

## Cvičení 6 – Absorpční HMR

**Příklad 1.:** (Soustruh v kovoobráběčské firmě)

Jistá malá kovoobráběčská firma vlastní soustruh. Soustruh se může nacházet v následujících stavech, které jsou sledovány s časovým krokem jeden týden: stav 1 – bude v provozu, stav 2 – bude v opravě, stav 3 – dá se k prodeji, stav 4 – dá se do šrotu.

Situace je vyjádřena pomocí homogenního markovského řetězce  $\{X_n; n \in N_0\}$  s množinou stavů  $J = \{1, 2, 3, 4\}$ , přičemž  $X_n = j$ , je-li soustruh v  $n$ -tém týdnu ve stavu  $j$ .

Máme dānu matici pŕechodu:

$$P = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,1 & 0,05 & 0 \\ 0,7 & 0,2 & 0,05 & 0,05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Nakreslete pŕechodovŕy diagram.

b) Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najdĕte kanonickŕy tvar matice pŕechodu.

**Vŕsledek:**

Trvalĕ stavy jsou 3 a 4, oba jsou absorpční, řetĕzec je tedy absorpční. Stavy 1 a 2 jsou neabsorpční.

Kanonickŕy tvar matice pŕechodu:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0 & 0,85 & 0,1 \\ 0,05 & 0,05 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

c) Vypočĕtĕte fundamentální matici a interpretujte její prvky.

**Vŕsledek:**

$$M = (I - Q)^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 14 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

d) Vypočĕtĕte matici pŕechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.

**Vŕsledek:**

$$B = MR = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,85 & 0,15 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

e) Zjistĕte vektor středních hodnot poĕtu kroků pŕed absorpcí.

**Vŕsledek:**

$$t = Me = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 14 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 17 \end{pmatrix}$$

**Návod na řešení v MATLABu:**

Zadáme matici přechodu:

$$P = [0.85 \ 0.1 \ 0.05 \ 0; 0.7 \ 0.2 \ 0.05 \ 0.05; 0 \ 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

Zavoláme funkci absorb.m:

$$[P0, M, B, t, rt] = \text{absorb}(P)$$

**Příklad 2.:** (Pracovníci ve firmě)

Jistá firma provedla dlouhodobý průzkum pohybu pracovníků v jednom odboru společnosti. V průzkumu byly specifikovány 4 stavy, a to stav 1 - propuštění ze zaměstnání, stav 2 - odchod z osobních důvodů, stav 3 - práce ve funkci referenta a stav 4 - práce v řídicí funkci. Jednotkovým časovým obdobím bylo jedno čtvrtletí. Známe matici přechodu:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,03 & 0,07 & 0,8 & 0,1 \\ 0,08 & 0,01 & 0,03 & 0,88 \end{pmatrix}$$

Řešte tytéž úkoly jako v příkladu 1.

**Fundamentální matice:**

$$M = \begin{pmatrix} 5,71 & 4,76 \\ 1,43 & 9,52 \end{pmatrix}$$

**Matice přechodu do absorpčních stavů:**

$$B = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

**Vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí:**

$$t = \begin{pmatrix} 3(10,48) \\ 4(10,95) \end{pmatrix}$$

**Návod na řešení v MATLABu:**

Zadáme matici přechodu:

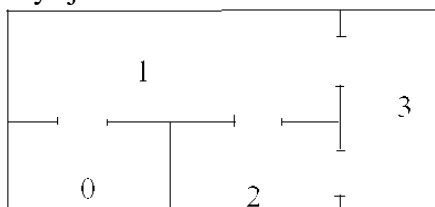
$$P = [1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0 \ 0; 0.03 \ 0.07 \ 0.8 \ 0.1; 0.08 \ 0.01 \ 0.03 \ 0.88];$$

Zavoláme funkci absorb.m:

$$[P0, M, B, t, rt] = \text{absorb}(P)$$

**Příklad 3.:** (Myš v bludišti)

Myš je vložena do bludiště tvaru:



V každém okamžiku si myš vybere náhodně jednu z dveří přihrádky, v níž se právě nachází a přejde do příslušné přihrádky. Předpokládáme, že v přihrádce 3 je potrava a myš tuto přihrádku neopustí, jakmile do ní jednou vstoupí. Pohyb myši v bludišti lze modelovat

pomocí HMŘ  $\{X_n; n \in N_0\}$  s množinou stavů  $J = \{0, 1, 2, 3\}$ , přičemž  $X_n = j$ , když v okamžiku  $n$  je myš v  $j$ -té přihrádce.  
 Řešte tytéž úkoly jako v příkladu 1.

