

## 7. Klasifikace stavů homogenního markovského řetězce

### 7.1. Označení: Označení prvků matice $\mathbf{P}^n$

Nechť  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  je homogenní markovský řetězec s množinou stavů  $J$  a s maticí přechodu  $\mathbf{P}$ . Prvky matice  $\mathbf{P}^n$  budeme značit  $p_{ij}(n)$ .

### 7.2. Definice: Definice doby prvního návratu do stavu $j$

Nechť homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  vychází ze stavu  $j$ , tj.

$P(X_0 = j) = 1$ . Zavedeme množinu  $T_j = \{n \geq 1; X_n = j\}$ , která udává pořadí okamžiků návratů do stavu  $j$ . Náhodná veličina

$$\tau_j = \begin{cases} \min\{T_j\} & \text{pro } T_j \neq \emptyset \\ \infty & \text{pro } T_j = \emptyset \end{cases} \quad \text{se nazývá **doba prvního návratu do stavu } j \text{.}**$$

### 7.3. Označení: Označení pravděpodobnostní funkce doby prvního návratu do stavu $j$

Náhodná veličina  $\tau_j$  je diskrétní náhodná veličina, nabývá hodnot  $1, 2, 3, \dots$ . Její pravděpodobnostní funkci označíme  $f_j(n)$ , tedy  $f_j(n) = P(\tau_j = n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  (pro  $n = 0$  položíme  $f_j(0) = 0$ ). Pravděpodobnost, že homogenní markovský řetězec

vycházející ze stavu  $j$ , se vůbec někdy vrátí do stavu  $j$ , je tedy  $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)$ . Pravděpodobnost  $f_j$  lze vyjádřit jako  $P(\tau_j < \infty)$ .

#### 7.4. Věta: Souvislost pravděpodobnostní funkce doby 1. návratu s pravděpodobnostmi přechodu

Pravděpodobnostní funkce doby 1. návratu do stavu  $j$  souvisí s pravděpodobnostmi přechodu takto:

$$\forall j \in J : p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^n p_{jj}(n-k) f_j(k), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Odtud lze  $f_j(n)$  vyjádřit pomocí rekurentního vztahu:

$$\forall j \in J : p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k) f_j(k) + f_j(n) \Rightarrow f_j(n) = p_{jj}(n) - \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k) f_j(k).$$

#### Důkaz:

Při důkazu použijeme větu o úplné pravděpodobnosti  $P(A) = \sum_{k \in I} P(H_k) P(A/H_k)$ , kde jevy  $H_k$  tvoří úplný

systém hypotéz. V našem případě označme  $A = \{X_n = j\}$ ,  $H_k = \{\tau_j = k\}$ . Počítáme

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_{k=1}^n P(\tau_j = k) P(X_n = j / \tau_j = k) = \\ &= \sum_{k=1}^n P(\tau_j = k) P(X_n = j / X_0 = j \wedge X_1 \neq j \wedge \dots \wedge X_{k-1} \neq j \wedge X_k = j) = \\ &= \sum_{k=1}^n f_j(k) P(X_n = j / X_0 = j \wedge X_1 \neq j \wedge \dots \wedge X_{k-1} \neq j \wedge X_k = j) \end{aligned}$$

Použijeme předpoklad, že  $X_0 = j$  a markovskou vlastnost. Pak dostaneme

$$p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^n f_j(k) p_{jj}(n-k)$$

**7.5. Příklad:** Necht'  $\{X_n; n \in N_0\}$  je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ . Je-li

vektor počátečních pravděpodobností  $\mathbf{p}(0) = (1, 0)$ , vypočtete pravděpodobnost, že doba 1. návratu do stavu 0 bude  $n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  a vypočtete pravděpodobnost, že řetězec se vůbec někdy vrátí do stavu 0.

