7. Klasifikace stavů homogenního markovského řetězce

7.1. Označení: Označení prvků matice $\mathbf{P}^n$

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J a s maticí přechodu **P**. Prvky matice $\mathbf{P}^n$ budeme značit $p_{ij}(n)$.

7.2. Definice: Definice doby prvního návratu do stavu j

Nechť homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ vychází ze stavu j, tj.

$P(X_0 = j) = 1$. Zavedeme množinu $T_j = \{n \geq 1; X_n = j\}$, která udává pořadí okamžiků návratů do stavu j. Náhodná veličina

$$\tau_j = \begin{cases} \min\{T_j\} \text{pro } T_j \neq \emptyset \\ \infty \text{ pro } T_j = \emptyset \end{cases}$$

se nazývá doba prvního návratu do stavu j.

7.3. Označení: Označení pravděpodobnostní funkce doby prvního návratu do stavu j

Náhodná veličina τ_j je diskrétní náhodná veličina, nabývá hodnot 1, 2, 3, ... Její pravděpodobnostní funkci označíme $f_j(n)$, tedy $f_j(n) = P(\tau_j = n)$, n = 1, 2, 3, ... (pro n = 0 položíme $f_j(0) = 0$). Pravděpodobnost, že homogenní markovský řetězec vycházející ze stavu j, se vůbec někdy vrátí do stavu j, je tedy $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)$. Pravděpodobnost f_j lze vyjádřit jako $P(\tau_j < \infty)$.

7.4. Věta: Souvislost pravděpodobnostní funkce doby 1. návratu s pravděpodobnostmi přechodu

Pravděpodobnostní funkce doby 1. návratu do stavu j souvisí s pravděpodobnostmi přechodu takto:

$$\forall j \in J: p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^{n} p_{jj}(n-k) f_j(k),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Odtud lze $f_j(n)$ vyjádřit pomocí rekurentního vztahu:

$$\forall j \in J: p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k) f_j(k) + f_j(n) \Rightarrow f_j(n) = p_{jj}(n) - \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k) f_j(k).$$

Důkaz:

Při důkazu použijeme větu o úplné pravděpodobnosti $P(A) = \sum_{k \in I} P(H_k) P(A / H_k)$, kde jevy H_k tvoří úplný systém hypotéz. V našem případě označme $A = \{X_n = j\}$, $H_k = \{\tau_j = k\}$. Počítáme

$$P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P(\tau_j = k) P(X_n = j / \tau_j = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(\tau_j = k) P(X_n = j / X_0 = j \wedge X_1 \neq j \wedge \ldots \wedge X_{k-1} \neq j \wedge X_k = j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_j(k) P(X_n = j / X_0 = j \wedge X_1 \neq j \wedge \ldots \wedge X_{k-1} \neq j \wedge X_k = j)$$

Použijeme předpoklad, že $X_0 = j$ a markovskou vlastnost. Pak dostaneme

$$p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_j(k) p_{jj}(n-k)$$

7.5. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$. Je-li vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0), vypočtěte pravděpodobnost, že doba 1. návratu do stavu 0 bude n, n = 1, 2, 3, ... a vypočtěte pravděpodobnost, že řetězec se vůbec někdy vrátí do stavu 0.

Řešení: Použijeme vzorec $f_j(n) = p_{jj}(n) - \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k) f_j(k)$. Počítáme

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 + \alpha\beta & (1-\alpha)\alpha + (1-\beta)\alpha \\ (1-\alpha)\beta + \beta(1-\beta) & \alpha\beta + (1-\beta)^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 + \alpha\beta & (1-\alpha)\alpha + (1-\beta)\alpha \\ (1-\alpha)\beta + \beta(1-\beta) & \alpha\beta + (1-\beta)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta & 1-p_{00}(3) \\ 1-p_{11}(3) & (1-\alpha)\alpha\beta + 2(1-\beta)\alpha\beta + (1-\beta)^3 \end{pmatrix}$$

