

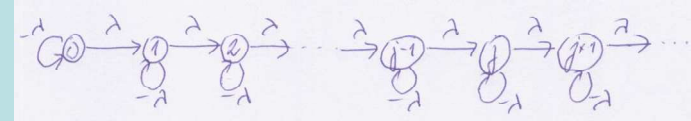
16. Poissonův proces

16.1. Definice: Definice Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{0, 1, 2, \dots\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$ a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda > 0 \text{ je konstanta, nazývá se } \textit{intenzita}.$$

Přechodový diagram:



Tento HMŘ se nazývá **Poissonův proces** (s parametrem λ). (Vidíme, že v Poissonově procesu je možné jen setrvání v dosavadním stavu nebo přechod do nejbližšího vyššího stavu.)

Poissonův proces je pojmenován po Siméonu Denisi Poissonovi (1781 – 1840), což byl francouzský teoretický fyzik, matematik, geometr a astronom. Je mezi 72 slavnými Francouzi, jejichž jména jsou na Eiffelově věži, a je po něm pojmenován kráter na Měsíci.



Vysvětlení: Uvažujeme události téhož typu, které nastávají náhodně v čase. Pro $t > 0$ označme X_t počet událostí, které nastanou v intervalu $(0, t)$. Nechť jsou splněny tyto podmínky:

- v krátkém časovém intervalu $(t, t + h)$ nastane událost s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$ nezávisle na t a nezávisle na počtu událostí, které nastaly v intervalu $(0, t)$,
- víc než jedna událost nastane s pravděpodobností $o(h)$,
- počty událostí, které se vyskytnou v disjunktních časových intervalech, jsou nezávislé.,
- nechť $X_0 = 0$,
- střední hodnota počtu událostí, které nastanou za časovou jednotku, je konstanta $\lambda > 0$.

Pak pro $\forall t \geq 0$ platí: $P(X_{t+h} = j / X_t = i) = p_{ij}(h) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & \text{pro } j = i + 1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & \text{pro } j = i \\ o(h) & \text{pro } j > i + 1 \\ 0 & \text{pro } j < i \end{cases}$, $p_0(0) = 1$, $p_j(0) = 0$ pro $j \neq 0$.

Odtud dostáváme, že intenzity přechodu jsou: $q_{i,i+1} = \lambda$, $q_{ii} = -\lambda$, $q_{ij} = 0$ pro $j \neq i, j \neq i+1$, tedy

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Příklady uvažovaných událostí:

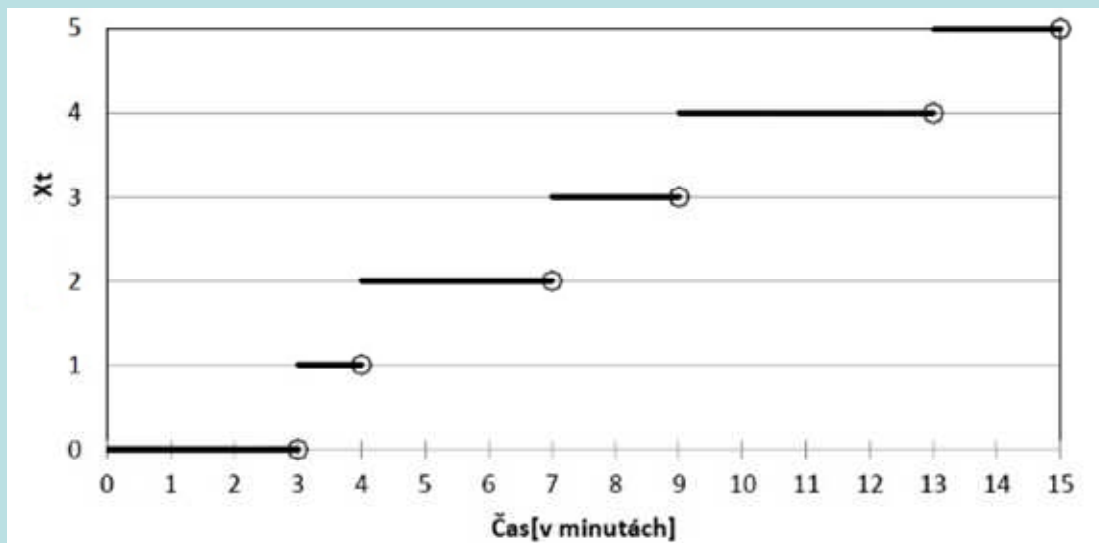
- dopady částic kosmického záření zaznamenávané čítačem částic
- rozpady radioaktivního prvku
- výzvy přicházející do telefonní ústředny
- dopravní nehody registrované na nějakém silničním úseku
- poruchy automatického stroje
- příchody zákazníků do nějakého systému obsluhy apod.