**Řešení:** Použijeme vzorec  $f_j(n) = p_{jj}(n) - \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k)f_j(k)$ . Počítáme

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 + \alpha\beta & (1-\alpha)\alpha + (1-\beta)\alpha \\ (1-\alpha)\beta + \beta(1-\beta) & \alpha\beta + (1-\beta)^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 + \alpha\beta & (1-\alpha)\alpha + (1-\beta)\alpha \\ (1-\alpha)\beta + \beta(1-\beta) & \alpha\beta + (1-\beta)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta & 1-p_{00}(3) \\ 1-p_{11}(3) & (1-\alpha)\alpha\beta + 2(1-\beta)\alpha\beta + (1-\beta)^3 \end{pmatrix}$$

$$f_0(1) = p_{00} = 1 - \alpha$$

$$f_0(2) = p_{00}(2) - p_{00}f_0(1) = (1-\alpha)^2 + \alpha\beta - (1-\alpha)^2 = \alpha\beta$$

$$f_0(3) = p_{00}(3) - p_{00}(2)f_0(1) - p_{00}f_0(2) = (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta - [(1-\alpha)^2 + \alpha\beta](1-\alpha) - (1-\alpha)\alpha\beta = \\ = (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta - (1-\alpha)^3 - (1-\alpha)\alpha\beta - (1-\alpha)\alpha\beta = (1-\beta)\alpha\beta$$

$$\text{Obecně: } f_0(n) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{pro } n = 1 \\ (1-\beta)^{n-2} \alpha\beta & \text{pro } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_0(n) = 1 - \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} (1-\beta)^{n-2} \alpha\beta = 1 - \alpha + \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} (1-\beta)^n = 1 - \alpha + \alpha\beta \frac{1}{1-(1-\beta)} = 1$$

## 7.6. Definice: Definice trvalého a přechodného stavu

Nechť  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  je homogenní markovský řetězec s množinou stavů  $J$ .

a) Stav  $j \in J$  se nazývá **trvalý**, jestliže  $f_j = 1$  (tj.  $P(\tau_j < \infty) = 1$ ). Znamená to, že řetězec se do stavu  $j$  vrátí po konečně mnoha krocích s pravděpodobností 1.)

b) Stav  $j \in J$  se nazývá **přechodný**, jestliže  $f_j < 1$  (tj.  $P(\tau_j = \infty) > 0$ ). (Znamená to, že řetězec se do stavu  $j$  s kladnou pravděpodobností nikdy nevrátí.)

Množina trvalých stavů se značí  $J_T$ , množina přechodných stavů  $J_P$ . Přitom  $J_T \cup J_P = J, J_T \cap J_P = \emptyset$ .

## 7.7. Věta: Kritérium pro klasifikaci trvalých a přechodných stavů.

a) Stav  $j$  je trvalý, právě když  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty$ .

b) Stav  $j$  je přechodný, právě když  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) < \infty$ .

**Důkaz:** Nebudeme provádět.

**7.8. Příklad:** Provádíme posloupnost opakovaných nezávislých hodů kostkou. Necht' náhodná veličina  $X_n$  udává maximální číslo dosažené v prvních  $n$  hodech,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Zavedeme homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  s množinou stavů  $J = \{1, 2, \dots, 6\}$ , kde  $X_n = j$ , když v prvních  $n$  hodech bylo nejvyšší dosažené číslo  $j$ . Najděte matici přechodu  $\mathbf{P}$  a klasifikujte stavy na trvalé a přechodné.

**Řešení:**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zajímají nás jen diagonální prvky matice  $\mathbf{P}^n$ , protože zkoumáme řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$ .

$p_{11} = \frac{1}{6}, p_{11}(2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2, p_{11}(3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3, \dots$

$p_{22} = \frac{2}{6}, p_{22}(2) = \left(\frac{2}{6}\right)^2, p_{22}(3) = \left(\frac{2}{6}\right)^3, \dots$

Obecně:  $p_{jj}(n) = \left(\frac{j}{6}\right)^n, j = 1, \dots, 6$

Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{j}{6}\right)^n$  absolutně konverguje pro  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  a diverguje pro  $j = 6$ . Tedy  $J_T = \{6\}, J_P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

**7.9. Definice:** Definice trvalého nenulového stavu a trvalého nulového stavu

Nechť  $j \in J$  je trvalý stav homogenního markovského řetězce  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ .

- a) Stav  $j$  se nazývá **trvalý nenulový**, jestliže existuje střední hodnota  $\mu_j$  náhodné veličiny  $\tau_j$ .
- b) Stav  $j$  se nazývá **trvalý nulový**, jestliže střední hodnota náhodné veličiny  $\tau_j$  neexistuje.

