Cvičení 8 – Řízené HMŘ

Příklad 1.: Je sledována výrobní linka, která se může nacházet buď v provozu (stav 0) nebo v opravě (stav 1). Ve stavu 0 je možný provoz „bez kontroly agregátů“ (strategie 1) nebo „s kontrolou agregátů“ (strategie 2). Ve stavu 1 je možno rozlišit opravu „bez výměny agregátů“ (strategie 1) nebo „s výměnou agregátů“ (strategie 2). Matice přechodu a matice výnosů jsou následující:

$$ {}^1\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}, {}^1\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, {}^2\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}, {}^2\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}. $$

Pro první tři kroky najděte maximální střední hodnotu celkového výnosu a optimální strategii.

Výsledek: V 1., 2. a 3. kroku je vektor optimálních strategií $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vektory v1, v2, v3 jsou:

$$ \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2{,}28 \\ 0{,}08 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2{,}76 \\ 0{,}56 \end{pmatrix} $$

Návod na řešení v MATLABu:

Zadáme matice ${}^1\mathbf{P}$, ${}^1\mathbf{R}$, ${}^2\mathbf{P}$, ${}^2\mathbf{R}$:

P1=[0.5 0.5;0.2 0.8]; R1=[2 0;1 -5]; P2=[0.4 0.6;0.4 0.6]; R2=[3 1;2 -2];

Vypočteme vektory q1=diag(P1*R1’); q2=diag(P2*R2’);

Vypočteme vektor v1=max(q1,q2)

(Protože první složka vektoru v1 odpovídá první složce vektoru q2, znamená to, že když je linka v provozu, je optimální strategie v 1. kroku strategie 2.

Protože druhá složka vektoru v1 odpovídá druhé složce vektoru q2, znamená to, že když je linka v opravě, je optimální strategie v 1. kroku strategie 2.)

Spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 2. kroku pro strategii 1, je-li linka v provozu:

v2_provoz_s1= q1(1)+P1(1,1)*v1(1)+P1(1,2)*v1(2)

a totéž pro strategii 2:

v2_provoz_s2= q2(1)+P2(1,1)*v1(1)+P2(1,2)*v1(2)

Dále spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 2. kroku pro strategii 1, je-li linka v opravě:

v2_oprava_s1= q1(2)+P1(2,1)*v1(1)+P1(2,2)*v1(2)

a totéž pro strategii 2:

v2_oprava_s2= q2(2)+P2(2,1)*v1(1)+P2(2,2)*v1(2)

Vypočítáme vektor v2:

v2=[max(v2_provoz_s1, v2_provoz_s2); max(v2_oprava_s1, v2_oprava_s2)]

(Vidíme, že první složka vektoru v2 odpovídá strategii 2 a druhá složka rovněž.)

Spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 3. kroku pro strategii 1, je-li linka v provozu:

v3_provoz_s1= q1(1)+P1(1,1)*v2(1)+P1(1,2)*v2(2)

a totéž pro strategii 2:

v3_provoz_s2= q2(1)+P2(1,1)*v2(1)+P2(1,2)*v2(2)

Dále spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 3. kroku pro strategii 1, je-li linka v opravě:

v3_oprava_s1= q1(2)+P1(2,1)*v2(1)+P1(2,2)*v2(2)

a totéž pro strategii 2:

v3_oprava_s2= q2(2)+P2(2,1)*v2(1)+P2(2,2)*v2(2)

Vypočítáme vektor v3:

v3=[max(v3_provoz_s1, v3_provoz_s2); max(v3_oprava_s1, v3_oprava_s2)]

(Vidíme, že první složka vektoru v3 odpovídá strategii 2 a druhá složka rovněž.)

Návod na řešení v MATLABu pomocí funkce rekurse.m:
Použijeme funkci rekurse.m (v r. 20212 ji vytvořila Veronika Hajnová), která pomocí rekurentní metody hledá pro h různých strategií optimální strategii pro n prvních kroků a počítá vektory maximálních středních hodnot pro první až n-tý krok.
Zadáme matice $^1\mathbf{P}$, $^1\mathbf{R}$, $^2\mathbf{P}$, $^2\mathbf{R}$ a počet kroků n:
P1=[0.5 0.5;0.2 0.8]; R1=[2 0;1 -5]; P2=[0.4 0.6;0.4 0.6]; R2=[3 1;2 -2];n=3;
Sestavíme matice P a R:
P=[P1;P2];R=[R1;R2];
Zavoláme funkci rekurse.m:
[v,m] = rekurse(P,R,n)

Příklad 2.: Závod produkuje nějaký spotřební výrobek, u něhož lze rozeznat dva stavy: stav 0 – výrobek je úspěšný s dobrým odbytem a cenou, stav 1 – výrobek je neúspěšný, odbyt vázne a cena je nízká. Při 1. strategii vedení závodu neinvestuje ani do technického rozvoje ani do reklamy. Při této strategii je matice přechodu $^1\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ a matice výnosů $^1\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$. Při 2. strategii vedení závodu zajistí technický rozvoj a investuje do reklamy. Matice přechodu: $^2\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, matice výnosů: $^2\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -19 \end{pmatrix}$. Pomocí iterační metody je třeba zjistit, jakou strategii doporučit vedení závodu, aby střední hodnota celkového výnosu byla maximální.

Výsledek: Vektor optimálních strategií je $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, tedy větší zisk přinese ta strategie, která zahrnuje náklady na technický rozvoj a reklamu výrobku.

Návod na řešení v MATLABu pomocí funkce howardn.m:
Použijeme funkci howardn.m (v r. 2012 ji vytvořil Jakub Buček).
Zadáme matice: P1=[0.5 0.5;0.4 0.6];P2=[0.8 0.2;0.7 0.3];R1=[9 3;3 -7];R2=[4 4;1 -19];
Zavoláme funkci howardn.m:
D=howardn([P1 P2],[R1 R2])
Dostaneme výstupní matici D, která obsahuje vektory optimálních strategií pro jednotlivé kroky.

```
D =

     1     1
     2     2
     2     2
```

Příklad 3.: U souboru dopravních letadel určitého typu byly získány informace, na jejichž základě bylo možno specifikovat z celé řady různých situací, v nichž se letadla nacházejí, následující 4 stavy: stav 1 – let, stav 2 – oprava, stav 3 – revize, stav 4 – čekání.
Potřebné údaje pro odhad matice přechodu byly získány z dispečerských záznamů, které se vedou pro jednotlivá letadla. Dále bylo možné u stavů oprava, revize a čekání rozlišit různé alternativy.
Ve stavu oprava byly uvažovány alternativy „oprava bez dílčích agregátů“ a „oprava s výměnou agregátů“.
Rozhodujícím kritériem pro rozlišení alternativ ve stavu revize byla délka trvání revizí. Byly užity alternativy „krátkodobá revize“ a „dlouhodobá revize“.

V případě stavu čekání byly zvoleny alternativy „čekání bez zvláštní péče“ a „čekání v pohotovosti“.
Pravděpodobnosti přechodu u jednotlivých stavů i alternativ a údaje o ocenění přechodů, které byly získání z expertních odhadů, jsou uvedeny v tabulce:

Stav	alternativa	Pravděpodobnosti přechodu				Ocenění			
1	1	0,4	0	0,1	0,5	10	0	1	2
2	1	0,1	0,8	0	0,1	7	-3	0	-2
	2	0,15	0,7	0	0,15	8	-4	0	-3
3	1	0,15	0	0,8	0,05	6	0	-3	-2
	2	0,05	0	0,9	0,05	9	0	-2	-2
4	1	0,15	0	0,05	0,8	5	0	-2	-1
	2	0,3	0	0	0,7	4	0	0	-2

Pomocí funkce howardn.m najděte vektor optimálních strategií.

Zadáme matice:
P1=[0.4 0 0.1 0.5;0.1 0.8 0 0.1;0.15 0 0.8 0.05;0.15 0 0.05 0.8];
P2=[0.4 0 0.1 0.5;0.15 0.7 0 0.15;0.05 0 0.9 0.05;0.3 0 0 0.7];
R1=[10 0 1 2;7 -3 0 -2;6 0 -3 -2;5 0 -2 -1];
R2=[0 0 0 0;8 -4 0 -3;9 0 -2 -2;4 0 0 -2];
Zavoláme funkci howardn.m:
D=howardn([P1 P2],[R1 R2])
Dostaneme výstupní matici D, která obsahuje vektory optimálních strategií pro jednotlivé kroky.
D =

```
     1     1     2     1
     1     2     1     2
     1     2     1     2
```

Výsledek: vektor optimálních strategií je $(1\ 2\ 1\ 2)^T$.