Cvičení 10 – Užití Laplaceovy transformace při analýze HMŘ se spojitým časem

Příklad 1.: Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem, množinou stavů $J = \{1,2,3\}$, maticí intenzit přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ a vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (0,1,0)$. Pomocí Laplaceovy transformace najděte vyjádření pro vektor absolutních pravděpodobností.

Výsledek: $\mathbf{p}(t) = \frac{1}{5}\left(1 - e^{-5t}, 2 + 3e^{-5t}, 2 - 2e^{-5t}\right)$

Příklad 2.: V příkladu 1 cvičení 9 (příklad s částicí, která se pohybuje po třech drahách) jsme odvodili, že matice intenzit přechodu je $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Předpokládáme, že na počátku sledování je částice na 2. dráze. Pomocí Laplaceovy transformace najděte vyjádření pro vektor absolutních pravděpodobností.

Výsledek: $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + e^{-6t}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Příklad 3.: V příkladu 14.8. přednášky 9 (příklad s přístrojem, jehož doba bezporuchového provozu i doba opravy se řídí exponenciálním rozložením) jsme odvodili, že matice intenzit přechodu je $Q = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$. Pomocí Laplaceovy transformace najděte vyjádření pro matici přechodu.

Výsledek: $P(t) = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix} + e^{-(\alpha+\beta)t}\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{-\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{-\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$