

### Příklad na výpočet matice dob prvních vstupů

Stroj může být buď v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2). Sledujeme ho s časovým krokem o délce jedné směny. Pravděpodobnost, že se stroj během směny porouchá, je 0,2 a pravděpodobnost, že porouchaný stroj bude během směny opraven, je 0,7. Předpokládáme, že na počátku sledování je stroj v provozu.

a) Modelujte situaci pomocí HMŘ.

b) Vypočtěte matici dob prvních vstupů do stavů 1 a 2 a interpretujte její prvky.

Řešení:

Ad a) Zavedeme HMŘ  $\{X_n; n \in N_0\}$  s množinou stavů  $J = \{1,2\}$ , kde  $X_n = 1$ , když v  $n$ -té směně je stroj v provozu a  $X_n = 2$ , když v  $n$ -té směně je stroj v opravě.

Matice přechodu:  $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$ , vektor počátečních pravděpodobností:  $p(0) = (1 \ 0)$ .

Ad b) Řetězec je nerozložitelný, jeho fundamentální matice je dána vzorcem

$Z = (I - (P - A))^{-1}$ , kde  $A$  je limitní matice přechodu. Matice středních hodnot dob prvních vstupů do stavů 1, 2 je definována vztahem  $M = (I - Z + E\hat{Z})\hat{M}$ , kde  $E$  je matice ze samých jedniček, matice  $\hat{Z}$  obsahuje jen diagonální prvky matice  $Z$  a matice  $\hat{M}$  obsahuje jen diagonální prvky matice  $M$ .

Nejdříve tedy vypočteme stacionární vektor  $a$  matice  $P$  a sestavíme limitní matici  $A$ :

$$(a_1, a_2) = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}, a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}, \text{ limitní matice } A = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Vypočteme fundamentální matici  $Z = (I - (P - A))^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0247 & -0,0247 \\ -0,0864 & 1,0864 \end{pmatrix}$ . Diagonální

matice  $\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1,0247 & 0 \\ 0 & 1,0864 \end{pmatrix}$ , diagonální matice  $\hat{M} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ . Pak matice

$$M = (I - Z + E\hat{Z})\hat{M} = \begin{pmatrix} 1,2857 & 5 \\ 1,4286 & 4,5 \end{pmatrix}.$$

Interpretace prvků matice  $M$ :

Je-li stroj na začátku sledování v provozu, tak v průměru po 1,29 směny zůstane v provozu a v průměru po 5 směnách se porouchá.

Je-li stroj na začátku sledování v opravě, tak v průměru po 1,43 směny se vrátí do provozu a v průměru po 4,5 směny zůstane v opravě.