grup (resp. okruhů) jsme pomocí normální podgrupy (resp. ideálu) sestrojili rozklad na nosné množině grupy (resp. okruhu), a to tak, aby bylo možné korektně definovat operace na tomto rozkladu pomocí reprezentantů tříd. V této situaci byla normální podgrupa (resp. ideál) jednou ze tříd rozkladu, ostatní třídy rozkladu totiž bylo možné odvodit z této jediné třídy (a korektnosti definice operace na rozkladu pomocí reprezentantů). Avšak v případě Ω -algeber nepostačí znát jen jednu ze tříd, ale je nutné zadat všechny třídy, tedy celý rozklad. To lze provést tak, že zadáme jemu odpovídající ekvivalenci.

Definice. Nechť A je univerzální algebra typu Ω , nechť \sim je relace ekvivalence na nosné množině A . Řekneme, že \sim je kongruence na Ω -algebře A , jestliže pro každý n -ární operační symbol $f \in \Omega$ a pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$, $b_1, \dots, b_n \in A$ platí

$$a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n \implies f_A(a_1, \dots, a_n) \sim f_A(b_1, \dots, b_n).$$

Kongruence a homomorfismy

Poznámka. Následující věta popisuje vztah mezi homomorfismy Ω -algeber a kongruencemi na Ω -algebrách: každý homomorfismus zadává kongruenci. Později dokážeme, že i naopak každá kongruence vzniká tímto způsobem z vhodného homomorfismu.

Věta. Necht' A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω , $\varphi : A \rightarrow B$ homomorfismus Ω -algeber. Pak relace \sim na nosné množině A definovaná předpisem: pro každé $a, b \in A$ platí

$$a \sim b \iff \varphi(a) = \varphi(b) \quad (1)$$

je kongruence na Ω -algebře A .

Definice. Necht' A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω , $\varphi : A \rightarrow B$ homomorfismus Ω -algeber. Kongruence \sim definovaná na Ω -algebře A předpisem (1) předchozí věty se nazývá jádro homomorfismu φ .

Poznámka. Zdůrazněme, že jádro homomorfismu není podmnožina množiny A , ale kongruence na Ω -algebře A .

Důkaz věty

Věta. Necht' A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω , $\varphi : A \rightarrow B$ homomorfismus Ω -algeber. Pak relace \sim na nosné množině A definovaná předpisem: pro každé $a, b \in A$ platí

$$a \sim b \iff \varphi(a) = \varphi(b)$$

je kongruence na Ω -algebře A .

Důkaz. Zřejmě je \sim ekvivalencí příslušnou zobrazení φ . Stačí tedy ukázat, že splňuje implikaci v definici kongruence. Zvolme libovolně n -ární operační symbol $f \in \Omega$ a prvky $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ tak, že $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$. Odtud plyne $\varphi(a_1) = \varphi(b_1), \dots, \varphi(a_n) = \varphi(b_n)$. Pak ovšem z definice homomorfismu

$$\begin{aligned} \varphi(f_A(a_1, \dots, a_n)) &= f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = f_B(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)) = \\ &= \varphi(f_A(b_1, \dots, b_n)), \end{aligned}$$

což znamená dokazované $f_A(a_1, \dots, a_n) \sim f_A(b_1, \dots, b_n)$.

Faktorová algebra

Definice. Necht' A je univerzální algebra typu Ω , necht' \sim je kongruence na Ω -algebře A . Označme $R = A/\sim$ rozklad daný \sim . Pro každý n -ární operační symbol $f \in \Omega$ definujme n -ární operaci na R takto: pro každé $X_1, \dots, X_n \in R$ zvolme reprezentanty $a_1 \in X_1, \dots, a_n \in X_n$ a definujme $f_R(X_1, \dots, X_n)$ tím, že je to třída obsahující prvek $f_A(a_1, \dots, a_n)$. Množina R spolu s právě zavedenými operacemi se nazývá faktorová algebra Ω -algebry A podle kongruence \sim , značí se A/\sim .

Věta. Předchozí definice je korektní.