$f_0(1) = p_{00} = 1 - \alpha$

$f_0(2) = p_{00}(2) - p_{00}f_0(1) = (1-\alpha)^2 + \alpha\beta - (1-\alpha)^2 = \alpha\beta$

$f_0(3) = p_{00}(3) - p_{00}(2)f_0(1) - p_{00}f_0(2) = (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta - [(1-\alpha)^2 + \alpha\beta](1-\alpha) - (1-\alpha)\alpha\beta =$

$=(1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta - (1-\alpha)^3 - (1-\alpha)\alpha\beta - (1-\alpha)\alpha\beta = (1-\beta)\alpha\beta$

Obecně: $f_0(n) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{pro } n = 1 \\ (1-\beta)^{n-2}\alpha\beta & \text{pro } n = 2,3,\ldots \end{cases}$,

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_0(n) = 1-\alpha+\sum_{n=2}^{\infty}(1-\beta)^{n-2}\alpha\beta = 1-\alpha+\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}(1-\beta)^n = 1-\alpha+\alpha\beta\frac{1}{1-(1-\beta)} = 1$$

7.6. Definice: Definice trvalého a přechodného stavu

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J.

a) Stav $j \in J$ se nazývá trvalý, jestliže $f_j = 1$ (tj. $P(\tau_j < \infty) = 1$. Znamená to, že řetězec se do stavu j vrátí po konečně mnoha krocích s pravděpodobností 1.)

b) Stav $j \in J$ se nazývá přechodný, jestliže $f_j < 1$ (tj. $P(\tau_j = \infty) > 0$. (Znamená to, že řetězec se do stavu j s kladnou pravděpodobností nikdy nevrátí.)

Množina trvalých stavů se značí J_T, množina přechodných stavů J_P. Přitom $J_T \cup J_P = J, J_T \cap J_P = \emptyset$.

7.7. Věta: Kritérium pro klasifikaci trvalých a přechodných stavů.

a) Stav j je trvalý, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty$.

b) Stav j je přechodný, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) < \infty$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

7.8. Příklad: Provádíme posloupnost opakovaných nezávislých hodů kostkou. Nechť náhodná veličina X_n udává maximální číslo dosažené v prvních n hodech, n = 1, 2, 3, ... Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n ; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {1, 2, ..., 6}, kde $X_n = j$, když v prvních n hodech bylo nejvyšší dosažené číslo j. Najděte matici přechodu **P** a klasifikujte stavy na trvalé a přechodné.

Řešení:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zajímají nás jen diagonální prvky matice $\mathbf{P}^n$, protože zkoumáme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$.

$$p_{11} = \frac{1}{6}, p_{11}(2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2, p_{11}(3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3, \ldots$$

$$p_{22} = \frac{2}{6}, p_{22}(2) = \left(\frac{2}{6}\right)^2, p_{22}(3) = \left(\frac{2}{6}\right)^3, \ldots$$

Obecně: $p_{jj}(n) = \left(\frac{j}{6}\right)^n$, j = 1, ..., 6

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{j}{6}\right)^n$ absolutně konverguje pro j = 1, 2, 3, 4, 5 a diverguje pro j = 6. Tedy $J_T = \{6\}$, $J_P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

7.9. Definice: Definice trvalého nenulového stavu a trvalého nulového stavu

Nechť $j \in J$ je trvalý stav homogenního markovského řetězce $\{X_n; n \in N_0\}$.

a) Stav j se nazývá trvalý nenulový, jestliže existuje střední hodnota μ_j náhodné veličiny τ_j.

b) Stav j se nazývá trvalý nulový, jestliže střední hodnota náhodné veličiny τ_j neexistuje.