	$P(\tau_j = \infty) > 0$	$P(\tau_j < \infty) = 1$
$\mu_j < \infty$	x	trvalý nenulový stav
$\mu_j = \infty$	přechodný stav	trvalý nulový stav

**7.10. Důsledek:** Kritérium pro klasifikaci trvalých nenulových stavů a trvalých nulových stavů

Stav  $j$  je trvalý nenulový, jestliže řada  $\sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n)$  absolutně konverguje.

Stav  $j$  je trvalý nulový, jestliže řada  $\sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n)$  diverguje.

**7.11. Poznámka:** Lze ukázat, že HMŘ s konečnou množinou stavů nemůže mít trvalé nulové stavy.

**7.12. Definice:** Definice periodického stavu, neperiodického stavu, ergodického stavu

Nechť  $d_j$  je největší společný dělitel čísel  $n \geq 1$ , pro něž  $p_{jj}(n) > 0$ .

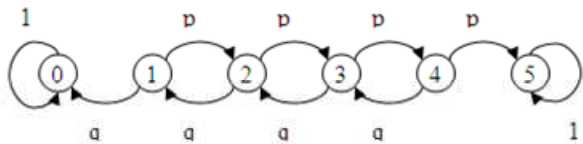
Je-li  $d_j > 1$ , pak řekneme, že stav  $j$  je **periodický** s periodou  $d_j$ .

Je-li  $d_j = 1$ , pak řekneme, že stav  $j$  je **neperiodický**.

Trvalý nenulový neperiodický stav se nazývá **ergodický** stav.

**7.13. Příklad:** Na úsečce délky 5 jsou vyznačeny body 0, 1, ..., 5. V bodě 3 se nachází kulička. Kulička koná náhodnou procházku po úsečce tak, že s pravděpodobností  $p$  se posune o jednotku napravo a s pravděpodobností  $q = 1 - p$  se posune o jednotku nalevo. Dosáhne-li bodu 0 nebo bodu 5, setrvá tam. Popište proces pomocí homogenního markovského řetězce a klasifikujte stavy na periodické a neperiodické.

**Řešení:** Zavedeme homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  s množinou stavů  $J = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , kde  $X_n = j$ , když v okamžiku  $n$  je kulička v bodě  $j$ .



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p_{00}(n) = 1$  pro  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  stav 0 je neperiodický.  
 $p_{55}(n) = 1$  pro  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  stav 5 je neperiodický.  
 $p_{11}(1) = 0, p_{11}(2) = pq, p_{11}(3) = 0, p_{11}(4) = 2p^2q^2, \dots$  Největší společný dělitel čísel 2, 4, 6, ... je 2,  
 tedy stav 1 je periodický s periodou 2. Stejně to dopadne se stavy 2, 3, 4.

**7.14. Věta:** Výpočet střední hodnoty doby 1. návratu do ergodického stavu a trvalého nenulového periodického stavu

a) Necht'  $j \in J$  je trvalý nenulový neperiodický stav (tj. ergodický stav). Pak  $\mu_j = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}(n)}$ .

b) Necht'  $j \in J$  je trvalý nenulový periodický stav s periodou  $d_j$ . Pak  $\mu_j = \frac{d_j}{\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}(nd_j)}$ .



**7.15. Příklad:** Necht' je dán homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  s množinou stavů  $J = \{0, 1, 2\}$  a maticí

přechodu  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . Vypočtěte střední hodnoty dob 1. návratů do stavů 0, 1, 2.

**Řešení:** Jelikož matice  $\mathbf{P}$  je regulární matice, bude matice  $\mathbf{P}^n$  konvergovat k limitní matici, jejíž všechny řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru  $\mathbf{a}$  matice  $\mathbf{P}$ .

$$\left. \begin{array}{l} (a_0, a_1, a_2) = (a_0, a_1, a_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} a_0 = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{6} \\ a_1 = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \\ a_2 = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{2} \end{array} \\ a_0 + a_1 + a_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_0 = \frac{6}{25} \\ a_1 = \frac{10}{25} \\ a_2 = \frac{9}{25} \end{array} \quad \bar{\mathbf{p}} = \left( \frac{6}{25}, \frac{10}{25}, \frac{9}{25} \right), \quad \boldsymbol{\mu} = \left( \frac{25}{6}, \frac{25}{10}, \frac{25}{9} \right)$$

Vychází-li řetězec např. ze stavu 1, tak v průměru po 2,5 krocích se tam vrátí.

