Cvičení 11 – Poissonův proces

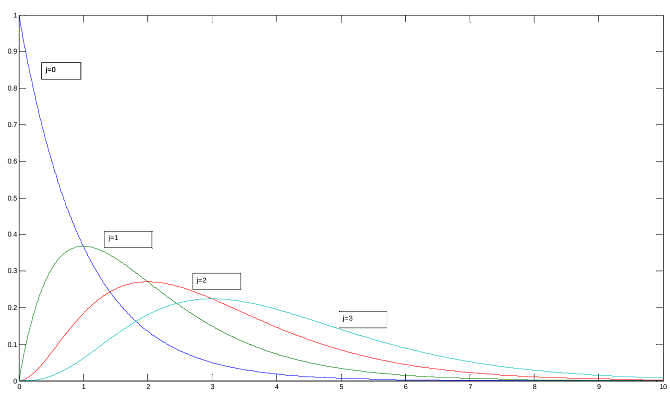
Příklad 1.: Proud zákazníků směřujících do banky tvoří Poissonův proces s parametrem λ. Je známo, že během jedné hodiny přijdou do banky v průměru 2 zákazníci. Jaká je pravděpodobnost, že
a) přijdou právě 2 zákazníci během prvních 20 minut, kdy má banka otevřeno,
b) přijde aspoň jeden zákazník během prvních 20 minut?
Výsledek: ad a) 0,1141, ad b) 0,4866

Příklad 2.: Předpokládáme, že poruchy určité součástky tvoří Poissonův proces. V průměru připadá jedna porucha na 200 hodin provozu, tj. na 25 osmihodinových směn. Na skladě jsou dvě náhradní součástky. Po době odpovídající 60 směnám budou dodány další. Jaká je pravděpodobnost, že stroj nebude pro nedostatek náhradních součástek vyřazen z provozu do dodávky dalších náhradních součástek?
Výsledek: 0,5697

Příklad 3.: Předpokládáme, že na telefonní ústřednu přicházejí v určité denní době hovory s neměnnou intenzitou 3 hovory za 1 minutu.
a) Jaká je pravděpodobnost, že za 1 minutu dojde na ústřednu méně než 5 hovorů?
b) Určete střední hodnotu délky intervalu mezi dvěma po sobě následujícími příchody hovorů.
c) Jaká je pravděpodobnost, že délka intervalu mezi dvěma po sobě následujícími příchody hovorů je delší než 1 minuta?
Výsledek: ad a) 0,153, ad b) 20 s, ad c) 0,0498

Příklad 4.: Nechť proud částic kosmického záření, který vstupuje do Geiger – Millerova čítače, tvoří Poissonův proces s parametrem λ. Jaká je střední hodnota počtu částic, které čítač zaznamená v intervalu $\langle t, t+h \rangle$?
Výsledek: λh

Příklad 5.: Uvažme Poissonův proces s intenzitou λ, který popisuje náhodné a navzájem nezávislé příchody zákazníků do fronty. Již bylo odvozeno, že počet zákazníků ve frontě v okamžiku t se řídí rozložením $Po(\lambda t)$.
Předpokládejme, že $\lambda = 1$. Pro časový interval $\langle 0,10 \rangle$ nakreslete do jednoho obrázku průběh pravděpodobností, že v okamžiku t bude ve frontě právě j zákazníků, j = 0, 1, 2, 3.
Výsledek:



Simulace Poissonova procesu

Zadání:
V sobotu v době od 8 do 20 h sledujeme provoz v klidné ulici ve vilové čtvrti města. V tomto období vjíždějí auta do této ulice v průměru každých 8 minut. Předpokládejme, že intervaly mezi příjezdy aut se řídí exponenciálním rozložením. Pomocí MATLABu simulujte vjezd 20 aut do této ulice.
a) Zjistěte celkovou dobu simulace.
b) Vypočtěte průměrnou, maximální a minimální délku intervalu mezi vjezdy dvou aut.
c) Vypočtěte směrodatnou odchylku délek intervalů.
d) Porovnejte tvar histogramu délek intervalů (volte 5 třídicích intervalů) s tvarem hustoty exponenciálního rozložení s patřičným parametrem.
e) Znázorněte nasimulovaný Poissonův proces graficky.

Návod:
Zavedeme Poissonův proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = j$, když v intervalu $\langle 0, t\rangle$ vjede do ulice právě j aut, j = 0, 1, 2, … Parametr $\lambda = \frac{1}{8}$.
Pomocí funkce exprnd vygenerujeme 20 náhodných čísel z exponenciálního rozložení s parametrem 1/8:
x=exprnd(8,20,1);

Upozornění: Pokud bychom neměli k dispozici statistický toolbox MATLABu, postupujeme takto:
r = unifrnd(0,1,20,1);
Proměnnou r transformujeme vztahem $x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-r)$:
x = -8*log(1-r);

V proměnné x jsou nyní uloženy délky intervalů mezi vjezdy aut.

Celková doba simulace:
doba = sum(x)
Průměrná délka intervalu:
prumer = mean(x)
Maximální délka intervalu:
maximum = max(x)
Minimální délka intervalu:
minimum = min(x)
Směrodatná odchylka délek intervalů:
so = std(x)
(Teoretická celková doba simulace by měla být 20.8 = 160 min, průměr = 8 min, směrodatná odchylka = 8 min.)
Histogram délek intervalů s pěti třídicími intervaly znázorníme příkazem hist(x,5).

Znázornění hustoty exponenciálního rozložení s parametrem 1/8:
plot([0:0.01:maximum],exppdf([0:0.01:maximum],8))

Znázornění nasimulovaného Poissonova procesu:
Do proměnné počet uložíme celkový počet aut:
pocet = [1:20]’;
Do proměnné t uložíme kumulované délky intervalů:
t = cumsum(x);
Pomocí funkce stairs znázorníme Poissonův proces:
stairs(t,pocet)

Celý postup můžeme zopakovat s větším počtem aut a sledovat, jak se zvyšujícím se počtem simulací se empirické charakteristiky procesu blíží teoretickým.