	$P(\tau_j = \infty) > 0$	$P(\tau_j < \infty) = 1$
$\mu_j < \infty$	x	trvalý nenulový stav
$\mu_j = \infty$	přechodný stav	trvalý nulový stav

7.10. Důsledek: Kritérium pro klasifikaci trvalých nenulových stavů a trvalých nulových stavů

Stav j je trvalý nenulový, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n)$ absolutně konverguje.

Stav j je trvalý nulový, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n)$ diverguje.

7.11. Poznámka: Lze ukázat, že HMŘ s konečnou množinou stavů nemůže mít trvalé nulové stavy.

7.12. Definice: Definice periodického stavu, neperiodického stavu, ergodického stavu

Nechť d_j je největší společný dělitel čísel $n \geq 1$, pro něž $p_{jj}(n) > 0$.

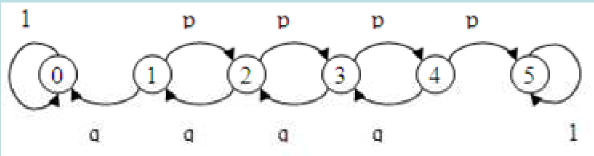
Je-li $d_j > 1$, pak řekneme, že stav j je periodický s periodou d_j.

Je-li $d_j = 1$, pak řekneme, že stav j je neperiodický.

Trvalý nenulový neperiodický stav se nazývá ergodický stav.

7.13. Příklad: Na úsečce délky 5 jsou vyznačeny body 0, 1, ..., 5. V bodě 3 se nachází kulička. Kulička koná náhodnou procházku po úsečce tak, že s pravděpodobností p se posune o jednotku napravo a s pravděpodobností q = 1 – p se posune o jednotku nalevo. Dosáhne-li bodu 0 nebo bodu 5, setrvá tam. Popište proces pomocí homogenního markovského řetězce a klasifikujte stavy na periodické a neperiodické.

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, kde $X_n = j$, když v okamžiku n je kulička v bodě j.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p_{00}(n) = 1$ pro $\forall n \in N \Rightarrow$ stav 0 je neperiodický.

$p_{55}(n) = 1$ pro $\forall n \in N \Rightarrow$ stav 5 je neperiodický.

$p_{11}(1) = 0$, $p_{11}(2) = pq$, $p_{11}(3) = 0$, $p_{11}(4) = 2p^2q^2$, ... Největší společný dělitel čísel 2, 4, 6, ... je 2, tedy stav 1 je periodický s periodou 2. Stejně to dopadne se stavy 2, 3, 4.

7.14. Věta: Výpočet střední hodnoty doby 1. návratu do ergodického stavu a trvalého nenulového periodického stavu

a) Nechť $j \in J$ je trvalý nenulový neperiodický stav (tj. ergodický stav). Pak $\mu_j = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}(n)}$.

b) Nechť $j \in J$ je trvalý nenulový periodický stav s periodou d_j. Pak $\mu_j = \dfrac{d_j}{\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}(nd_j)}$.

7.15. Příklad: Nechť je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2\}$ a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Vypočtěte střední hodnoty dob 1. návratů do stavů 0, 1, 2.

Řešení: Jelikož matice **P** je regulární matice, bude matice $\mathbf{P}^n$ konvergovat k limitní matici, jejíž všechny řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru **a** matice **P**.

$$(a_0, a_1, a_2) = (a_0, a_1, a_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{6} \\ a_1 &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \\ a_2 &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{2} \\ a_0 &+ a_1 + a_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= \frac{6}{25} \\ a_1 &= \frac{10}{25} \\ a_2 &= \frac{9}{25} \end{aligned} \quad \overline{\mathbf{p}} = \left(\frac{6}{25}, \frac{10}{25}, \frac{9}{25}\right),\ \boldsymbol{\mu} = \left(\frac{25}{6}, \frac{25}{10}, \frac{25}{9}\right)$$

Vychází-li řetězec např. ze stavu 1, tak v průměru po 2,5 krocích se tam vrátí.

