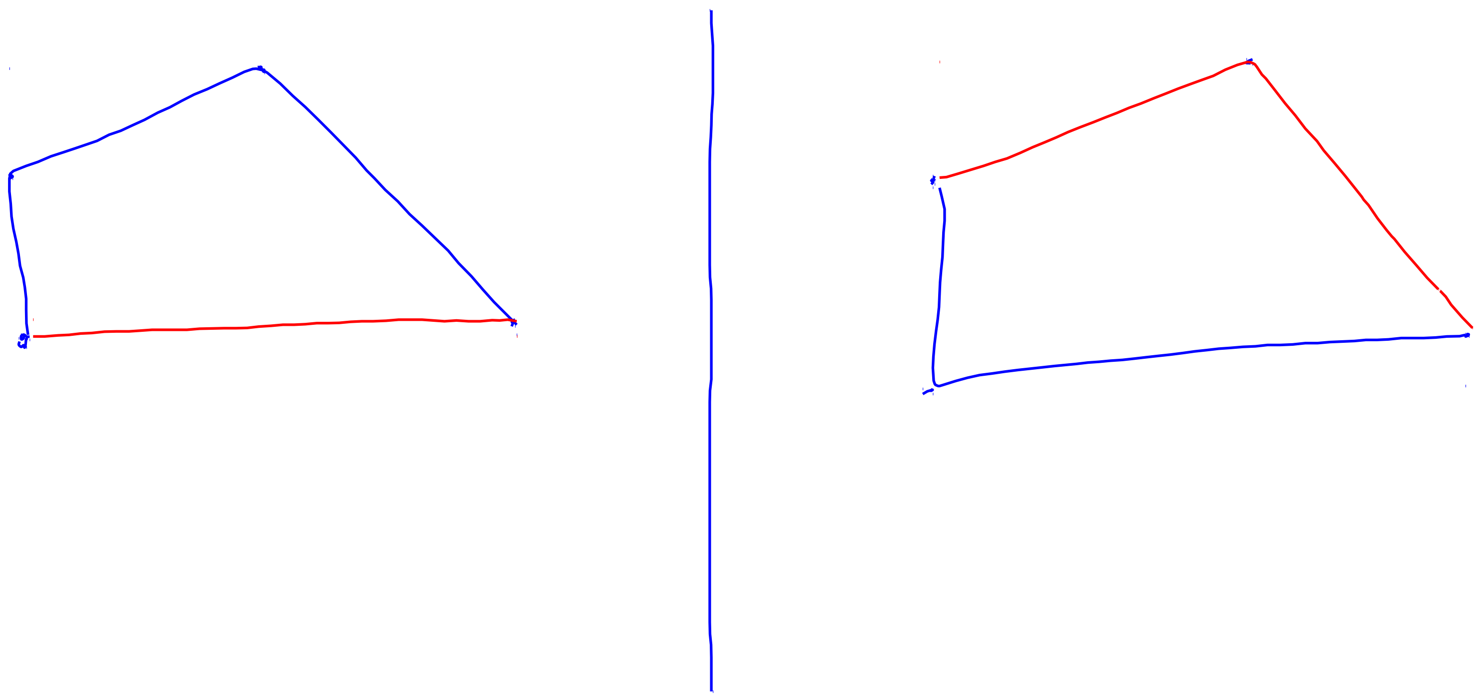
1

K minulé přednášce



Hledání průsečíků úseček

Máme množinu $S = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$ v rovině
a chceme najít všechny jejich průsečíky.

Naivní přístup - vezmeme $\binom{n}{2}$ dvojic s_i, s_j $i < j$
a zjistíme, zda mají průsečík.

Časová náročnost je $O(n^2)$

Jestliže je průsečíků daleko méně než $\binom{n}{2}$, řekněme $\underline{k}$,
je lepší zvolit nějaký sofistikovanější přístup.