Důkaz. Zachovejme veškeré označení z definice a zvolme ještě další reprezentanty: necht' též $b_1 \in X_1, \dots, b_n \in X_n$. Patřit do stejné třídy rozkladu znamená být ekvivalentní, tedy platí $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$. Z definice kongruence pak $f_A(a_1, \dots, a_n) \sim f_A(b_1, \dots, b_n)$, což znamená, že $f_A(a_1, \dots, a_n)$ a $f_A(b_1, \dots, b_n)$ patří do stejné třídy rozkladu, totiž do třídy $f_R(X_1, \dots, X_n)$.

Příklad: faktorizace svazů

Poznámka. Univerzální algebra nám dává návod, jak faktorizovat libovolnou Ω -algebru, tedy například svaz.

Příklad. Nechť (S, \vee, \wedge) je svaz. Kongruence na něm je ekvivalence \sim na množině S splňující:

pro každé $a, b, c, d \in S$

$$a \sim c, \quad b \sim d \implies a \vee b \sim c \vee d, \quad a \wedge b \sim c \wedge d.$$

Je-li \sim kongruence na svazu (S, \vee, \wedge) , pak faktorsvaz S/\sim je svaz, jehož nosná množina je rozklad množiny S příslušný ekvivalenci \sim , operace na něm jsou definovány pomocí reprezentantů.

Pro libovolné třídy $T, R \in S/\sim$ zvolíme $a \in T, b \in R$, definujeme:

$T \vee R$ je třída obsahující $a \vee b$,

$T \wedge R$ je třída obsahující $a \wedge b$.

Projekce na faktorovou algebru

Věta. Necht' A je univerzální algebra typu Ω , \sim kongruence na Ω -algebře A . Pak zobrazení $\pi : A \rightarrow A/\sim$ určené předpisem $a \in \pi(a)$ pro libovolné $a \in A$ (tedy $\pi(a)$ je třída obsahující prvek a) je surjektivní homomorfismus Ω -algeber.

Důkaz. Zobrazení π je surjekce, neboť každá třída rozkladu $X \in A/\sim$ je neprázdná, existuje tedy $a \in X$, pro které $\pi(a) = X$. Zvolme libovolně n -ární operační symbol $f \in \Omega$ a prvky $a_1, \dots, a_n \in A$. Označme $X_1 = \pi(a_1), \dots, X_n = \pi(a_n)$. Pak tedy $a_1 \in X_1, \dots, a_n \in X_n$ a $f_{A/\sim}(X_1, \dots, X_n)$ je určeno tím, že obsahuje prvek $f_A(a_1, \dots, a_n)$, tj.

$$\pi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = f_{A/\sim}(X_1, \dots, X_n) = f_{A/\sim}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)),$$

a tedy π je homomorfismus Ω -algeber.

Definice. Homomorfismus Ω -algeber $\pi : A \rightarrow A/\sim$ z předchozí věty se nazývá projekce Ω -algebry A na faktorovou algebru A/\sim .

Jádro projekce na faktorovou algebru

Věta. Necht' A je univerzální algebra typu Ω , \sim kongruence na Ω -algebře A . Necht' $\pi : A \rightarrow A/\sim$ je projekce Ω -algebry A na faktorovou algebru A/\sim . Pak platí: jádrem projekce π je kongruence \sim .

Důkaz. Označme \approx jádro π . Podle definice jádra homomorfismu pro libovolné $a, b \in A$ platí $a \approx b$ právě tehdy, když $\pi(a) = \pi(b)$, což podle definice projekce znamená, že a a b patří do téže třídy rozkladu A/\sim , neboli $a \sim b$.

Poznámka. Jádro libovolného homomorfismu Ω -algeber je podle definice kongruencí. Platí to však i naopak:

Důsledek. Necht' A je univerzální algebra typu Ω . Pak každá kongruence \sim na Ω -algebře A je jádrem vhodného homomorfismu Ω -algeber vycházejícího z Ω -algebry A .

Důkaz. Kongruence \sim je jádrem projekce $\pi : A \rightarrow A/\sim$.

