Cvičení 1 – Úlohy na stochastické procesy

Příklad 1.: Na přímce jsou vyznačeny body –1, 0, 1. V bodě 0 se nachází kulička. Náhodně házíme mincí. Jestliže padne líc, posuneme kuličku do bodu 1, jestliže padne rub, posuneme ji do bodu –1. Je-li kulička v bodě 1 a padne-li líc, ponecháme ji v bodě 1, padne-li rub, posuneme ji do bodu 0. Je-li kulička v bodě –1 a padne-li rub, ponecháme ji v bodě –1, padne-li líc, posuneme ji do bodu 0.
Modelujte tuto situaci vhodným SP.
Pro posloupnost 10 hodů mincí {L, L, L, R, R, L, R, L, R, R} graficky znázorněte odpovídající realizace SP.
Výsledek: Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $T = \{1,2,3,\dots\}$ (t je pořadové číslo hodu mincí), $J = \{-1,0,1\}$.

Příklad 2.: Nechť náhodná veličina X ~ Ex(λ), tj.
hustota: $\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ pro } x > 0 \\ 0 \text{ pro } x \le 0 \end{cases}$, distribuční funkce: $\Phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \text{ pro } x > 0 \\ 0 \text{ pro } x \le 0 \end{cases}$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX$, $t > 0$.
a) Najděte jednorozměrnou distribuční funkci $\Phi_t(x)$ tohoto SP.
b) K distribuční funkci $\Phi_t(x)$ najděte hustotu $\varphi_t(x)$.
Výsledek:
ad a) $\Phi_t(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{\lambda x}{t}} \text{ pro } x > 0 \\ 0 \text{ pro } x \le 0 \end{cases}$, ad b) $\varphi_t(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{t} e^{-\frac{\lambda x}{t}} \text{ pro } x > 0 \\ 0 \text{ pro } x \le 0 \end{cases}$.
Znamená to, že X ~ $Ex\left(\frac{\lambda}{t}\right)$.

Příklad 3.: Náhodná veličina X má distribuční funkci Φ(x). Nechť c, t∈ R, t > 0. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX + c$.
a) Najděte jednorozměrnou distribuční funkci $\Phi_t(x)$ tohoto SP.
b) Najděte dvourozměrnou distribuční funkci $\Phi_{t_1 t_2}(x_1, x_2)$.
Výsledek:
ad a) $\Phi_t(x) = \Phi\left(\frac{x - c}{t}\right)$
ad b) $\Phi_{t_1 t_2}(x_1, x_2) = \Phi\left(\min\left\{\frac{x_1 - c}{t_1}, \frac{x_2 - c}{t_2}\right\}\right)$

Příklad 4.: Náhodná veličina X má distribuční funkci Φ(x). Nechť t > 0. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX^2$. Určete jednorozměrnou distribuční funkci $\Phi_t(x)$ tohoto SP.
Výsledek:
$$\Phi_t(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{x}{t}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{x}{t}}\right) + P\left(X = -\sqrt{\frac{x}{t}}\right), \text{kde } P\left(X = -\sqrt{\frac{x}{t}}\right) = 0, \text{ je - li X spojitá.}$$

Příklad 5.: Nechť X_1, X_2, X_3, … jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejnou distribuční funkci $\Phi(x)$. Nechť $T = \{1,2,3,\ldots\}$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$. Určete pravděpodobnostní rozložení tohoto SP.

Výsledek:

$$\Phi_{t_1 \ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(x_1) \cdot \ldots \cdot \Phi(x_n)$$

Příklad 6.: Nechť náhodná veličina $X \sim Ex(\lambda)$, tj. $E(X) = 1/\lambda$, $D(X) = 1/\lambda^2$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX$. Najděte střední hodnotu, rozptyl, autokovarianční a autokorelační funkci tohoto SP.

Výsledek:

$$\mu(t) = \frac{t}{\lambda}, \sigma^2(t) = \frac{t^2}{\lambda^2}, \gamma(t_1, t_2) = \frac{t_1 t_2}{\lambda^2}, \rho(t_1, t_2) = 1$$

Příklad 7.: Nechť Y, Z jsou standardizované náhodné veličiny, které jsou nekorelované. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = t + Y.\cos \omega t + Z.\sin \omega t$, $\omega > 0$ konstanta. Zjistěte, zda daný SP je slabě stacionární.

Výsledek:

Protože střední hodnota SP $\mu(t) = t$ závisí na čase, není daný SP slabě stacionární.

Příklad 8.: Uvažme SP z příkladu 7. Zavedeme standardizovaný SP $\{U_t; t \in T\}$, kde $U_t = \dfrac{X_t - \mu(t)}{\sigma(t)}$. Zjistěte, zda tento standardizovaný SP je slabě stacionární.

Výsledek:

$\mu(t) = t$ (viz př. 7), $\sigma^2(t) = 1$, $\mu_U(t) = 0$, $\sigma^2{}_U(t) = 1$, $\gamma_U(t_1, t_2) = \cos \omega(t_2 - t_1)$

Standardizovaný SP $\{U_t; t \in T\}$ je slabě stacionární.