Náš algoritmus najde průsečíky v čase $O((n+k)\log n)$

③

Průsečík dvou úseček ab, cd

ab : $\lambda a + (1-\lambda) b \qquad \lambda \in [0,1]$

cd : $\mu c + (1-\mu) d \qquad \mu \in [0,1]$

Řešíme rovnici

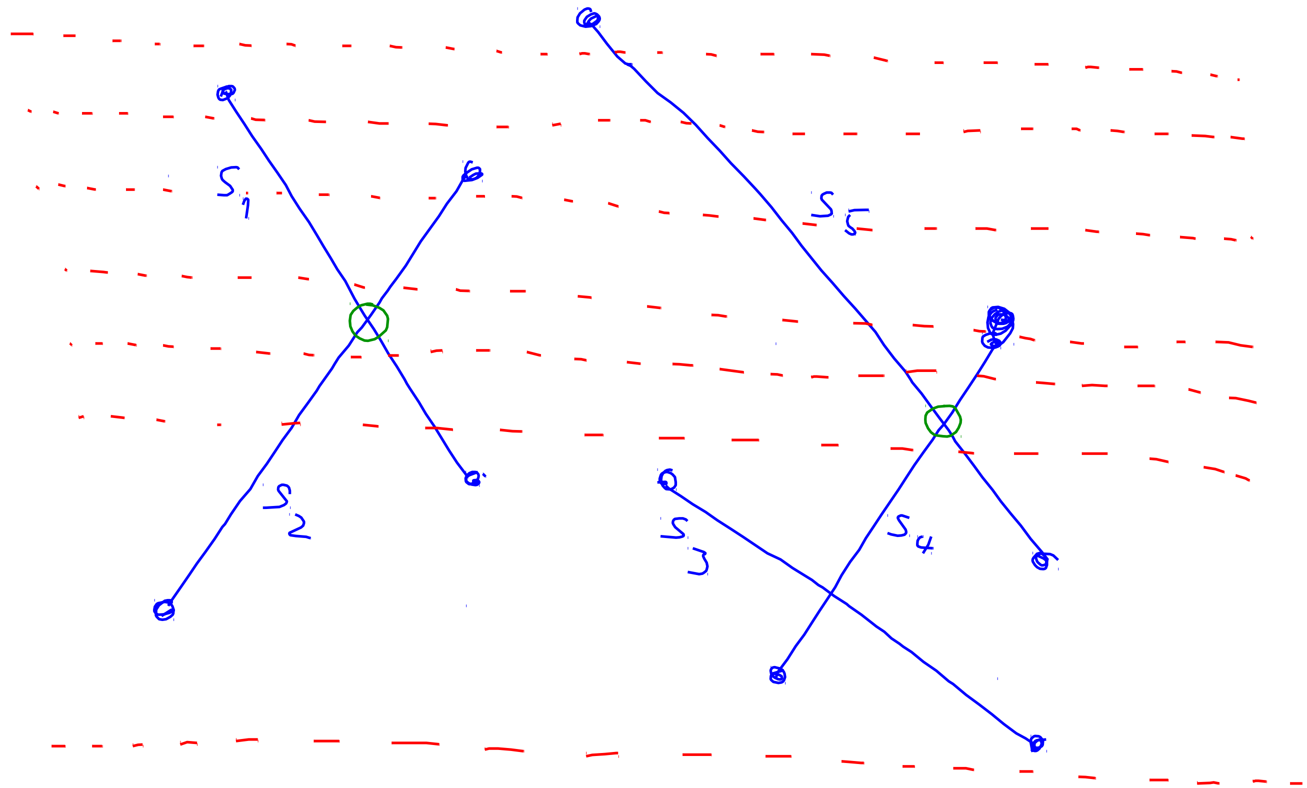
$$\lambda a + (1-\lambda) b = \mu c + (1-\mu) d$$

Pro souřadnice dostáváme

$$\lambda a_x + (1-\lambda) b_x = \mu c_x + (1-\mu) d_x$$
$$\lambda a_y + (1-\lambda) b_y = \mu c_y + (1-\mu) d_y$$

Jestliže existuje řešení a $\lambda \in [0,1]$ a $\mu \in [0,1]$, pak mají úsečky průsečík.

Metoda zametací přímky (sweep line)