Upozornění: U těchto praktických příkladů není splněn předpoklad, že intenzita výskytu událostí λ je nezávislá na čase.

Provoz v telefonní ústředně je jistě živější dopoledne než večer; silniční provoz záleží jak na denní době tak na dnu v týdnu; množství radioaktivní látky časem ubývá a tedy ubývá i intenzita rozpadu jejích atomů; poruchovost stroje se může zvyšovat s jeho opotřebením apod. Často se ale sleduje výskyt těchto událostí jen po nějakou omezenou dobu, během níž lze předpokládat neměnnost intenzity λ .

Grafické znázornění realizací Poissonova procesu

Předpokládejme, že během 15 minut zaznamenáváme příchozí hovory do informačního střediska. První zákazník volal 3 minuty po zahájení sledování, další zákazníci pak 4, 7, 9 a 13 minut po zahájení sledování. Během sledovaných 15 minut tedy nastalo 5 příchozích hovorů.



16.2. Věta: Věta o pravděpodobnostním rozložení složek Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Pak platí: $\forall t \in T \forall j \in J: p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$.

Důkaz: Sestavíme systém evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$.

$$(\mathbf{p}'_0(t), \mathbf{p}'_1(t), \mathbf{p}'_2(t), \dots) = (\mathbf{p}_0(t), \mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \dots) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \begin{matrix} \mathbf{p}'_0(t) = -\lambda \mathbf{p}_0(t) \\ \mathbf{p}'_1(t) = \lambda \mathbf{p}_0(t) - \lambda \mathbf{p}_1(t) \\ \mathbf{p}'_2(t) = \lambda \mathbf{p}_{01}(t) - \lambda \mathbf{p}_2(t) \\ \vdots \end{matrix}$$

Obecně: $\mathbf{p}'_j(t) = \lambda \mathbf{p}_{j-1}(t) - \lambda \mathbf{p}_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}_0(0) = 1$, $\mathbf{p}_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \dots$

Při řešení těchto rovnic použijeme LT.

Obraz 1. rovnice: $zP_0(z) - p_0(0) = 1 = -\lambda P_0(z) \Rightarrow P_0(z) = \frac{1}{z + \lambda} \Rightarrow p_0(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{z + \lambda}\right) = e^{-\lambda t}$

Obraz 2. rovnice: $zP_1(z) - p_1(0) = 0 = \lambda P_0(z) = \frac{1}{z + \lambda} - \lambda P_1(z) \Rightarrow P_1(z) = \frac{\lambda}{(z + \lambda)^2} \Rightarrow p_1(t) = L^{-1}\left(\frac{\lambda}{(z + \lambda)^2}\right) = \lambda t e^{-\lambda t}$

Obraz 3. rovnice: $zP_2(z) - p_2(0) = 0 = \lambda P_1(z) = \frac{\lambda}{(z + \lambda)^2} - \lambda P_2(z) \Rightarrow P_2(z) = \frac{\lambda^2}{(z + \lambda)^3} \Rightarrow p_2(t) = L^{-1}\left(\frac{\lambda^2}{(z + \lambda)^3}\right) = \frac{1}{2!} (\lambda t)^2 e^{-\lambda t}$

Obecně: $p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Vysvětlení: Náhodná veličina X_t , která udává např. počet zákazníků, kteří přijdou do fronty v intervalu $(0, t)$, se řídí rozložením $Po(\lambda t)$. Střední hodnota počtu událostí, které nastanou v intervalu $(0, t)$, je rovna číslu λt , tedy konstanta λ představuje střední hodnotu počtu událostí, které nastanou za jednotkový časový interval. Proto se λ nazývá intenzita procesu.