8. Rozložitelné a nerozložitelné homogenní markovské řetězce

8.1. Definice: Definice dosažitelných a sousledných stavů

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J.

a) Řekneme, že stav j je dosažitelný ze stavu i, když existuje $n \geq 0$ tak, že $p_{ij}(n) > 0$.

Pokud $p_{ij}(n) = 0$ pro všechna $n \geq 1$, pak řekneme, že stav j není dosažitelný ze stavu i.

(Je zřejmé, že každý stav je dosažitelný ze sebe sama. Je-li stav j dosažitelný ze stavu i a stav k je dosažitelný ze stavu j, pak stav k je dosažitelný ze stavu i.)

b) Řekneme, že stav j je souslední se stavem i, jestliže j je dosažitelný z i a i je dosažitelný z j.

(Symbolicky se dosažitelnost stavu j ze stavu i označuje takto: $i \rightarrow j$ a souslednost stavů i, j se označuje takto: $i \leftrightarrow j$.
Souslednost stavů splňuje podmínky relace ekvivalence na množině J.)

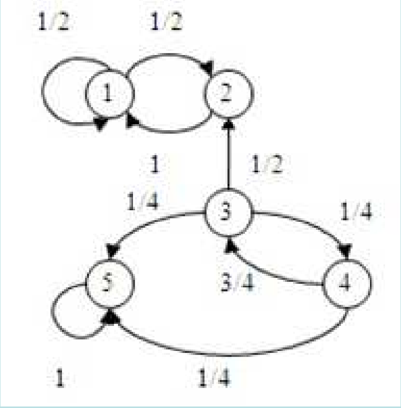
8.2. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů

$$J = \{1, 2, ..., 5\} \text{ a maticí přechodu } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakreslete přechodový diagram a sestavte tabulku dosažitelných stavů a tabulku sousledných stavů.

Řešení:

Přechodový diagram



Tabulka dosažitelných stavů

stav	dosažitelný stav				
	1	2	3	4	5
1	+	+	-	-	-
2	+	+	-	-	-
3	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+
5	-	-	-	-	+

Tabulka sousledných stavů

stav	sousledný stav				
	1	2	3	4	5
1	+	+	-	-	-
2	+	+	-	-	-
3	-	-	+	+	-
4	-	-	+	+	-
5	-	-	-	-	+

8.3. Definice: Definice třídy trvalých stavů a třídy přechodných stavů

Neprázdná množina stavů $C \subseteq J$ se nazývá třída trvalých stavů, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný ze žádného stavu uvnitř C. Množina stavů, která není třídou trvalých stavů, se nazývá třída přechodných stavů.

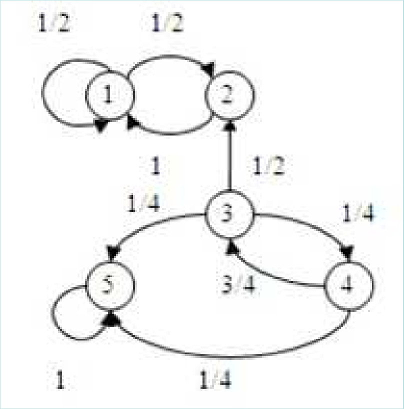
8.4. Příklad: Pro homogenní markovský řetězec z příkladu 8.2. najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Řešení:

Nejprve uvedeme matici přechodu.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nakreslíme přechodový diagram.



Z diagramu je zřejmé, že když řetězec vstoupí do třídy stavů {1, 2} nebo {5}, není odtud dosažitelný žádný stav vně třídy {1, 2} resp. {5}, tedy $J_T = \{1,2\} \cup \{5\}$. Když řetězec vstoupí do třídy stavů {3, 4}, jsou odtud dosažitelné stavy 5 nebo 2, tedy $J_P = \{3,4\}$.