## 8. Rozložitelné a nerozložitelné homogenní markovské řetězce

### 8.1. Definice: Definice dosažitelných a sousledných stavů

Nechť  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  je homogenní markovský řetězec s množinou stavů  $J$ .

a) Řekneme, že stav  $j$  je **dosažitelný** ze stavu  $i$ , když existuje  $n \geq 0$  tak, že  $p_{ij}(n) > 0$ .

Pokud  $p_{ij}(n) = 0$  pro všechna  $n \geq 1$ , pak řekneme, že stav  $j$  **není dosažitelný** ze stavu  $i$ .

(Je zřejmé, že každý stav je dosažitelný ze sebe sama. Je-li stav  $j$  dosažitelný ze stavu  $i$  a stav  $k$  je dosažitelný ze stavu  $j$ , pak stav  $k$  je dosažitelný ze stavu  $i$ .)

b) Řekneme, že stav  $j$  je **sousledný** se stavem  $i$ , jestliže  $j$  je dosažitelný z  $i$  a  $i$  je dosažitelný z  $j$ .

(Symbolicky se dosažitelnost stavu  $j$  ze stavu  $i$  označuje takto:  $i \rightarrow j$  a souslednost stavů  $i, j$  se označuje takto:  $i \leftrightarrow j$ .)

Souslednost stavů splňuje podmínky relace ekvivalence na množině  $J$ .)

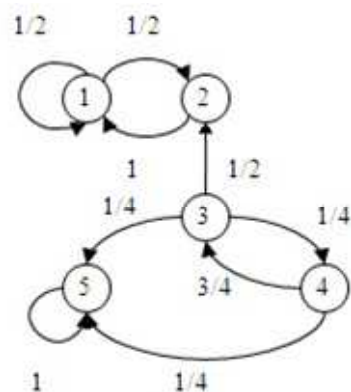
**8.2. Příklad:** Je dán homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in N_0\}$  s množinou stavů

$$J = \{1, 2, \dots, 5\} \text{ a maticí přechodu } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakreslete přechodový diagram a sestavte tabulku dosažitelných stavů a tabulku sousledných stavů.

**Řešení:**

Přechodový diagram



Tabulka dosažitelných stavů    Tabulka sousledných stavů

stav	dosažitelný stav				
	1	2	3	4	5
1	+	+	-	-	-
2	+	+	-	-	-
3	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+
5	-	-	-	-	+

stav	sousledný stav				
	1	2	3	4	5
1	+	+	-	-	-
2	+	+	-	-	-
3	-	-	+	+	-
4	-	-	+	+	-
5	-	-	-	-	+

### 8.3. Definice: Definice třídy trvalých stavů a třídy přechodných stavů

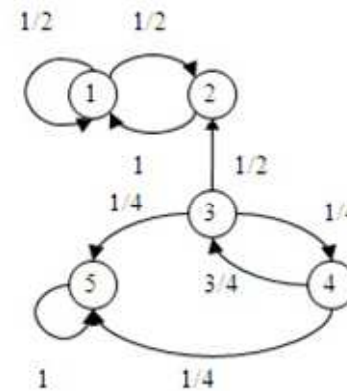
Neprázdná množina stavů  $C \subseteq J$  se nazývá **třída trvalých stavů**, jestliže žádný stav vně  $C$  není dosažitelný ze žádného stavu uvnitř  $C$ . Množina stavů, která není třídou trvalých stavů, se nazývá **třída přechodných stavů**.

**8.4. Příklad:** Pro homogenní markovský řetězec z příkladu 8.2. najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

**Řešení:**

Nejprve uvedeme matici přechodu. Nakreslíme přechodový diagram.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Z diagramu je zřejmé, že když řetězec vstoupí do třídy stavů  $\{1, 2\}$  nebo  $\{5\}$ , není odtud dosažitelný žádný stav vně třídy  $\{1, 2\}$  resp.  $\{5\}$ , tedy  $J_T = \{1, 2\} \cup \{5\}$ . Když řetězec vstoupí do třídy stavů  $\{3, 4\}$ , jsou odtud dosažitelné stavy 5 nebo 2, tedy  $J_p = \{3, 4\}$ .