Vztah kongruencí a podalgeber

Poznámka. Každá ekvivalence na množině A je relace na A , tedy podmnožina množiny $A \times A$. Vždyť $a \sim b$ znamená $(a, b) \in \sim$.

Věta. Necht' \sim je ekvivalence na nosné množině Ω -algebry A . Pak platí: \sim je kongruence na Ω -algebře A , právě když je \sim podalgebrou Ω -algebry $A \times A$.

Důkaz. „ \Rightarrow “ Zvolme libovolný n -ární operační symbol $f \in \Omega$ a prvky $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in A \times A$. Jestliže všechny tyto uspořádané dvojice patří do \sim , pak platí $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$, podle definice kongruence $f_A(a_1, \dots, a_n) \sim f_A(b_1, \dots, b_n)$. Tedy dvojice $(f_A(a_1, \dots, a_n), f_A(b_1, \dots, b_n))$ je také prvkem \sim .

„ \Leftarrow “ Zvolme libovolně n -ární operační symbol $f \in \Omega$ a prvky $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ takové, že $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$. Pak dvojice $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ jsou prvky podalgebry \sim , tedy také $f_{A \times A}((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) = (f_A(a_1, \dots, a_n), f_A(b_1, \dots, b_n))$ patří do podalgebry \sim , neboli $f_A(a_1, \dots, a_n) \sim f_A(b_1, \dots, b_n)$.

Svaz kongruencí na dané Ω -algebře

Nechť A je Ω -algebra, \sim a \approx kongruence na Ω -algebře A . Pak $\approx \subseteq \sim$, právě když pro každé $a, b \in A$ platí implikace

$$a \approx b \implies a \sim b.$$

Systém všech kongruencí na A je uspořádan inkluzí.

Uvažme libovolnou neprázdnou množinu K kongruencí na Ω -algebře A . Průnikem všech kongruencí $\sim \in K$ je relace \approx na množině A , pro kterou platí: pro libovolné $a, b \in A$ je $a \approx b$ právě tehdy, když pro každé $\sim \in K$ platí $a \sim b$.

Relace \approx je zřejmě reflexivní, symetrická a tranzitivní, je tedy také ekvivalencí na množině A .

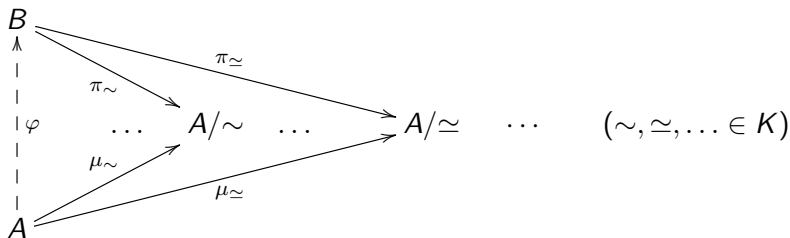
Z předchozí věty a odpovídající věty o průnicích podalgeber pak plyne, že \approx je kongruencí na Ω -algebře A .

Existuje také největší ze všech kongruencí na Ω -algebře A , totiž relace $A \times A$. Proto množina všech kongruencí na Ω -algebře A uspořádaná inkluzí tvoří úplný svaz.

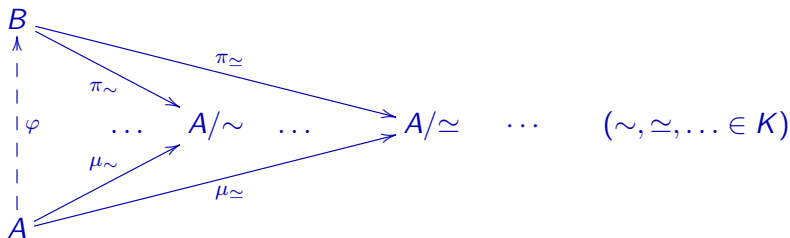
Průnik množiny kongruencí

Věta. Necht' A je univerzální algebra typu Ω , K neprázdná množina kongruencí na Ω -algebře A . Necht' relace \approx na množině A je průnikem všech kongruencí z množiny K , tj. pro libovolné $a, b \in A$ klademe $a \approx b$ právě tehdy, když pro každé $\sim \in K$ je $a \sim b$.