8.5. Poznámka: Poznámka o podřetězci homogenního markovského řetězce

Jestliže v matici přechodu **P** vynecháme ty řádky a sloupce, které odpovídají stavům nepatřícím do třídy trvalých stavů C, dostaneme opět stochastickou matici. Lze ji považovat za matici přechodu homogenního markovského řetězce s množinou stavů C. Nazývá se podřetězec původního řetězce. Např. pro homogenní markovský řetězec z příkladu 8.2. , který má

matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dostaneme podřetězec s maticí přechodu $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.6. Důsledek: Důsledek pro třídu trvalých stavů a pro třídu přechodných stavů

a) Řetězec nikdy neopustí třídu trvalých stavů, jakmile do ní jednou vstoupí.

b) Řetězec se nikdy nevrátí do třídy přechodných stavů, jakmile ji jednou opustí.

8.7. Věta: Kritérium pro stanovení třídy trvalých stavů

Množina stavů $C \subseteq J$ je třída trvalých stavů, právě když $p_{ij} = 0$ pro $\forall i \in C, j \notin C$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

8.8. Definice: Definice rozložitelného a nerozložitelného homogenního markovského řetězce

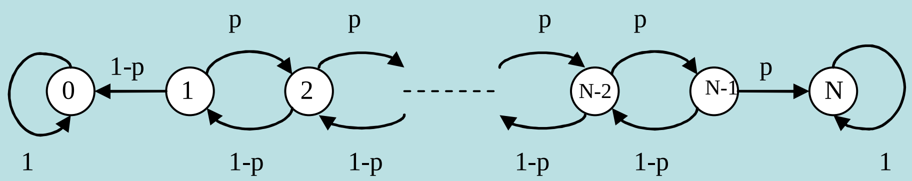
Homogenní markovský řetězec se nazývá nerozložitelný, jestliže všechny jeho stavy jsou sousledné. V opačném případě říkáme, že řetězec je rozložitelný.

Ekvivalentní definice: HMŘ se nazývá nerozložitelný, jestliže v něm neexistuje jiná třída trvalých stavů než J.

8.9. Věta: Řetězec s konečně mnoha stavy je rozložitelný právě tehdy, má-li matice přechodu (po případném přečíslování stavů) tvar $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{B}$ jsou čtvercové matice.

Důkaz: viz Prášková, str. 37.

8.10. Příklad: Uvažme náhodnou procházku s pohlcujícími stěnami, tj. homogenní markovský řetězec $\{X_n ; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, ..., N-1, N} a přechodovým diagramem



Zjistěte, zda tento řetězec je rozložitelný. Pokud ano, najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Řešení: Z přechodového diagramu okamžitě vyplývá, že stavy 0 a N jsou sousledné jenom samy se sebou.

Ostatní stavy 1, 2, ..., N-1 jsou sousledné, řetězec je tedy rozložitelný a $J_T = \{0\} \cup \{N\}, J_P = \{1,2,\ldots,N-1\}$.

8.11. Definice: Definice stavů stejného typu

Řekneme, že stavy $i, j \in J$ homogenního markovského řetězce jsou stejného typu, jestliže jsou oba

a) přechodné

b) trvalé nenulové

c) trvalé nulové

d) neperiodické

e) periodické s touž periodou.

8.12. Věta: Věta o solidaritě

Jsou-li stavy i a j sousledné, pak jsou stejného typu.

Důkaz: Nebudeme provádět.

8.13. Důsledek: Důsledek pro nerozložitelný homogenní markovský řetězec

V nerozložitelném homogenním markovském řetězci jsou všechny stavy stejného typu. Má-li nerozložitelný homogenní markovský řetězec konečnou množinu stavů, pak jsou všechny stavy trvalé nenulové.

8.14. Věta: Věta o stacionárním rozložení nerozložitelného HMŘ

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec . Pak platí:

1. Jsou-li všechny jeho stavy přechodné nebo všechny trvalé nulové, pak stacionární rozložení neexistuje.
2. Jsou-li všechny jeho stavy trvalé nenulové, pak stacionární rozložení existuje a je jediné.