### 8.5. Poznámka: Poznámka o podřetězci homogenního markovského řetězce

Jestliže v matici přechodu  $\mathbf{P}$  vynecháme ty řádky a sloupce, které odpovídají stavům nepatřícím do třídy trvalých stavů  $C$ , dostaneme opět stochastickou matici. Lze ji považovat za matici přechodu homogenního markovského řetězce s množinou stavů  $C$ . Nazývá se podřetězec původního řetězce. Např. pro homogenní markovský řetězec z příkladu 8.2. , který má

$$\text{matici přechodu } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dostaneme podřetězec s maticí přechodu } \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 8.6. Důsledek: Důsledek pro třídu trvalých stavů a pro třídu přechodných stavů

- a) Řetězec nikdy neopustí třídu trvalých stavů, jakmile do ní jednou vstoupí.
- b) Řetězec se nikdy nevrátí do třídy přechodných stavů, jakmile ji jednou opustí.

### 8.7. Věta: Kritérium pro stanovení třídy trvalých stavů

Množina stavů  $C \subseteq J$  je třída trvalých stavů, právě když  $p_{ij} = 0$  pro  $\forall i \in C, j \notin C$ .

**Důkaz:** Nebudeme provádět.

### 8.8. Definice: Definice rozložitelného a nerozložitelného homogenního markovského řetězce

Homogenní markovský řetězec se nazývá **nerozložitelný**, jestliže všechny jeho stavy jsou sousledné. V opačném případě říkáme, že řetězec je **rozložitelný**.

Ekvivalentní definice: HMR se nazývá nerozložitelný, jestliže v něm neexistuje jiná třída trvalých stavů než J.

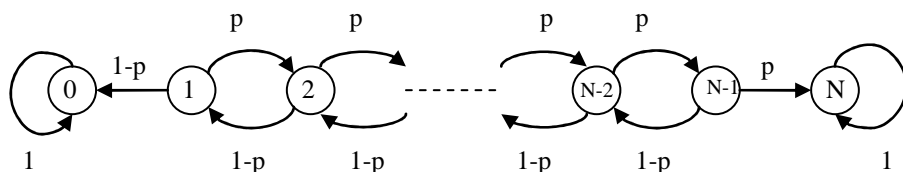
### 8.9. Věta: Řetězec s konečně mnoha stavy je rozložitelný právě tehdy, má-li matice přechodu (po případném přechíslování

stavů) tvar  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ , kde  $\mathbf{P}_1, \mathbf{B}$  jsou čtvercové matice.

**Důkaz:** viz Prášková, str. 37.

### 8.10. Příklad: Uvažme náhodnou procházku s pohlcujícími stěnami, tj. homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$

s množinou stavů  $J = \{0, 1, \dots, N-1, N\}$  a přechodovým diagramem



Zjistěte, zda tento řetězec je rozložitelný. Pokud ano, najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

**Řešení:** Z přechodového diagramu okamžitě vyplývá, že stavy 0 a N jsou sousledné jenom samy se sebou.

Ostatní stavy 1, 2, ..., N-1 jsou sousledné, řetězec je tedy rozložitelný a  $J_T = \{0\} \cup \{N\}, J_P = \{1, 2, \dots, N-1\}$ .

### 8.11. Definice: Definice stavů stejného typu

Řekneme, že stavy  $i, j \in J$  homogenního markovského řetězce jsou **stejného typu**, jestliže jsou oba

- a) přechodné
- b) trvalé nenulové
- c) trvalé nulové
- d) neperiodické
- e) periodické s touž periodou.

### 8.12. Věta: Věta o solidaritě

Jsou-li stavy  $i$  a  $j$  sousledné, pak jsou stejného typu.

**Důkaz:** Nebudeme provádět.

### 8.13. Důsledek: Důsledek pro nerozložitelný homogenní markovský řetězec

V nerozložitelném homogenním markovském řetězci jsou všechny stavy stejného typu. Má-li nerozložitelný homogenní markovský řetězec konečnou množinu stavů, pak jsou všechny stavy trvalé nenulové.