Čísla $p_j(t)$ udávají pravděpodobnosti, že v intervalu $(0, t)$ nastalo právě j událostí.

Číslo $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ udává pravděpodobnost, že v intervalu $(0, t)$ nenastala žádná událost.

Označíme-li S dobu čekání na změnu mezi stavy (tj. dobu čekání na příchod události resp. dobu setrvání ve stavu),

pak $P(S > t) = e^{-\lambda t}$, tedy $P(S \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. To znamená, že je-li rozložení počtu událostí, které nastaly v intervalu $(0, t)$

Poissonovo, je rozložení doby čekání na změnu resp. doby setrvání ve stavu exponenciální.

Upozornění: Pro Poissonův proces neexistuje limitní rozložení, protože

$$\forall j \in J : \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^j}{j!} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{\lambda t}} = 0$$

16.3. Příklad: Majitel obchodu s potravinami zjistil, že v ranní špičce přichází do obchodu průměrně 20 zákazníků za 5 minut. Majitelova manželka se domnívá, že v průběhu 10 minut může očekávat v průměru 30 zákazníků, zatímco optimističtější majitel v průběhu 10 minut očekává 40 zákazníků. Který odhad je pravděpodobnější?

Řešení:

Příchody zákazníků do obchodu lze modelovat Poissonovým procesem $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = j$, když za časový interval $(0, t)$ přijde do obchodu právě j zákazníků, $j = 0, 1, 2, \dots$

Parametr procesu (intenzita procesu): $\lambda = \frac{20}{5} = 4$ zákazníci za 1 minutu .

Podle předpokladu: $X_t \sim \text{Po}(4t)$, tedy $P(X_t = j) = \frac{(4t)^j}{j!} e^{-4t}$

Odhad manželky: $P(X_{10} = 30) = \frac{(4 \cdot 10)^{30}}{30!} e^{-4 \cdot 10} = p_{30}(10) = 0,01847$

V MATLABu: `poisspdf(30,40)`

Odhad manžela: $P(X_{10} = 40) = \frac{(4 \cdot 10)^{40}}{40!} e^{-4 \cdot 10} = p_{40}(10) = 0,06297$

V MATLABu: `poisspdf(40,40)`

Optimistický odhad majitele je pravděpodobnější než opatrný odhad jeho manželky.

16.4. Věta: Věta o pravděpodobnostech přechodu v Poissonově procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Pak platí: $\forall t \in T \forall i, j \in J: p_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & \text{pro } j \geq i \\ 0 & \text{pro } j < i \end{cases}$.

Důkaz: Z matice intenzit přechodu plyne, že jediný přechod s nenulovou pravděpodobností je přechod do stavu o 1 vyššího.

Přitom počáteční stav je nulový, tedy $p_j(t) = p_{0j}(t)$. V důsledku homogenity: $p_{ij}(t) = p_{0,j-i}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & \text{pro } j \geq i \\ 0 & \text{pro } j < i \end{cases}$.

16.5. Věta: Věta o střední hodnotě a rozptylu Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Pak $E(X_t) = \lambda t$, $D(X_t) = \lambda t$.

Důkaz: Plyne z vlastností Poissonova rozložení, protože $X_t \sim \text{Po}(\lambda t)$.

16.6. Věta: Věta o koeficientu korelace dvou složek Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Pak platí: $\forall t, h \in T, h > 0 : R(X_t, X_{t+h}) = \sqrt{\frac{t}{t+h}}$.