fronta

$p < q \iff$

$(p_y > q_y) \vee (p_y = q_y \wedge p_x < q_x)$

odshora dolů

a zleva doprava

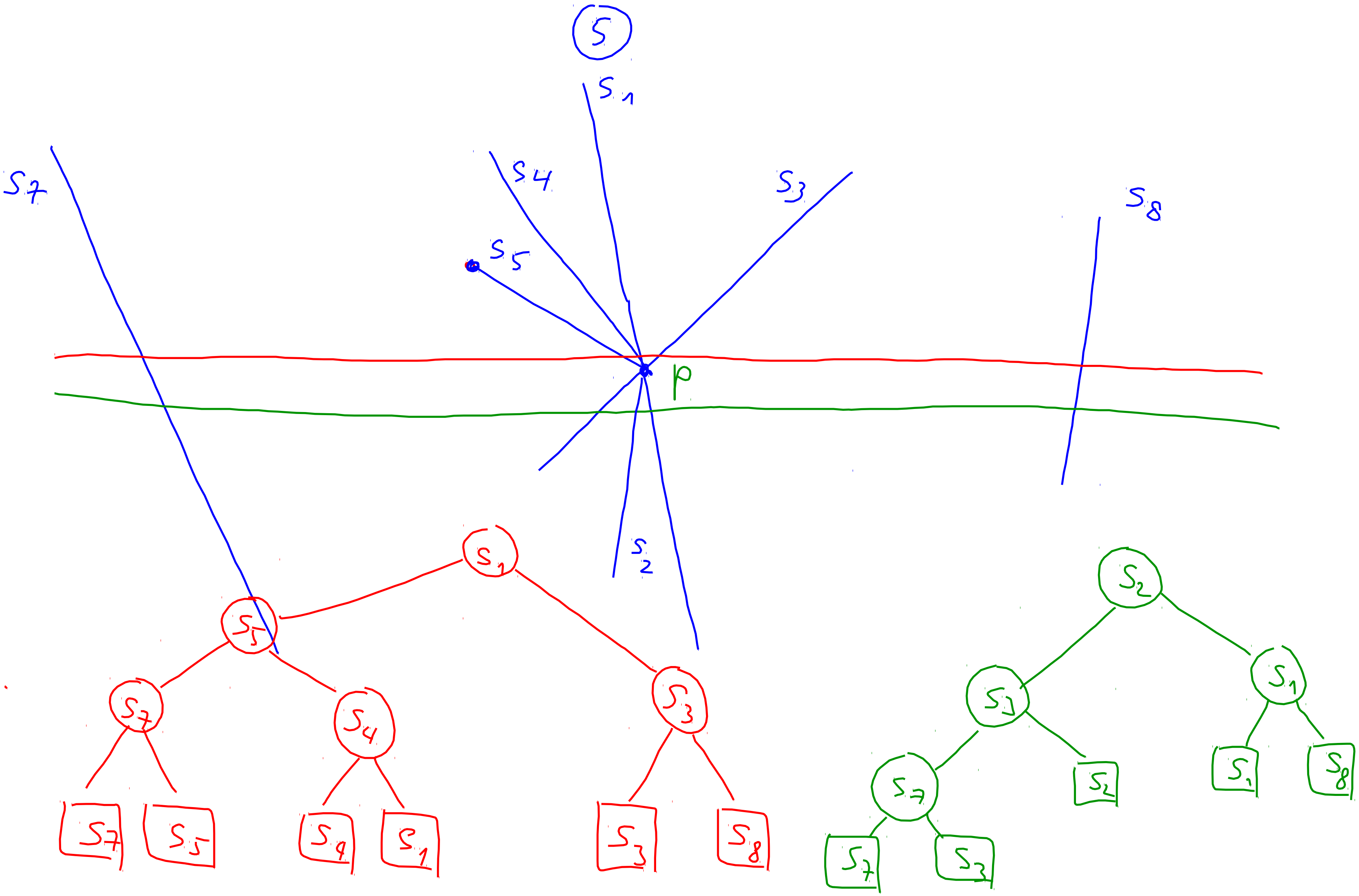
S metodou zametací přímky jsou obvykle spojeny 2 struktury

(1) <u>Fronta událostí</u>

- na začátku všechny koncové body úseček,
- při příchodu zametací přímky události, bod z fronty vyřadíme
- v průběhu algoritmu přidáváme do fronty spočtené průsečíky

(2) <u>Vyvážený binární strom</u>

- určuje pořadí úseček, které protínají zametací přímku
- pořadí je „zleva doprava"
- k jeho změně dochází v okamžiku příchodu zametací přímky události


S
s1
s4
s3
s7
s5
s8
p
s2
s1
s5
s7
s4
s3
s7
s5
s4
s1
s3
s8
s2
s3
s1
s7
s2
s1
s8
s7
s3

Co se děje při průchodu událostí p

Úsečky na kterých p leží rozdělíme do tří skupin

$U(p)$ .... ty, co mají p jako horní bod
$L(p)$ ... ty, co mají p jako dolní bod
$C(p)$ .... ty, co obsahují p uvnitř

Změna binárního vyvažovaného stromu

Před událostí p jsou ve stromě úsečky $L(p)$ a $C(p)$

Po průchodu událostí jsou ve stromě úsečky $U(p)$ a $C(p)$

Akce algoritmu

Jakmile $|L(p) \cup C(p) \cup U(p)| \geq 2$ označíme p za průsečík
p vyřadíme z fronty!