### 8.14. Věta: Věta o stacionárním rozložení nerozložitelného HMŘ

Nechť  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  je homogenní markovský řetězec. Pak platí:

1. Jsou-li všechny jeho stavy přechodné nebo všechny trvalé nulové, pak stacionární rozložení neexistuje.
2. Jsou-li všechny jeho stavy trvalé nenulové, pak stacionární rozložení existuje a je jediné.

2a) Jsou-li všechny stavy neperiodické, pak  $a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) > 0, i, j \in J$  a také  $a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) > 0, j \in J$

2b) Jsou-li všechny stavy periodické, pak  $a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}(k) > 0, i, j \in J$  a také  $a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_j(k) > 0, j \in J$

**8.15. Důsledek:** V nerozložitelném homogenním markovském řetězci s konečně mnoha stavy stacionární rozložení existuje.



**8.16. Věta:** Věta o množině stavů dosažitelných z trvalého stavu.

Necht' stav  $i$  je dosažitelný z nějakého trvalého stavu  $j$ . Pak platí:

a) stav  $i$  je trvalý stav stejného typu jako stav  $j$

b)  $i$  a  $j$  jsou sousledné stavy

c)  $f_{ji} = f_{ij} = 1$  (tj. pravděpodobnost, že řetězec vycházející ze stavu  $j$  resp.  $i$  vůbec někdy vstoupí do stavu  $i$  resp.  $j$ , je rovna 1).

(Znamená to, že množina stavů dosažitelných z nějakého trvalého stavu  $j$  je množina trvalých stavů a tvoří nerozložitelný podřetězec původního řetězce.)

### 8.17. Poznámka:

Nejprve pro jednoduchost předpokládejme, že v rozložitelném řetězci existují jen dvě třídy stavů. Znamená to, že současným přechislováním stavů v matici přechodu lze vytvořit nulové submatice.

Dostáváme pak buď matici typu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \text{ jsou čtvercové matice obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi třídami stavů, přičemž obě}$$

třídy jsou třídy trvalých stavů,

nebo typu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{P}_1, \mathbf{Q} \text{ jsou čtvercové matice, přičemž } \mathbf{P}_1 \text{ obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi trvalými stavy,}$$

matice  $\mathbf{Q}$  obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy a matice  $\mathbf{R}$  je tvořena pravděpodobnostmi přechodu z přechodných do trvalých stavů.

Je-li matice  $\mathbf{P}$  rozložitelná na tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{0} \text{ jsou nulové čtvercové matice, bude systém oscilovat mezi dvěma třídami přechodných stavů a}$$

příslušná matice  $\mathbf{P}$  bude popisovat periodický řetězec.

**8.18. Poznámka:** poznámka o rozkladu konečné množiny stavů  $J$  a o kanonickém tvaru matice přechodu

Předpokládejme nyní, že rozložitelný HMR je tvořen jak trvalými, tak přechodnými stavy, přičemž má  $r$  tříd trvalých stavů.

Věta 8.16. umožní rozložit množinu stavů  $J$  takto:

Nechť  $j_1$  je trvalý stav s nejnižším indexem a  $J_1$  je množina všech stavů dosažitelných z  $j_1$ .

Nechť  $j_2$  je trvalý stav s nejnižším indexem mezi těmi trvalými stavy, které nepatří do  $J_1$  a necht'  $J_2$  je množina všech stavů dosažitelných z  $j_2$  atd.

Lze tedy psát  $J = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_r \cup J_p$ , kde  $J_1, J_2, \dots, J_r$  jsou neslučitelné množiny trvalých stavů a  $J_p$  je množina stavů přechodných. Je-li  $J$  konečná množina, pak matici přechodu  $\mathbf{P}$  lze psát v tzv. kanonickém tvaru (po eventuálním přechíslování stavů).

Kanonický tvar matice  $\mathbf{P}$

$\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_r$  jsou matice obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi třídami trvalých stavů

$J_1, \dots, J_r$ . Matice  $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_r$  obsahují pravděpodobnosti přechodu mezi třídami přechodných a trvalých stavů. Matice  $\mathbf{Q}$  obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy.