Důkaz: $R(X_t, X_{t+h}) = \frac{C(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{D(X_t)D(X_{t+h})}} = \frac{E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h})}{\sqrt{D(X_t)D(X_{t+h})}}$. Ve větě 16.5. bylo ukázáno, že $E(X_t) = \lambda t$, $D(X_t) = \lambda t$. Stačí tedy spočítat $E(X_t X_{t+h})$.

$$E(X_t X_{t+h}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} ij P(X_t = i \wedge X_{t+h} = j) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} ij P(X_t = i) P(X_{t+h} = j / X_t = i) =$$

$$|P(X_t = i) = p_i(t), P(X_{t+h} = j / X_t = i) = p_{ij}(t, t+h) = p_{j-i}(h) \text{ pro } j \geq i \text{ podle 16.4.}| = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} ij p_i(t) p_{j-i}(h) = |k = j - i| =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} i(k+i) p_i(t) p_k(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} i(k+i) \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{-\lambda h} = e^{-\lambda(t+h)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} ik \frac{(\lambda t)^i}{i!} \frac{(\lambda h)^k}{k!} + e^{-\lambda(t+h)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} i^2 \frac{(\lambda t)^i}{i!} \frac{(\lambda h)^k}{k!} =$$

$$= |i^2 = i(i-1) + i| = e^{-\lambda(t+h)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{(i-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{(k-1)!} + e^{-\lambda(t+h)} \sum_{i=1}^{\infty} [(i(i-1) + i)] \frac{(\lambda t)^i}{i!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda(t+h)} \lambda t e^{\lambda t} \lambda h e^{\lambda h} + e^{-\lambda(t+h)} \left[\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{(i-1)!} \right] e^{\lambda h} = \lambda^2 t h + e^{-\lambda t} (\lambda^2 t^2 e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}) = \lambda^2 t h + \lambda^2 t^2 + \lambda t$$

Po dosazení: $R(X_t, X_{t+h}) = \frac{\lambda^2 t h + \lambda^2 t^2 + \lambda t - \lambda t \lambda (t+h)}{\sqrt{\lambda t \lambda (t+h)}} = \frac{\lambda t}{\sqrt{\lambda^2 t (t+h)}} = \frac{t}{\sqrt{t(t+h)}} = \sqrt{\frac{t}{t+h}}$.

16.7. Věta: Věta o rozložení doby setrvání řetězce v daném stavu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Označme S_j dobu, kterou řetězec setrvá ve stavu $j-1$, $j = 1, 2, \dots$. Pak $S_j \sim \text{Ex}(\lambda)$ a střední hodnota doby setrvání řetězce ve stavu $j-1$ je $\frac{1}{\lambda}$.

Důkaz: Plyne z věty 14.9.

16.8. Věta: Věta o nezávislosti dob setrvání řetězce v daných stavech

Náhodné veličiny S_j , $j = 1, 2, \dots$ jsou stochasticky nezávislé.

Důkaz: Nebudeme provádět.

16.9. Příklad: Na autobusovou zastávku přijíždějí autobusy linek č. 1 a č. 2. Předpokládáme, že příjezdy autobusů obou linek tvoří události Poissonových procesů s parametry λ_1, λ_2 , přičemž tyto procesy probíhají nezávisle na sobě. Vypočítejte pravděpodobnost, že za časový interval délky t přijede na zastávku právě k autobusů.

Řešení:

Označme X_t počty příjezdů linky č. 1 v intervalu $(0, t)$, $X_t \sim \text{Po}(\lambda_1 t)$, $P(X_t = j) = \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} e^{-\lambda_1 t}$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Označme Y_t počty příjezdů linky č. 2 v intervalu $(0, t)$, $Y_t \sim \text{Po}(\lambda_2 t)$, $P(Y_t = j) = \frac{(\lambda_2 t)^j}{j!} e^{-\lambda_2 t}$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Dále označme Z_t počty příjezdů autobusů obou linek v intervalu $(0, t)$, $Z_t = X_t + Y_t$. Máme počítat $P(Z_t = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Podle věty o rozložení součtu dvou stochasticky nezávislých náhodných veličin dostáváme:

$$P(Z_t = k) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_t = j)P(Y_t = k - j) = \sum_{j=0}^k \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_2 t)^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda_2 t} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda_1 t)^j (\lambda_2 t)^{k-j} = \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2)t]^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

Znamená to, že $Z_t \sim \text{Po}((\lambda_1 + \lambda_2)t)$.