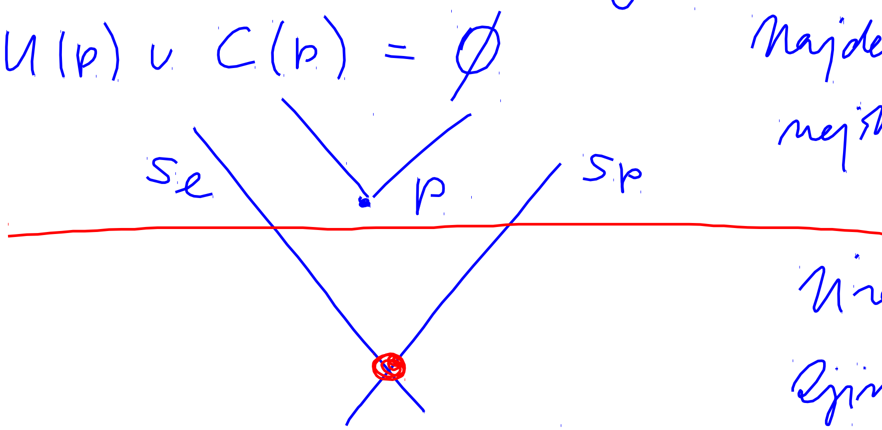
- ze stromu vyndáme po jedné úsečky z $L(p) \cup C(p)$ a provedeme vyvážení (po odebrání každé úsečky)
- do stromu na správné místo přidáme úsečky z $U(p) \cup C(p)$ a po přidání každé z nich provedeme vyvážení

Výpočet nových průsečíků

- hledáme je v okolí události p.

Rozlišíme dva případy

① $U(p) \cup C(p) = \emptyset$



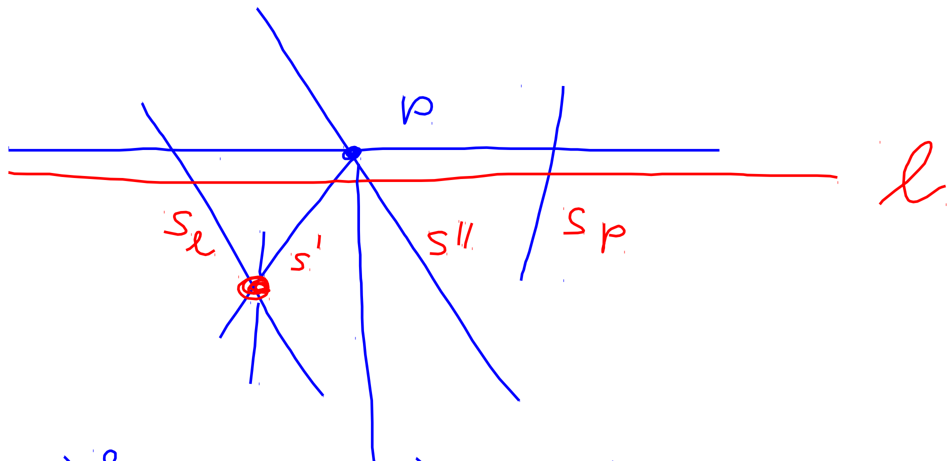
Najdeme úsečku z binárního stromu nejblíže vlevo k p .... s_l

úsečku nejblíže vpravo od p.... s_p

Zjistíme, zda s_l a s_p mají průsečík a zda tento průsečík leží pod p.

Pokud ano, zařadíme ho do fronty, označíme q a do jeho $C(q)$ dáme s_l a s_p.

2 $U(p) \cup C(p) \neq \emptyset$



Z úseček v $U(p) \cup C(p)$ vezmeme tu nejvíce vlevo .... s'
a tu nejvíce vpravo ... s''

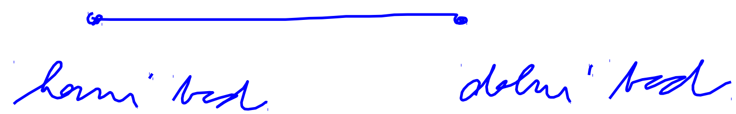
s_l bude nejbližší levý soused s'

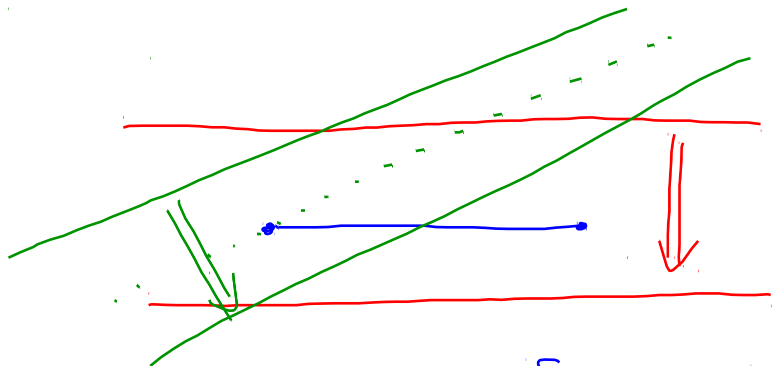
s_p bude nejbližší pravý soused s''