J		$J_T$				$J_P$
		$J_1$	$J_2$	...	$J_r$	
$J_T$	$J_1$	$\mathbf{P}_1$	$\emptyset$	...	$\emptyset$	$\emptyset$
	$J_2$	$\emptyset$	$\mathbf{P}_2$	...	$\emptyset$	$\emptyset$
	...	...	...	...	...	...
	$J_r$	$\emptyset$	$\emptyset$	...	$\mathbf{P}_r$	$\emptyset$
$J_P$	$\mathbf{R}_1$	$\mathbf{R}_2$	...	$\mathbf{R}_r$	$\mathbf{Q}$	

**8.19. Poznámka:** Kanonický tvar matice přechodu lze v MATLABu získat pomocí funkce kant(P)

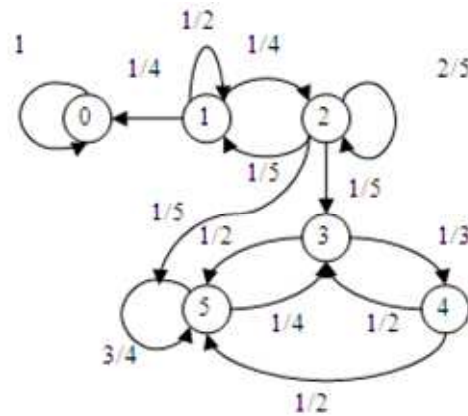
```
function[KT,NU,DS] = kant(P)
% Funkce pro vypocet kanonickeho tvaru matice prechodu rozlozitelneho HMR
% Syntaxe: [KT,NU,DS] = kant(P)
% Vstupni parametr: P ... matice prechodu HMR
% Vystupni parametry: KT ... matice prechodu v kanonickem tvaru
%           NU ... nove usporadani
%           DS ... tabulka dosazitelnych stavu
% Vytvoril: Karel Vaculik
```

**8.20. Příklad:** Je dán homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in N_0\}$  s množinou stavů  $J = \{0, 1, \dots, 5\}$  a maticí přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}. \text{ Najděte kanonický tvar matice } P.$$

**Řešení:**

Přechodový diagram



$$J_1 = \{0\}, J_2 = \{3, 4, 5\}, J_P = \{1, 2\}.$$

Kanonický tvar matice přechodu:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Vidíme tedy, že

$$P_1 = (1)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

**8.21. Definice:** Definice fundamentální matice nerozložitelného homogenního markovského řetězce

Necht'  $\{X_n; n \in N_0\}$  je nerozložitelný homogenní markovský řetězec s maticí přechodu  $\mathbf{P}$ . Limitní matici přechodu označme

**A. Fundamentální matici  $\mathbf{Z}$**  tohoto řetězce definujeme vztahem:  $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}$ .

**8.22. Věta:** Věta o výpočtu středních hodnot dob prvních vstupů

Označme  $m_{ij}$  střední hodnotu doby 1. vstupu řetězce do stavu  $j$  za předpokladu, že vychází ze stavu  $i$ . Sestavíme matici

$\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j \in J}$ . Pak  $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\hat{\mathbf{Z}})\hat{\mathbf{M}}$ , kde  $\mathbf{E}$  je matice ze samých jedniček, matice  $\hat{\mathbf{Z}}$  obsahuje jen diagonální prvky matice

$\mathbf{Z}$  a matice  $\hat{\mathbf{M}}$  obsahuje jen diagonální prvky matice  $\mathbf{M}$ .

**8.23. Poznámka:** Matici středních hodnot dob prvních vstupů lze v MATLABu získat pomocí funkce `prvni_vstupy`:

```
function [A,Z,M]=prvni_vstupy(P)
```

```
% funkce pro vypocet strednich hodnot dob prvnich vstupu do jednotlivych stavu nerozlozitelneho HMR
```

```
% syntaxe:
```

```
% M=prvni_vstupy(P)
```

```
% vstupni parametr: P ... matice prechodu
```

```
% vystupni parametry: M ... matice strednich hodnot dob prvnich vstupu, A ... limitni matice, Z ... fundamentalni matice
```

```
n = size(P,1);
```

```
% urceni radu matice P
```

```
a=sv(P);
```

```
% vypocet stacionarniho vektoru matice P
```

```
A=[];
```

```
for i=1:n
```

```
    A=[A;a];
```

```
end
```

```
% vytvoreni limitni matice A
```

```
I=eye(n);
```

```
% vytvoreni jednotkove matice radu n
```

```
E=ones(n);
```

```
% vytvoreni matice radu n ze samych jednicek
```

```
Z=(I-(P-A))(-1);
```

```
% vypocet fundamentalni matice
```

```
Zhat=diag(diag(Z));
```

```
%vyvorení diagonální matice z diagonálních prvků matice Z
```

```
Mhat=diag(1./a);
```

```
% vytvoreni diagonální matice ze středních hodnot dob prvních návratů
```

```
M=(I-Z+E*Zhat)*Mhat;
```

```
% vypocet matice středních hodnot dob prvních vstupů
```

