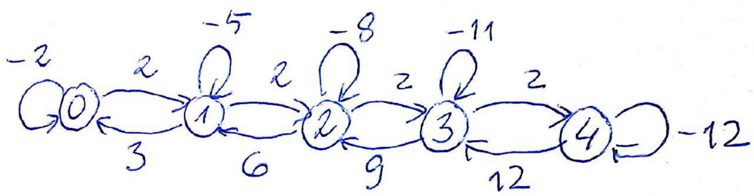
Cvičení 12 – Speciální případy procesu vzniku a zániku

Příklad 1.: Erlangův proces má množinu stavů J = {0, 1, 2, 3, 4} a parametry $\lambda = 2$, $\mu = 3$.
a) Napište matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Najděte stacionární rozložení a interpretujte ho.
Výsledek:

Ad a) $$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix}$$

Přechodový diagram:



Ad b) Po odeznění vlivu počátečních podmínek bude proces asi 51,37 % celkové doby ve stavu 0, 34,25 % doby ve stavu 1, 11,42 % doby ve stavu 2, 2,54 % doby ve stavu 3 a 0,42 % doby ve stavu 4.

Návod na řešení v MATLABu:
Zavoláme funkci Erlang.m, která počítá stacionární rozložení Erlangova procesu:
a=Erlang(4,2,3)

Příklad 2.: Benzínová stanice má dvě čerpadla. U každého čerpadla může čerpat benzín jen jedno auto. Když jsou obě čerpadla obsazena, další přijíždějící auta nečekají a odjíždějí. Průměrná doba čerpání benzínu je 2 min a průměrně přijíždí 40 aut za 1 h.
a) Kolik procent doby bude benzínová stanice nevyužitá?
b) S jakou pravděpodobností nebude přijíždějící auto obslouženo?
c) Jaká je střední hodnota počtu obsazených čerpadel?
Návod: Počet obsazených čerpadel modelujte Erlangovým procesem.
Výsledek:
Ad a) Benzínová stanice je nevyužitá asi po 31 % celkové doby.
Ad b) Přijíždějící auta nebudou obsloužena s pravděpodobností asi 0,28.
Ad c) Střední hodnota počtu obsazených čerpadel je 0,97.

Návod na řešení v MATLABu:
a=Erlang(2,2/3,1/2)
V bodě (a) nás zajímá 1. složka vektoru a, v bodě (b) 3. složka. Střední hodnotu v bodě (c) vypočteme jako [0 1 2]*a’

Příklad 3.: Při sledování provozu telefonní ústředny bylo zjištěno, že za 1 min se vyskytne průměrně 5 požadavků na spojení a jeden hovor trvá průměrně 2 min. Kolik linek by minimálně měla mít tato TÚ, aby pravděpodobnost, že volající zastihne všechny linky obsazené, byla nanejvýš 0,5?
Návod: Počet obsazených linek modelujte Erlangovým procesem.
Výsledek: Minimální počet linek je 6.

Návod na řešení v MATLABu:
Použijeme funkci Erlang(m, lambda, mi), kde lambda 5 a mi 0,5. Za m postupně dosazujeme 1,2,3,4,5,6 a sledujeme poslední složku vektoru a.

Příklad 4.: Nechť je dán lineární proces vzniku a zániku, v němž intenzita vzniku odpovídá roční míře porodnosti v ČSSR v r. 1983 (λ = 0,0148) a intenzita zániku odpovídá roční míře úmrtnosti v ČSSR v r. 1983 (μ = 0,0121). Předpokládáme, že v čase t = 0 má soubor rozsah k_0 = 100.
a) Pro t = 0, 1, 2, …, 100 vypočtěte a graficky znázorněte střední hodnotu a směrodatnou odchylku rozsahu souboru.
b) Pro t = 0, 1, 2, …, 100 vypočtěte a graficky znázorněte pravděpodobnost vyhynutí.
Návod na řešení v MATLABu: Využijeme funkci lpvz.m, která ilustruje vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku.

```
function [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
% lambda je intenzita vzniku, mi intenzita zaniku
% tau je konecny cas, k0 rozsah souboru v case t=0
% M je vektor strednich hodnot rozsahu souboru v case t=0 az tau
% S je vektor smerodatnych odchylek rozsahu souboru v case t=0 az tau
% P je pravdepodobnost zaniku souboru v case t=0 az tau
```

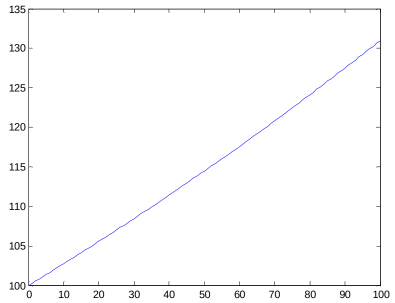
Zadáme vstupní parametry:

```
lambda=0.0148;mi=0.0121;tau=100;k0=100;
```

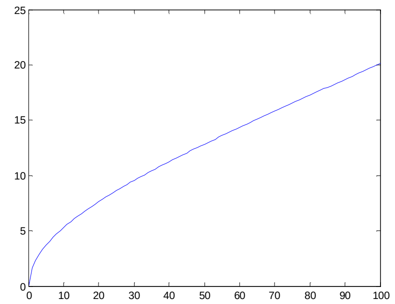
Zavoláme funkci lpvz.m:

```
[M,S,P]=lpvz(lambda,mi,tau,k0)
```

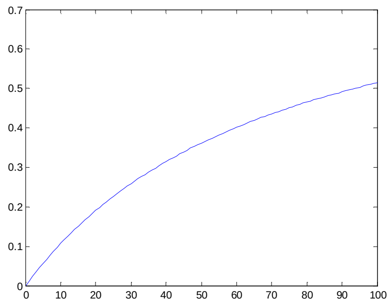
Graf závislosti střední hodnoty rozsahu souboru na čase:



Graf závislosti směrodatné odchylky rozsahu souboru na čase:



Graf závislosti pravděpodobnosti vyhynutí na čase


0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100