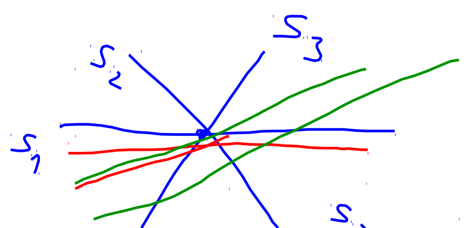
Počítáme průsečíky s_l a s', s_p a s''. Pokud existují a leží pod p, dáme je do fronty.

9

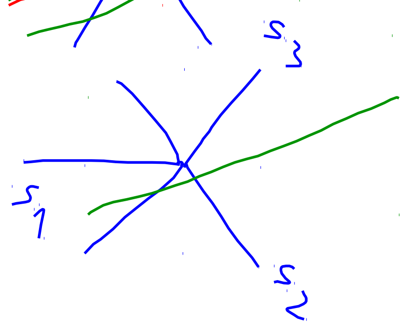
Vodorovná úsečka $s \in S$







$s_3 < s_2 < s_1$



$s_3 < s_2$

<u>Věta</u>: Časová náročnost algoritmu je $O((n+k)\log n)$, kde n je počet vrcholů a k je počet průsečíků.

Něco z teorie grafů

1. Eulerova věta: Mějme rovinný graf s n_v vrcholy, n_e hranami a n_f oblastmi, pak

$$n_v - n_e + n_f \ge 2 \qquad (*)$$

Pro souvislý graf nastane rovnost

$$n_v - n_e + n_f = 2.$$

<u>Důsledek</u>: V rovinném grafu je

$$n_e \le 3 n_v$$

Důkaz: Platí

$$n_f \leq \frac{2n_e}{3} + 1$$

Vezmeme Eulerovu nerovnost (*) a dosadíme $n_f \leq \frac{2n_e}{3} + 1$

$$n_v - n_e + n_f \geq 2$$

$$n_v - n_e + \frac{2n_e}{3} + 1 \geq 2$$

$$n_v - \frac{1}{3} n_e \geq 1$$

$$n_e \leq 3(n_v - 1) \leq 3n_v$$

Důkaz časové náročnosti

Seřazení konc. bodů do fronty událostí 2n bodů ... čas $O(n \log n)$

V každé události provádíme při odebírání a přidávání úseček vyvažování bin. stromu

1 vyvažování ... čas $O(\log n)$.

$m(p)$ .... počet úseček v $C(p) \cup U(p) \cup L(p)$

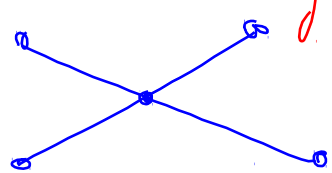
Čas potřebný pro algoritmus je

$$O\Big(\sum_{\substack{\text{přes všechny}\\ \text{konc. body}\\ \text{a průsečíky}}} m(p) \log n\Big)$$

Potřebujeme odhadnout $\sum m(p)$

Vezmeme si graf (rovinný) se všemi úsečkami z množiny S.

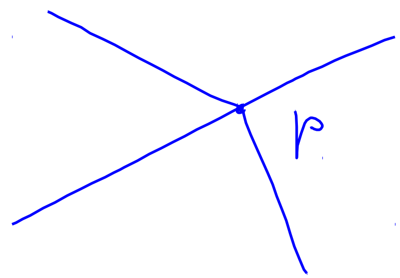
Jeho vrcholy jsou koncové body a průsečíky.



5 vrcholů
4 hrany (byly pouze 2 úsečky)

Stupeň uzlu p v grafu je počet hran vycházejících z p

$s(p)$ stupeň uzlu p $\qquad s(p) \geq m(p)$



$m(p) = 3$

$s(p) = 4$

$$\sum m(p) \leq \sum s(p) = 2n_e \leq 6n_v \leq 6(2n+k) = 12n+6k \leq 12(n+k)$$

zde používáme odvozenou nerovnost

Proto časová náročnost je

$$O\left(\sum m(p) \log n\right) \leq O\left((n+k)\log n\right)$$