**8.24. Příklad:** Při dlouhodobém sledování velkého souboru voličů s časovým krokem 1 měsíc byly zkoumány volební preference. Rozlišujeme strany A, B, C a Ostatní. Zavedeme homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in N_0\}$  s množinou stavů  $J = \{1, 2, 3, 4\}$ , kde  $X_n = 1$ , když náhodně vybraný volič preferuje v  $n$ -tém měsíci stranu A,  $X_n = 2$  pro stranu B,  $X_n = 3$  pro stranu C a  $X_n = 4$  pro ostatní strany. Pravděpodobnosti přechodu sympatií voličů jsou uvedeny v matici přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,05 & 0,11 & 0,14 \\ 0,01 & 0,82 & 0,05 & 0,12 \\ 0,05 & 0,05 & 0,8 & 0,1 \\ 0,05 & 0 & 0,03 & 0,92 \end{pmatrix}. \text{ Najděte limitní matici přechodu a vypočtěte matici středních hodnot dob prvních přechodů.}$$

**Řešení:** Limitní matici přechodu získáme složením čtyř stacionárních vektorů. Stacionární vektor existuje, neboť již matice  $\mathbf{P}^2$  má všechny prvky kladné.

Řešením systému  $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$  s podmínkou  $\sum_{j=1}^4 a_j = 1$  získáme stacionární vektor:  $\mathbf{a} = (0,1328; 0,0881; 0,1843; 0,5949)$ .

Znamená to, že během dlouhé doby může strana A očekávat 13,3% voličů, strana B 8,8%, strana C 18,4% a ostatní strany dohromady 59,5%.

Limitní matice přechodu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,1328 & 0,0881 & 0,1843 & 0,5949 \\ 0,1328 & 0,0881 & 0,1843 & 0,5949 \\ 0,1328 & 0,0881 & 0,1843 & 0,5949 \\ 0,1328 & 0,0881 & 0,1843 & 0,5949 \end{pmatrix}$$

Interpretace 1. řádku matice  $\mathbf{A}$ : Pokud volič v jednom měsíci preferoval stranu A, pak v následujícím měsíci ji bude s pravděpodobností 13,3% preferovat opět. Ke straně B se přikloní s pravděpodobností 8,8%, ke straně C s pravděpodobností 18,4% a s pravděpodobností 59,5% zvolí některou z ostatních stran.



K výpočtu matice středních hodnot dob prvních přechodů potřebujeme fundamentální matici  $\mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1} = \begin{pmatrix} 2,5863 & 0,2999 & 0,2549 & -2,1411 \\ -0,7741 & 4,7037 & -0,531 & -2,3986 \\ -0,2863 & 0,4354 & 3,6153 & -2,7644 \\ -0,1508 & -0,7502 & -0,7885 & 2,6895 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Matice } \hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 2,5863 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,7037 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,6153 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,6895 \end{pmatrix}, \text{ matice } \hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0,1328} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0,0881} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0,1843} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0,5949} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Matice } \mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\hat{\mathbf{Z}})\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 7,5306 & 50 & 18,2353 & 8,1207 \\ 25,3061 & 11,3538 & 22,5 & 8,5535 \\ 21,6327 & 48,4615 & 5,4265 & 9,1686 \\ 20,6122 & 61,9231 & 23,8971 & 1,6811 \end{pmatrix}.$$

Interpretace 1. řádku matice  $\mathbf{M}$ : Volič, který na začátku sledování preferoval stranu A, v průměru za 7,5 měsíce dá poprvé znovu hlas této straně. V průměru za 50 měsíců bude poprvé preferovat stranu B a v průměru za 18,2 měsíce bude poprvé preferovat stranu C. V průměru za 8,1 měsíce se poprvé přikloní k některé z ostatních stran.