   2a) Jsou-li všechny stavy neperiodické, pak $a_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) > 0, i, j \in J$ a také $a_j = \lim_{n\to\infty} p_j(n) > 0, j \in J$

   2b) Jsou-li všechny stavy periodické, pak $a_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}(k) > 0, i, j \in J$ a také $a_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_j(k) > 0, j \in J$

8.15. Důsledek: V nerozložitelném homogenním markovském řetězci s konečně mnoha stavy stacionární rozloženi existuje.

8.16. Věta: Věta o množině stavů dosažitelných z trvalého stavu.

Nechť stav i je dosažitelný z nějakého trvalého stavu j. Pak platí:

a) stav i je trvalý stav stejného typu jako stav j

b) i a j jsou sousledné stavy

c) $f_{ji} = f_{ij} = 1$ (tj. pravděpodobnost, že řetězec vycházející ze stavu j resp. i vůbec někdy vstoupí do stavu i resp. j, je rovna 1).

(Znamená to, že množina stavů dosažitelných z nějakého trvalého stavu j je množina trvalých stavů a tvoří nerozložitelný podřetězec původního řetězce.)

8.17. Poznámka:

Nejprve pro jednoduchost předpokládejme, že v rozložitelném řetězci existují jen dvě třídy stavů. Znamená to, že současným přečíslováním stavů v matici přechodu lze vytvořit nulové submatice.

Dostáváme pak buď matici typu

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ jsou čtvercové matice obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi třídami stavů, přičemž obě třídy jsou třídy trvalých stavů,

nebo typu

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}$ jsou čtvercové matice, přičemž $\mathbf{P}_1$ obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi trvalými stavy, matice $\mathbf{Q}$ obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy a matice $\mathbf{R}$ je tvořena pravděpodobnostmi přechodu z přechodných do trvalých stavů.

Je-li matice **P** rozložitelná na tvar

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{0}$ jsou nulové čtvercové matice, bude systém oscilovat mezi dvěma třídami přechodných stavů a příslušná matice **P** bude popisovat periodický řetězec.

8.18. Poznámka: poznámka o rozkladu konečné množiny stavů J a o kanonickém tvaru matice přechodu

Předpokládejme nyní, že rozložitelný HMŘ je tvořen jak trvalými, tak přechodnými stavy, přičemž má r tříd trvalých stavů.

Věta 8.16. umožní rozložit množinu stavů J takto:

Nechť j_1 je trvalý stav s nejnižším indexem a J_1 je množina všech stavů dosažitelných z j_1.

Nechť j_2 je trvalý stav s nejnižším indexem mezi těmi trvalými stavy, které nepatří do J_1 a nechť J_2 je množina všech stavů dosažitelných z j_2 atd.

Lze tedy psát $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_r \cup J_P$, kde J_1, J_2, ..., J_r jsou neslučitelné množiny trvalých stavů a J_P je množina stavů přechodných. Je-li J konečná množina, pak matici přechodu **P** lze psát v tzv. kanonickém tvaru (po eventuálním přečíslování stavů).

Kanonický tvar matice **P**

J		J_T				J_P
		J_1	J_2	...	J_r	
J_T	J_1	$\mathbf{P_1}$	Ø	...	Ø	Ø
	J_2	Ø	$\mathbf{P_2}$	...	Ø	Ø
	...	...	...	...	...	...
	J_r	Ø	Ø	...	$\mathbf{P_r}$	Ø
J_P		$\mathbf{R_1}$	$\mathbf{R_2}$	...	$\mathbf{R_r}$	**Q**

$\mathbf{P}_1$, ..., $\mathbf{P}_r$ jsou matice obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi třídami trvalých stavů J_1, ..., J_r. Matice $\mathbf{R}_1$, ..., $\mathbf{R}_r$ obsahují pravděpodobnosti přechodu mezi třídami přechodných a trvalých stavů. Matice **Q** obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy.