16.10. Věta: Věta o bodovém a intervalovém odhadu parametru λ Poissonova procesu

Nechť v intervalu $\langle 0, T \rangle$ byl sledován Poissonův proces s neznámým parametrem λ a bylo pozorováno n událostí.

a) Bodový odhad parametru λ je dán vzorcem: $\hat{\lambda} = \frac{n}{T}$, přičemž $E(\hat{\lambda}) = \lambda$ (tj. $\hat{\lambda}$ je nestranný odhad) a $D(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{T}$.

b) $100(1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro λ má meze: $d = \frac{1}{2T} \chi^2_{\alpha/2}(2n)$, $h = \frac{1}{2T} \chi^2_{1-\alpha/2}(2n+2)$.

16.11. Příklad: Na určitém zařízení byly po dobu 580 h sledovány poruchy. Za tuto dobu jich nastalo 22. Za předpokladu, že poruchy tvoří události Poissonova procesu s parametrem λ , odhadněte tento parametr a najděte pro něj 95% empirický interval spolehlivosti.

Řešení:

$$T = 580, n = 22, \text{ tedy } \hat{\lambda} = \frac{n}{T} = \frac{22}{580} = 0,0379$$

$$d = \frac{1}{2T} \chi^2_{\alpha/2}(2n) = \frac{1}{2 \cdot 580} \chi^2_{0,025}(44) = \frac{1}{1160} 27,57 = 0,0238$$

$$h = \frac{1}{2T} \chi^2_{1-\alpha/2}(2n+2) = \frac{1}{2 \cdot 580} \chi^2_{0,975}(46) = \frac{1}{1160} 66,62 = 0,0574$$

$0,0238 < \lambda < 0,0574$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

16.12. Poznámka: Poissonův proces lze v MATLABu simulovat pomocí funkce Poisson.m:

```
function [v,abscet,relcet,p, tabulka1, tabulka2]=Poisson(CPS,lambda,t)
```

```
% vstupni parametry
```

```
%CPS ... celkovy pocet simulovanych prichodu zakazniku
```

```
%lambda ... intenzita vstupniho proudu zakazniku
```

```
%t ... casovy krok
```

```
% vystupni parametry
```

```
%v ... vektor variant poctu zakazniku
```

```
%abscet ... abs. cetnosti jednotlivych variant
```

```
%relcet ... relativni cetnosti jednotlivych variant
```

```
%p ... pravdepodobnosti jednotlivych variant
```

```
%tabulka1 ... empiricke a teoreticke charakteristiky simulovaneho poctu
```

```
%zakazniku
```

```
%tabulka2 ... empiricke a teoreticke charakteristiky doby simulace
```

Tuto funkci použijeme při řešení následujícího příkladu.

16.13. Příklad: V sobotu v době od 8 do 20 h sledujeme provoz v klidné ulici ve vilové čtvrti města. V tomto období vjíždějí auta do této ulice v průměru každých 8 minut. Předpokládejme, že intervaly mezi příjezdy aut se řídí exponenciálním rozložením. Pomocí MATLABu simulujte vjezd 20 aut do této ulice.

Řešení: V tomto případě jsou vstupní parametry tyto: CPS = 20, lambda = 1/8, časový krok zvolíme např. t = 8. Teoretická celková doba simulace by měla být $20 \cdot 8 = 160$ min, průměr = 8 min, směrodatná odchylka = 8 min.)
`[v,abscet,relcet,p, tabulka1, tabulka2]=Poisson(CPS,lambda,t)`

Počet aut, která vjíždějí vždy během 8 minut	Abs. četnost	Rel. četnost	pravděpodobnost
0	15	0,5357	0,3679
1	6	0,2143	0,3679
2	6	0,2143	0,1839
4	1	0,0357	0,0153

Průměrný počet aut za časový krok: 0,7857
 Střední hodnota počtu aut za časový krok: 1
 Pozorovaná směr. odch. počtu aut za časový krok: 1,0313
 Směrodatná odchylka počtu aut za časový krok: 1
 Celková doba simulace: 214,7869
 Teoretická celková doba simulace: $20 \cdot 8 = 160$
 Průměrná doba mezi vjezdy aut: 10,7393
 Střední hodnota doby mezi vjezdy aut: 8
 Pozorovaná směr. odch. doby mezi vjezdy aut: 14,8255
 Směrodatná odchylka doby mezi vjezdy aut: 8

Realizace Poissonova procesu:

