Cvičení 9 – Markovské řetězce se spojitým časem- základní pojmy

Příklad 1.: Částice se pohybuje po třech drahách 1, 2, 3, které jsou umístěny mezi odrážejícími stěnami. Na počátku sledování je částice na 2. dráze. Částice může změnit svoji dráhu v libovolném okamžiku. Je známo, že během krátkého časového intervalu o délce h (přitom $0 < h < 0{,}5$) částice může buď zůstat na dráze, na níž se právě nachází nebo může přeskočit na sousední dráhu s pravděpodobností 2h. Pravděpodobnosti přeskoků na další dráhy jsou zanedbatelně malé.
a) Popište polohu částice na jednotlivých drahách pomocí HMŘ se spojitým časem.
b) Najděte matici intenzit přechodu a nakreslete přechodový diagram.
c) Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce a interpretujte ho.
Výsledek: ad c) **a** = (1/3 1/3 1/3)
Návod na výpočet v MATLABu:
Zadáme matici intenzit přechodu:
Q=[-2 2 0;2 -4 2;0 2 -2]
Zavoláme funkci stacionarni_vektor.m:
a=stacionarni_vektor(Q)

Příklad 2.: Uvažme provoz malé půjčovny aut, která má 4 auta. Doba mezi dvěma požadavky na zapůjčení auta je náhodná veličina, která má exponenciální rozložení se střední hodnotou polovina dne a doba výpůjčky je náhodná veličina s exponenciálním rozložením se střední hodnotou třetina dne.
a) Popište počet vypůjčených aut pomocí HMŘ se spojitým časem.
b) Najděte matici intenzit přechodu a nakreslete přechodový diagram.
c) Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce a interpretujte ho.
Nápověda: Pravděpodobnost, že počet zapůjčených aut se během intervalu $\langle t, t+h \rangle$ zvětší o 1, je stále λh ($\lambda = 2$) a pravděpodobnost, že počet zapůjčených aut se v intervalu $\langle t, t+h \rangle$ zmenší o 1, je úměrná počtu zapůjčených aut s koeficientem úměrnosti μ ($\mu = 3$).
Výsledek: **a** = (0,5137 0,3425 0,1142 0,0254 0,0042)
Návod na výpočet v MATLABu:
Zadáme matici intenzit přechodu:
Q=[-2 2 0 0 0;3 -5 2 0 0;0 6 -8 2 0;0 0 9 -11 2;0 0 0 12 -12]
Zavoláme funkci stacionarni_vektor.m:
a=stacionarni_vektor(Q)

Příklad 3.: Máme černou a bílou urnu a pět koulí. Na počátku pokusu jsou všechny koule v bílé urně. V okamžiku t náhodně vybereme jednu kouli (výběr každé koule je stejně pravděpodobný) a přemístíme ji do druhé urny. Délky časových intervalů mezi jednotlivými změnami počtu koulí v urnách jsou náhodné, nezávislé a nejsou ovlivněny změnami počtu koulí v urnách. Pravděpodobnost změn v průběhu časového intervalu dané délky nezávisí na poloze tohoto intervalu na časové ose.
Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_t; t \in T\}$ se spojitým časem, kde náhodná veličina X_t udává počet koulí v černé urně v okamžiku t. Předpokládáme, že intenzity přechodu mezi bezprostředně dostupnými stavy tohoto řetězce jsou stejné (jsou rovny konstantě $\lambda > 0$) a nezávisí na počtu koulí v urnách.
a) Sestavte matici intenzit přechodu **Q** a nakreslete přechodový diagram.
b) Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce a interpretujte ho.

Výsledek: ad b) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Příklad 4.: Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem a množinou stavů $J = \{0,1,\ldots,n,\ldots,m\}$, kde pro čísla m a n platí $1 \le n \le m$. Intenzity přechodu jsou dány vztahy:

$$q_{j,j-1} = \begin{cases} j\mu \text{ pro } 0 < j < n \\ n\mu \text{ pro } n \le j \le m \end{cases}, \quad q_{j,j+1} = (m-j)\lambda \text{ pro } 0 \le j \le m.$$

Vypočtěte stacionární rozložení tohoto řetězce pro n = 2, m = 5, $\lambda = 4$, $\mu = 12$.

Výsledek: a = (0,2198   0,3664   0,2442   0,1221   0,0407   0,0068)

Návod na výpočet v MATLABu:

Zadáme matici intenzit přechodu:

Q=[-20 20 0 0 0 0;12 -28 16 0 0 0;0 24 -36 12 0 0;0 0 24 -32 8 0;0 0 0 24 -28 4;0 0 0 0 24 -24]

Zavoláme funkci stacionarni_vektor.m:

a=stacionarni_vektor(Q)