8.19. Poznámka: Kanonický tvar matice přechodu lze v MATLABu získat pomocí funkce kant(P)

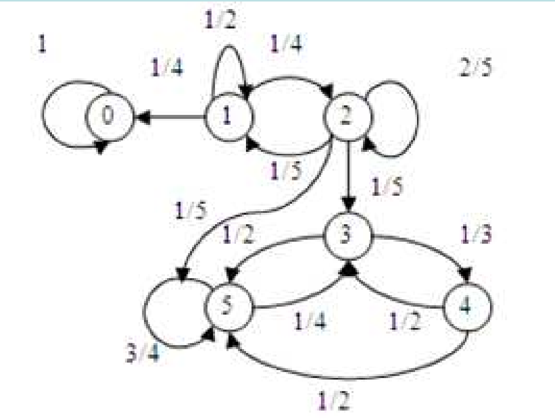
```
function[KT,NU,DS] = kant(P)
% Funkce pro vypocet kanonickeho tvaru matice prechodu rozlozitelneho HMR
% Syntaxe: [KT,NU,DS] = kant(P)
% Vstupni parametr: P ... matice prechodu HMR
% Vystupni parametry: KT ... matice prechodu v kanonickem tvaru
%                    NU ... nove usporadani
%                    DS ... tabulka dosazitelnych stavu
% Vytvoril: Karel Vaculík
```

8.20. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, ..., 5} a maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$. Najděte kanonický tvar matice **P**.

Řešení:

Přechodový diagram



$J_1 = \{0\}$, $J_2 = \{3, 4, 5\}$, $J_P = \{1, 2\}$.

Kanonický tvar matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Vidíme tedy, že

$$\mathbf{P}_1 = (1)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

8.21. Definice: Definice fundamentální matice nerozložitelného homogenního markovského řetězce

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je nerozložitelný homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Limitní matici přechodu označme **A**. Fundamentální matici **Z** tohoto řetězce definujeme vztahem: $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}$.

8.22. Věta: Věta o výpočtu středních hodnot dob prvních vstupů

Označme m_{ij} střední hodnotu doby 1. vstupu řetězce do stavu j za předpokladu, že vychází ze stavu i. Sestavíme matici $\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j \in J}$. Pak $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\widehat{\mathbf{Z}})\widehat{\mathbf{M}}$, kde **E** je matice ze samých jedniček, matice $\widehat{\mathbf{Z}}$ obsahuje jen diagonální prvky matice **Z** a matice $\widehat{\mathbf{M}}$ obsahuje jen diagonální prvky matice **M**.

8.23. Poznámka: Matici středních hodnot dob prvních vstupů lze v MATLABu získat pomocí funkce první_vstupy:

```
function [A,Z,M]=prvni_vstupy(P)
% funkce pro vypocet strednich hodnot dob prvnich vstupu do jednotlivych stavu nerozlozitelneho HMR
% synatxe:
% M=prvni_vstupy(P)
% vstupni parametr: P ... matice prechodu
% vystupni parametry: M ... matice strednich hodnot dob prvnich vstupu, A … limitni matice, Z … fundamentalni matice
n = size(P,1);
% urceni radu matice P
a=sv(P);
% vypocet stacionarniho vektoru matice P
A=[];
for i=1:n
    A=[A;a];
end
% vytvoreni limitni matice A
I=eye(n);
% vytvoreni jednotkove matice radu n
E=ones(n);
% vytvoreni matice radu n ze samych jednicek
Z=(I-(P-A))^(-1);
% vypocet fundamentalni matice
Zhat=diag(diag(Z));
%vyvoreni diagonalni matice z diagonalnich prvku matice Z
Mhat=diag(1./a);
% vytvoreni diagonalni matice ze strednich hodnot dob prvnich navratu
M=(I-Z+E*Zhat)*Mhat;
% vypocet matice středních hodnot dob prvních vstupu
```

