Cvičení 3 – Stacionární a limitní rozložení HMŘ

Příklad 1.: Půjčovna aut, která vlastní 1000 automobilů, působí ve třech pobočkách A, B, C. Zákazník si může vybrat auto v některé z poboček a vrátit ho v kterékoliv jiné pobočce. Dlouhodobým sledováním v týdenním intervalu byly zjištěny tyto skutečnosti:
Pravděpodobnost vrácení auta do stejné pobočky, z níž bylo vypůjčeno, je pro pobočky A, B, C postupně 0,6; 0,6; 0,5. Pravděpodobnost, že auto vypůjčené v A bude vráceno v B, je 0,3 a naopak, pravděpodobnost, že auto vypůjčené v B bude vráceno v A, je 0,2. Pravděpodobnost, že auto vypůjčené v B bude vráceno v C, je 0,2 a naopak, pravděpodobnost, že auto vypůjčené v C bude vráceno v B, je 0,4. Zjednodušeně předpokládáme, že žádné auto není ukradeno ani nehavaruje.
a) Modelujte provoz půjčovny aut pomocí HMŘ, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Předpokládejme, že na počátku sledování je 500 aut v pobočce A, 300 v B a 200 v C. Určete, kolik aut bude v jednotlivých pobočkách po uplynutí 1 týdne.
c) Zjistěte, kolik aut bude v jednotlivých pobočkách po dostatečně dlouhé době sledování, tj. po odeznění vlivu počátečních podmínek.

Výsledek:
Ad b) Po týdnu sledování bude v pobočce A 380 aut, v pobočce B 410 aut a v pobočce C 210 aut.
Ad c) Po dostatečně dlouhé době bude v pobočce A 293 aut, v pobočce B 463 aut a v pobočce C 244 aut.

Návod na řešení v MATLABu:
Ad b) p0=[0.5 0.3 0.2];P=[0.6 0.3 0.1;0.2 0.6 0.2;0.1 0.4 0.5];p1=p0*P;
1000p1=1000*p1

Ad c) a=sv(P);1000a=1000*a

Příklad 2.: Máme dvě urny, v každé z nich jsou tři koule. Z uvažovaných šesti koulí jsou tři bílé a tři černé. V každém kroku pokusu náhodně vybereme jednu kouli z 1. urny a jednu kouli z 2. urny a vzájemně je zaměníme. Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in N_0\}$, kde $X_n = j$, když po n-tém pokusu je v 1. urně právě j bílých koulí, j = 0, 1, 2, 3.
a) Najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Určete stacionární rozložení.

Výsledek:
Ad a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ad b) $a = (0{,}05 \quad 0{,}45 \quad 0{,}45 \quad 0{,}05)$
Znamená to, že po 5 % celkové doby bude 1. urna buď prázdná nebo v ní budou 3 bílé koule a po 45 % doby v ní bude buď jedna nebo dvě bílé koule.
Návod na řešení v MATLABu:
Ad b) P=[0 1 0 0;1/9 4/9 4/9 0;0 4/9 4/9 1/9;0 0 1 0];a=sv(P)

Příklad 3.: Předpokládejme, že v nějaké oblasti může být počasí pouze ve třech stavech, a to déšť, jasno, sníh. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že nikdy nebývají dva jasné dny za sebou. Jestliže je v jistém dni jasno, pak další den bude buď déšť nebo sníh, a to se stejnou pravděpodobností. Jestliže je v jistém dni sníh nebo déšť, pak následující den se počasí buď nezmění, a to s pravděpodobností 0,5 nebo se změní, a pak v polovině případů bude jasno. Popište stav počasí homogenním markovským řetězcem a vypočtěte jeho stacionární rozložení.
Výsledek: **a** = (0,4 0,2 0,4)
Znamená to, že po 40 % dnů prší, po 20 % dnů je jasno a po 40 % dnů sněží.

Návod na řešení v MATLABu:
```
P=[0.5 0.25 0.25;0.5 0 0.5;0.25 0.25 0.5];
a=sv(P)
```

Příklad 4.: Obchodník prodává tři druhy pracích prášků, které označíme A, B, C. Aby zjistil, jak se vyvíjí poptávka po těchto prášcích, provedl v 1. měsíci prodeje průzkum, v němž se zjišťovalo, který druh prášku zákazníci kupují. Při tomto průzkumu bylo zjištěno, že prášek A kupuje 50% zákazníků, prášek B 20% a prášek C 30% zákazníků. Za měsíc byl proveden další průzkum, který zjišťoval, ke kterému druhu prášků zákazníci přešli. Výsledky průzkumu zachycuje matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

a) Určete absolutní pravděpodobnosti po dvou měsících a interpretujte je.
b) Najděte vektor limitních pravděpodobností a limitní matici přechodu.

Výsledek:
Ad a) Po dvou měsících bude prášek A nakupovat 80,6 % zákazníků, prášek B 12,8 % a prášek C 6,6 % zákazníků.

Ad b) $\overline{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 0{,}8281 & 0{,}125 & 0{,}0469 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8281 & 0{,}125 & 0{,}0469 \\ 0{,}8281 & 0{,}125 & 0{,}0469 \\ 0{,}8281 & 0{,}125 & 0{,}0469 \end{pmatrix}$

Návod na řešení v MATLABu:
Ad a) `p0=[0.5 0.2 0.3];P=[0.9 0.1 0;0.4 0.3 0.3;0.7 0.1 0.2];p2=p0*P^2`
Ad b) `a=sv(P);A=[a;a;a]`