**Matrice přechodu v kanonickém tvaru:**

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**Fundamentální matice:**

$$M = \begin{pmatrix} 1,67 & 2 & 0,67 \\ 0,67 & 2 & 0,67 \\ 0,33 & 1 & 1,33 \end{pmatrix}$$

**Matrice přechodu do absorpčních stavů:**

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí:**

$$t = \begin{pmatrix} 4,33 \\ 3,33 \\ 2,67 \end{pmatrix}$$

**Návod na řešení v MATLABu:**

Zadáme matici přechodu:

$P=[0 \ 1 \ 0 \ 0; 1/3 \ 0 \ 1/3 \ 1/3; 0 \ 1/2 \ 0 \ 1/2; 0 \ 0 \ 0 \ 1];$

Zavoláme funkci absorb.m:

$[P0,M,B,t,rt]=absorb(P)$

**Příklad 4.:** (Opilý námořník na mole)

Sledujeme opilého námořníka pohybujícího se po mole. Pokud je ve středu mola, s pravděpodobností  $1/3$  po dalším kroku zůstane ve středu mola, s pravděpodobností  $1/3$  se přiblíží k pravému okraji mola a s pravděpodobností  $1/3$  se přiblíží k levému okraji mola. Pokud je námořník na pravém okraji mola, s pravděpodobností  $1/3$  zůstane po dalším kroku na pravém okraji mola, s pravděpodobností  $1/3$  se vrátí do středu mola a s pravděpodobností  $1/3$  spadne do moře. Když je námořník na levém okraji mola, po dalším kroku na něm zůstane s pravděpodobností  $1/3$ , do středu mola se vrátí s pravděpodobností  $1/3$  a s pravděpodobností  $1/3$  spadne do moře. Pokud spadne námořník do moře, už se zpět na molo nedostane. Předpokládejme, že molo je nekonečně dlouhé, námořník tedy nemůže dojít na jeho konec. Pohyb opilého námořníka po mole lze modelovat homogenním markovským řetězcem  $\{X_n; n \in N_0\}$  s množinou stavů  $J = \{0, 1, 2, 3\}$ , kde  $X_n = 0$ , pokud je námořník v  $n$ -tém kroku

ve středu mola,  $X_n = 1$ , pokud je námořník v n-tém kroku na levém okraji mola,  $X_n = 2$ , pokud je námořník v n-tém kroku na pravém okraji mola, a  $X_n = 3$ , pokud se námořník v n-tém kroku topí (plave) v moři.

Řešte tytéž úkoly jako v příkladu 1.

ad a) **Maticе přechodu v kanonickém tvaru:** 
$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

ad b) Řetězec má 3 přechodné stavy  $J_P = \{0,1,2\}$ , tedy: střed mola, pravý okraj mola a levý okraj mola a 1 trvalý stav  $J_T = \{3\}$ , moře.

ad c) Řetězec má jediný trvalý stav 3 (moře), který je absorpční, proto je řetězec absorpční.

ad d) **Fundamentální matice:** 
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1,5 & 1,5 \\ 1,5 & 2,25 & 0,75 \\ 1,5 & 0,75 & 2,25 \end{pmatrix}.$$

ad e) **Maticе přechodu do absorpčních stavů:** 
$$B = MR = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ad f) **Vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí:** 
$$t = Me = \begin{pmatrix} 6 \\ 4,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}.$$

#### Návod na řešení v MATLABu:

Zadáme matici přechodu:

$P=[0 \ 1 \ 0 \ 0; 1/3 \ 0 \ 1/3 \ 1/3; 0 \ 1/2 \ 0 \ 1/2; 0 \ 0 \ 0 \ 1];$

Zavoláme funkci `absorb.m`:

`[P0,M,B,t,rt]=absorb(P)`