Uvažme součin Ω -algeber $B = \prod_{\sim \in K} A/\sim$. Pro každé $\sim \in K$ označme $\pi_{\sim} : B \rightarrow A/\sim$ projekci ze součinu a $\mu_{\sim} : A \rightarrow A/\sim$ projekci Ω -algebry A na faktorovou algebru A/\sim . Podle věty o součinu existuje jediný homomorfismus Ω -algeber $\varphi : A \rightarrow B$ takový, že $\pi_{\sim} \circ \varphi = \mu_{\sim}$. Pak platí: jádrem homomorfismu φ je kongruence \approx .



Důkaz věty

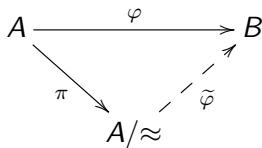


Důkaz. Označme \bowtie jádro homomorfismu φ . Pro libovolné $a, b \in A$ platí $a \bowtie b$ právě tehdy, když $\varphi(a) = \varphi(b)$, což podle definice součinu Ω -algeber nastane právě tehdy, když pro každé $\sim \in K$ platí $\pi_{\sim}(\varphi(a)) = \pi_{\sim}(\varphi(b))$, což vzhledem k $\pi_{\sim} \circ \varphi = \mu_{\sim}$ znamená právě $\mu_{\sim}(a) = \mu_{\sim}(b)$, neboli $a \sim b$.

Dokázali jsme, že pro libovolné $a, b \in A$ platí $a \bowtie b$ právě tehdy, když pro každé $\sim \in K$ je $a \sim b$, což však podle definice relace \approx nastane, právě když $a \approx b$.

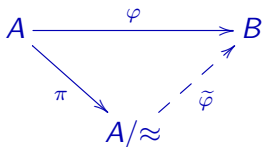
Hlavní věta o faktorových algebrách

Věta. Necht' A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω ,
 $\varphi : A \rightarrow B$ homomorfismus Ω -algeber s jádrem \sim . Necht' \approx je
libovolná kongruence na Ω -algebře A , přičemž $\approx \subseteq \sim$. Označme
 $\pi : A \rightarrow A/\approx$ projekci Ω -algebry A na faktorovou algebru A/\approx .
Pak platí



- ▶ Existuje jediné zobrazení $\tilde{\varphi} : A/\approx \rightarrow B$ takové, že $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.
- ▶ Toto zobrazení $\tilde{\varphi}$ je homomorfismus Ω -algeber.
- ▶ Homomorfismus $\tilde{\varphi}$ je injektivní, právě když jsou obě kongruence \sim a \approx stejné (tj. $\sim = \approx$).
- ▶ Homomorfismus $\tilde{\varphi}$ je surjektivní, právě když homomorfismus φ je surjektivní.

Důkaz věty



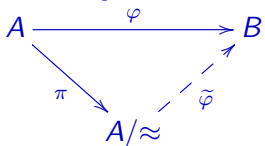
Existuje jediné zobrazení $\tilde{\varphi} : A/\approx \rightarrow B$ takové, že $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

Důkaz. Sestrojíme zobrazení $\tilde{\varphi} : A/\approx \rightarrow B$ tak, aby $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$. Zvolme libovolně $X \in A/\approx$. Existuje $a \in X$, tedy $\pi(a) = X$. Pak $\tilde{\varphi}(X) = \tilde{\varphi}(\pi(a)) = (\tilde{\varphi} \circ \pi)(a) = \varphi(a)$.

Pokud nějaké zobrazení $\tilde{\varphi} : A/\approx \rightarrow B$ splňující $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ existuje, je jediné. Definujme tedy $\tilde{\varphi} : A/\approx \rightarrow B$ tímto jediným způsobem: pro libovolné $X \in A/\approx$ tedy zvolíme $a \in X$ a klademe $\tilde{\varphi}(X) = \varphi(a)$.