8.24. Příklad: Při dlouhodobém sledování velkého souboru voličů s časovým krokem 1 měsíc byly zkoumány volební preference. Rozlišujeme strany A, B, C a Ostatní. Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {1, 2, 3, 4}, kde $X_n = 1$, když náhodně vybraný volič preferuje v n-tém měsíci stranu A, $X_n = 2$ pro stranu B, $X_n = 3$ pro stranu C a $X_n = 4$ pro ostatní strany. Pravděpodobnosti přechodu sympatií voličů jsou uvedeny v matici přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}05 & 0{,}11 & 0{,}14 \\ 0{,}01 & 0{,}82 & 0{,}05 & 0{,}12 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}03 & 0{,}92 \end{pmatrix}$$

. Najděte limitní matici přechodu a vypočtěte matici středních hodnot dob prvních přechodů.

Řešení: Limitní matici přechodu získáme složením čtyř stacionárních vektorů. Stacionární vektor existuje, neboť již matice $\mathbf{P}^2$ má všechny prvky kladné.

Řešením systému **a** = **aP** s podmínkou $\sum_{j=1}^{4} a_j = 1$ získáme stacionární vektor: **a** = (0,1328; 0,0881; 0,1843; 0,5949).

Znamená to, že během dlouhé doby může strana A očekávat 13,3% voličů, strana B 8,8%, strana C 18,4% a ostatní strany dohromady 59,5%.

Limitní matice přechodu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1328 & 0{,}0881 & 0{,}1843 & 0{,}5949 \\ 0{,}1328 & 0{,}0881 & 0{,}1843 & 0{,}5949 \\ 0{,}1328 & 0{,}0881 & 0{,}1843 & 0{,}5949 \\ 0{,}1328 & 0{,}0881 & 0{,}1843 & 0{,}5949 \end{pmatrix}$$

Interpretace 1. řádku matice **A**: Pokud volič v jednom měsíci preferoval stranu A, pak v následujícím měsíci ji bude s pravděpodobností 13,3% preferovat opět. Ke straně B se přikloní s pravděpodobností 8,8%, ke straně C s pravděpodobností 18,4% a s pravděpodobností 59,5% zvolí některou z ostatních stran.

K výpočtu matice středních hodnot dob prvních přechodů potřebujeme fundamentální matici **Z**:

$$\mathbf{Z} = \left(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}5863 & 0{,}2999 & 0{,}2549 & -2{,}1411 \\ -0{,}7741 & 4{,}7037 & -0{,}531 & -2{,}3986 \\ -0{,}2863 & 0{,}4354 & 3{,}6153 & -2{,}7644 \\ -0{,}1508 & -0{,}7502 & -0{,}7885 & 2{,}6895 \end{pmatrix}.$$

Matice $\hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 2{,}5863 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}7037 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}6153 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}6895 \end{pmatrix}$, matice $\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0{,}1328} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0{,}0881} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{01843} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0{,}5949} \end{pmatrix}$.

Matice $\mathbf{M} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\hat{\mathbf{Z}}\right)\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 7{,}5306 & 50 & 18{,}2353 & 8{,}1207 \\ 25{,}3061 & 11{,}3538 & 22{,}5 & 8{,}5535 \\ 21{,}6327 & 48{,}4615 & 5{,}4265 & 9{,}1686 \\ 20{,}6122 & 61{,}9231 & 23{,}8971 & 1{,}6811 \end{pmatrix}$.

Interpretace 1. řádku matice **M**: Volič, který na začátku sledování preferoval stranu A, v průměru za 7,5 měsíce dá poprvé znovu hlas této straně. V průměru za 50 měsíců bude poprvé preferovat stranu B a v průměru za 18,2 měsíce bude poprvé preferovat stranu C. V průměru za 8,1 měsíce se poprvé přikloní k některé z ostatních stran.