Ověřme korektnost této definice, neboli nezávislost na volbě $a \in X$. Mějme další $b \in X$, pak oba prvky a, b leží v téže třídě X rozkladu A/\approx , odkud $a \approx b$. Protože $\approx \subseteq \sim$, plyne odtud $a \sim b$. Ovšem \sim je jádrem homomorfismu φ , proto poslední znamená $\varphi(a) = \varphi(b)$. Je tedy skutečně definice zobrazení $\tilde{\varphi}$ korektní.

Důkaz věty

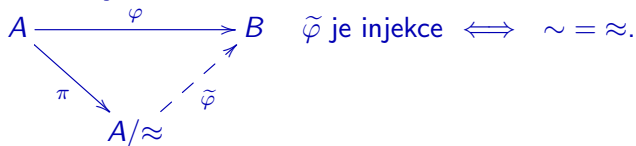


Zobrazení $\tilde{\varphi}$ je homomorfismus Ω -algeber.

Důkaz. Zvolme libovolně operační symbol $f \in \Omega$ arity n a prvky $X_1, \dots, X_n \in A/\approx$. Zvolme $a_1, \dots, a_n \in A$, aby $\pi(a_1) = X_1, \dots, \pi(a_n) = X_n$. Protože π a φ jsou homomorfismy Ω -algeber, platí

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(f_{A/\approx}(X_1, \dots, X_n)) &= \tilde{\varphi}(f_{A/\approx}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))) = \\ &= \tilde{\varphi}(\pi(f_A(a_1, \dots, a_n))) = \\ &= (\tilde{\varphi} \circ \pi)(f_A(a_1, \dots, a_n)) = \\ &= \varphi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = \\ &= f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \\ &= f_B((\tilde{\varphi} \circ \pi)(a_1), \dots, (\tilde{\varphi} \circ \pi)(a_n)) = \\ &= f_B(\tilde{\varphi}(\pi(a_1)), \dots, \tilde{\varphi}(\pi(a_n))) = \\ &= f_B(\tilde{\varphi}(X_1), \dots, \tilde{\varphi}(X_n)). \end{aligned}$$

Důkaz věty



Důkaz. „ \Leftarrow “ Necht' $X_1, X_2 \in A/\approx$ jsou libovolné prvky splňující $\tilde{\varphi}(X_1) = \tilde{\varphi}(X_2)$. Zvolme $a_1, a_2 \in A$, aby $\pi(a_1) = X_1$, $\pi(a_2) = X_2$. Pak

$$\begin{aligned}\varphi(a_1) &= (\tilde{\varphi} \circ \pi)(a_1) = \tilde{\varphi}(\pi(a_1)) = \tilde{\varphi}(X_1) = \\ &= \tilde{\varphi}(X_2) = \tilde{\varphi}(\pi(a_2)) = (\tilde{\varphi} \circ \pi)(a_2) = \varphi(a_2),\end{aligned}$$

odkud z definice jádra homomorfismu plyne $a_1 \sim a_2$, a proto $a_1 \approx a_2$, což znamená, že prvky a_1 a a_2 leží v téže třídě rozkladu, kterou je $X_1 = X_2$.

„ \Rightarrow “ Stačí ověřit $\sim \subseteq \approx$, neboť $\approx \subseteq \sim$ předpokládáme. Necht' tedy jsou $a, b \in A$ takové, že $a \sim b$. Pak $\varphi(a) = \varphi(b)$, tedy $\tilde{\varphi}(\pi(a)) = \tilde{\varphi}(\pi(b))$. Protože předpokládáme, že $\tilde{\varphi}$ je injektivní, máme $\pi(a) = \pi(b)$. Podle definice projekce na faktorovou algebru leží a a b v téže třídě rozkladu A/\approx , tedy $a \approx b$.

Důkaz věty



Důkaz. „ \Leftarrow “ Pro každé $b \in B$ existuje $a \in A$ tak, že $b = \varphi(a) = (\tilde{\varphi} \circ \pi)(a) = \tilde{\varphi}(\pi(a))$, a tedy $\tilde{\varphi}$ je surjekce.

„ \Rightarrow “ Složení dvou surjekcí je surjekce.

Důsledek. Necht' A, B jsou univerzální algebry téhož typu Ω , $\varphi : A \rightarrow B$ surjektivní homomorfismus Ω -algeber s jádrem \sim . Pak Ω -algebra B je izomorfní s faktorovou algebrou A/\sim .

Důkaz. Stačí užít předchozí větu pro $\approx = \sim$.

Definice termu typu Ω

Abychom mohli definovat například grupu nebo okruh, potřebujeme rovnosti. Příkladem rovností jsou komutativní, asociativní, distributivní a další identity, se kterými jsme se setkali. Jde vždy o rovnost mezi dvěma výrazy, které obsahují nějaké proměnné spolu svázané operacemi. Tyto výrazy nazýváme termy. Je jasné, že vždy máme v rovnosti jen konečně mnoho proměnných. Proto bude stačit pracovat s proměnnými x_1, x_2, x_3, \dots

Definice. Nechť Ω je typ, pro každé nezáporné celé číslo n označme Ω_n množinu všech operačních symbolů z Ω , které jsou n -ární. Položme $M_0 = \Omega_0 \cup \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ a pro každé $i \in \mathbb{N}$ označme

$$M_i = M_{i-1} \cup \{f(t_1, \dots, t_n); n \in \mathbb{N}, f \in \Omega_n, t_1, \dots, t_n \in M_{i-1}\}.$$

Pak $F(\Omega) = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ nazýváme množinou všech termů typu Ω , jejím prvkům říkáme termy typu Ω .

Termy

Poznámka. Termy jsou tedy konečné posloupnosti symbolů z abecedy, která se skládá z množiny proměnných, množiny Ω , kulatých závorek a čárky, tedy slova nad touto abecedou. Jsou to právě ta slova, která lze zkonstruovat konečně mnoha aplikacemi následujících pravidel:

- ▶ Pro libovolné přirozené číslo n je proměnná x_n term typu Ω .
- ▶ Pro libovolný nulární operační symbol $f \in \Omega$ je f term typu Ω .
- ▶ Pro libovolné přirozené číslo n , libovolný n -ární operační symbol $f \in \Omega$ a libovolné termy t_1, \dots, t_n typu Ω je výraz $f(t_1, \dots, t_n)$ term typu Ω .

Poznámka. Definici termu nebudeme užívat dogmaticky. Je-li $\Omega = \{+\}$, pak je termem například $+(x_1, +(x_2, x_3))$. Je jasné, že tento zápis nevyhovuje svou nepřehledností. Proto budeme i nadále tento term psát ve tvaru $x_1 + (x_2 + x_3)$. Podobně pro $\Omega = \{\vee, \wedge, '\}$ budeme term $\vee(x_1, '(x_1))$ psát raději nepřesně ve tvaru $x_1 \vee x_1'$.

Arita termu

Definice. Řekneme, že term t typu Ω je n -ární, jestliže se při jeho konstrukci nevyužilo žádné proměnné x_m pro $m > n$.

Příklad. Term x_2 je binární, ovšem je též 3-ární a také 4-ární atd. Není však unární, přestože v něm vystupuje jen jedna proměnná.

Příklad. Nulární term typu Ω je term, při jehož konstrukci se nepoužila žádná proměnná. Je jasné, že takové termy existují jen pro typy obsahující alespoň jeden nulární operační symbol.

Poznámka. Každý n -ární term t typu Ω nám v libovolné Ω -algebře A zadává n -ární operaci: místo proměnné x_k dosadíme prvek a_k a provedeme naznačené operace. Například pro $\Omega = \{+, \cdot\}$ s binárními operačními symboly term $t = (x_1 + x_2) \cdot x_3$ na libovolné Ω -algebře A určuje 3-ární operaci $t_A(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2) \cdot a_3$, kde bychom správně měli psát operace $+_A$ a \cdot_A místo operačních symbolů $+$ a \cdot . Chceme-li však tento jasný fakt definovat přesně, je nutné užít opět induktivní definici.

Operace na Ω -algebře určená termem typu Ω

Definice. Nechť t je n -ární term typu Ω , nechť A je Ω -algebra. Definujeme n -ární operaci t_A určenou termem t na Ω -algebře A následujícím způsobem. Nechť $a_1, \dots, a_n \in A$ jsou libovolné prvky.

- ▶ Je-li $t = x_k$, pak $t_A(a_1, \dots, a_n) = a_k$.
- ▶ Je-li termem t nulární operační symbol $f \in \Omega$, pak $t_A(a_1, \dots, a_n) = f_A$.
- ▶ Je-li $t = f(t_1, \dots, t_n)$, kde $f \in \Omega$ je k -ární, $k \geq 1$, a t_1, \dots, t_k jsou n -ární termy typu Ω , pak $t_A(a_1, \dots, a_n) = f_A((t_1)_A(a_1, \dots, a_n), \dots, (t_k)_A(a_1, \dots, a_n))$.

Příklad. Je-li n -ární $f \in \Omega$, pak $(f(x_1, \dots, x_k))_A = f_A$ pro každou Ω -algebru A .

Poznámka. Protože libovolný n -ární term typu Ω lze považovat též za m -ární term typu Ω pro libovolné $m \geq n$, dopustili jsme se v předchozí definici jisté nepřesnosti: stejným symbolem t_A označujeme různé operace!

Nezávislost operace na zbytečně vysoké aritě termu

Příklad. Jestliže Ω obsahuje binární operační symbol $+$ a my považujeme term $x_1 + x_2$ za binární, pak podle předchozí definice platí $(x_1 + x_2)_A(a_1, a_2) = a_1 + a_2$, pokud tento term však považujeme za 3-ární, pak $(x_1 + x_2)_A(a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2$. Obecně, pro libovolné $n \geq 2$, je-li term $x_1 + x_2$ považován za n -ární, pak $(x_1 + x_2)_A(a_1, \dots, a_n) = a_1 + a_2$.

Věta. Necht' t je n -ární term typu Ω , necht' přirozené číslo $m > n$. Pak pro libovolnou univerzální algebru A typu Ω a libovolné $a_1, \dots, a_m \in A$ platí

$$t_A(a_1, \dots, a_n) = t_A(a_1, \dots, a_m),$$

kde symbolem t_A rozumíme vlevo n -ární operaci určenou termem t na A , kdežto vpravo m -ární operaci určenou termem t na A .

Důkaz indukcí vzhledem ke složitosti termu t .

Popis podalgebry generované podmnožinou

Věta. Necht' A je univerzální algebra typu Ω , M podmnožina nosné množiny A . Pak podalgebra $\langle M \rangle$ Ω -algebry A generovaná množinou M je tvaru

$$\langle M \rangle = \{t_A(a_1, \dots, a_n); n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \\ t \text{ je } n\text{-ární term typu } \Omega, a_1, \dots, a_n \in M\}.$$

Důkaz. Označme N množinu na pravé straně. Nejprve dokážeme $M \subseteq N$, stačí vzít $n = 1$ a unární term x_1 , neboť pro libovolné $a \in M$ je $(x_1)_A(a) = a$.

Necht' H je libovolná podalgebra Ω -algebry A obsahující množinu M . Indukcí vzhledem ke složitosti n -árního termu t lze snadno ukázat, že $t_A(a_1, \dots, a_n) \in H$.

Zbývá ukázat, že N je podalgebra Ω -algebry A .

Zvolme libovolně k -ární operační symbol $f \in \Omega$ a k libovolných prvků $b_1, \dots, b_k \in N$ a ukažme, že $f_A(b_1, \dots, b_k) \in N$. Ovšem pro každé $j = 1, \dots, k$ existuje n_j -ární term t_j typu Ω a n_j prvků $a_{j,1}, \dots, a_{j,n_j} \in M$ tak, že $b_j = (t_j)_A(a_{j,1}, \dots, a_{j,n_j})$. Potřebujeme prvky b_1, \dots, b_k získat jako hodnoty operací příslušných nějakým termům typu Ω na stejné n -tici prvků množiny M . Proto položíme $n = n_1 + \dots + n_k$ a uvažme n -tici

$$(a_{1,1}, \dots, a_{1,n_1}, \dots, a_{k,1}, \dots, a_{k,n_k})$$

vzniklou poskládáním zmíněných n_j -tic za sebe. Označme t'_j term, který vznikne z termu t_j tím, že se indexy všech proměnných v něm použitých zvětší o číslo $n_1 + \dots + n_{j-1}$ (tedy speciálně $t'_1 = t_1$).

Platí tedy pro každé $j = 1, \dots, k$

$$b_j = (t_j)_A(a_{j,1}, \dots, a_{j,n_j}) = (t'_j)_A(a_{1,1}, \dots, a_{1,n_1}, \dots, a_{k,1}, \dots, a_{k,n_k}),$$

a proto

$$f_A(b_1, \dots, b_k) = (f(t'_1, \dots, t'_k))_A(a_{1,1}, \dots, a_{1,n_1}, \dots, a_{k,1}, \dots, a_{k,n_k}).$$

To je ale dle definice množiny N prvek N , což se mělo dokázat.

Rovnost typu Ω

Definice. Necht' t_1, t_2 jsou termy typu Ω . Výraz $t_1 = t_2$ nazýváme rovností typu Ω .

Poznámka. Zdůrazněme, že v předchozí definici je užito symbolu $=$ jen jako dalšího znaku abecedy, který oba termy spojil do jediného slova. V žádném případě tímto zápisem není myšleno, že jsou termy t_1 a t_2 stejné.

Příklad. Necht' $\Omega = \{\cdot\}$, kde \cdot je binární operační symbol, pak rovností typu Ω je například rovnost $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$. Tato rovnost psána naprosto formálně je tvaru $\cdot(x_1, x_2) = \cdot(x_2, x_1)$, ale je jasné, že není třeba si zbytečně komplikovat život přehnanou snahou po formálnosti, podstatné je to, že víme, jak formálně rovnost vypadá, a jsme schopni v případě potřeby ji správně formálně přepsat.

Příklad. Uvažme typ $\Omega = \{\cdot, {}^{-1}, 1\}$, kde operační symbol \cdot je binární, symbol ${}^{-1}$ je unární a symbol 1 je nulární. Příklady rovností jsou $(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$, $x_1 \cdot x_1^{-1} = 1$, atd.

Ω -algebra splňuje rovnost typu Ω

Definice. Necht' t_1 a t_2 jsou termy typu Ω , necht' A je univerzální algebra typu Ω . Necht' n je nejmenší přirozené číslo takové, že oba termy t_1 a t_2 jsou n -ární. Řekneme, že rovnost $t_1 = t_2$ platí v Ω -algebře A (neboli Ω -algebra A splňuje rovnost $t_1 = t_2$), jestliže termy t_1, t_2 určují stejnou n -ární operaci na Ω -algebře A , tj. pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ platí $(t_1)_A(a_1, \dots, a_n) = (t_2)_A(a_1, \dots, a_n)$.

Poznámka. Díky nezávislosti operace na aritě termu lze za n vzít libovolné přirozené číslo takové, že oba termy t_1 a t_2 jsou n -ární.

Příklad. Necht' $\Omega = \{\cdot\}$, kde \cdot je binární operační symbol, pak rovnost $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$ platí v Ω -algebře A , právě když je A komutativní grupoid.

Příklad. Necht' $t_1 = t_2$ je libovolná rovnost typu Ω . Pak v libovolné jednoprvkové Ω -algebře A platí rovnost $t_1 = t_2$. Jestliže existuje prázdná Ω -algebra (tj. jestliže typ Ω nemá žádný nulární operační symbol), pak v této prázdné algebře rovnost $t_1 = t_2$ také platí.

Příklad. Rovnost $x_1 = x_2$ neplatí v žádné Ω -algebře A mající alespoň dva prvky.