

Cvičení 5: Simulování hodů kostkou

Úkol: Hodíme naráz šesti kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padne

- a) na každé kostce jiné číslo (jev A),
- b) samé šestky (jev B),
- c) právě pět šestek (jev C),
- d) právě čtyři šestky (jev D),
- e) aspoň čtyři šestky (jev E),
- f) samá sudá čísla (jev F),
- g) všechna čísla stejná (jev G)?

Řešení:

Při hodu šesti kostkami je základní prostor Ω tvořen všemi uspořádanými šestnicemi z čísel 1, 2, ..., 6, tedy $m(\Omega) = 6^6 = 46656$.

Ad a) Pro první kostku máme 6 možností, pro druhou 5 možností atd. až pro šestou kostku máme jedinou možnost, tedy

$$P(A) = \frac{6!}{6^6} = \frac{720}{46656} \doteq 0,01543$$

Ad b) Pro padnutí šesti šestek existuje jediná možnost, proto

$$P(B) = \frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} \doteq 0,00002143$$

Ad c) Kostku, na které nepadne šestka, lze vybrat šesti způsoby a může na ní padnout kterékoliv z čísel 1, 2, ..., 5, tedy

$$P(C) = \frac{6 \cdot 5}{6^6} = \frac{30}{46656} \doteq 0,000643$$

Ad d) Dvě kostky, na kterých nepadne šestka, lze vybrat $\binom{6}{2}$ způsoby a na každé z nich může padnout kterékoliv z čísel 1, 2, ..., 5, tedy

$$P(D) = \frac{\binom{6}{2} \cdot 5^2}{6^6} = \frac{375}{46656} \doteq 0,008038$$

Ad e) Mají-li padnout aspoň čtyři šestky, tak to znamená, že padnou buď samé šestky (nastane jev B) nebo právě pět šestek (jev C) nebo právě čtyři šestky (jev D). Protože jevy B, C, D jsou neslučitelné, platí, že

$$P(E) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{1 + 30 + 375}{46656} = \frac{406}{46656} = 0,008702$$

Ad f) Pro každou kostku lze vybrat sudé číslo třemi způsoby, tedy

$$P(F) = \frac{3^6}{6^6} = \frac{729}{46656} \doteq 0,015625$$

Ad g) Mají-li na všech šesti kostkách padnout stejná čísla, pak to lze uskutečnit právě šesti způsoby, tedy $P(G) = \frac{6}{6^6} = \frac{6}{46656} \doteq 0,0001286$

Na počítači budeme simulovat nezávislé hody šesti kostkami a budeme zjišťovat relativní četnosti jevů A až G.

Postup v systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor s 13 proměnnými, počet případů zvolíme 46656. Prvních šest proměnných, které nazveme I, II, III, IV, V, VI, naplníme náhodně vygenerovanými čísly od 1 do 6, tj. do Dlouhého jména každé této proměnné napíšeme =floor(rnd(6))+1.

Do proměnné v7, kterou nazveme jev A, se uloží číslo 1, když na příslušném řádku budou různá čísla a číslo 0 jinak, tzn., že do Dlouhého jména této proměnné napíšeme =iif((v1<>v2 and v1<>v3 and v1<>v4 and v1<>v5 and v1<>v6 and v2<>v3 and v2<>v4 and v2<>v5 and v2<>v6 and v3<>v4 and v3<>v5 and v3<>v6 and v4<>v5 and v4<>v6 and v5<>v6);1;0)

Do proměnné v8, kterou nazveme jev B, se uloží číslo 1, když na příslušném řádku budou samé šestky a číslo 0 jinak, tzn., že do Dlouhého jména této proměnné napíšeme =iif((v1=6 and v2=6 and v3=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6);1;0)

Analogicky postupujeme při vyplňování proměnných v9 až v13, které postupně nazveme jev C až jev G.

Uvedeme podmínky, kterými vyplníme Dlouhá jména těchto proměnných.

Jev C:

=iif((v1=6 and v2=6 and v3=6 and v4=6 and v5=6) or (v1=6 and v2=6 and v3=6 and v4=6 and v6=6) or (v1=6 and v2=6 and v3=6 and v5=6 and v6=6) or (v1=6 and v2=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6) or (v1=6 and v3=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6) or (v2=6 and v3=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6);1;0)

Jev D:

=iif((v3=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6) or (v2=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6) or (v2=6 and v3=6 and v5=6 and v6=6) or (v2=6 and v3=6 and v4=6 and v6=6) or (v2=6 and v3=6 and v4=6 and v5=6) or (v1=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6) or (v1=6 and v3=6 and v5=6 and v6=6) or (v1=6 and v3=6 and v4=6 and v6=6) or (v1=6 and v3=6 and v4=6 and v5=6) or (v1=6 and v2=6 and v5=6 and v6=6) or (v1=6 and v2=6 and v4=6 and v6=6) or (v1=6 and v2=6 and v4=6 and v5=6) or (v1=6 and v2=6 and v3=6 and v6=6) or (v1=6 and v2=6 and v3=6 and v5=6) or (v1=6 and v2=6 and v3=6 and v4=6);1;0)

Jev E:

=iif((v1=6 and v2=6 and v3=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6) or (v1=6 and v2=6 and v3=6 and v4=6 and v5=6) or (v1=6 and v2=6 and v3=6 and v4=6 and v6=6) or (v1=6 and v2=6 and v3=6 and v5=6 and v6=6) or (v1=6 and v2=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6) or (v1=6 and v3=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6) or (v2=6 and v3=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6) or (v3=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6) or (v2=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6) or (v2=6 and v3=6 and v5=6 and v6=6) or (v2=6 and v3=6 and v4=6 and v6=6) or (v2=6 and v3=6 and v4=6 and v5=6) or (v1=6 and v4=6 and v5=6 and v6=6) or (v1=6 and v3=6 and v5=6 and

$v_6=6)$ or $(v_1=6$ and $v_3=6$ and $v_4=6$ and $v_6=6)$ or $(v_1=6$ and $v_3=6$ and $v_4=6$ and $v_5=6)$ or $(v_1=6$ and $v_2=6$ and $v_5=6$ and $v_6=6)$ or $(v_1=6$ and $v_2=6$ and $v_4=6$ and $v_6=6)$ or $(v_1=6$ and $v_2=6$ and $v_4=6$ and $v_5=6)$ or $(v_1=6$ and $v_2=6$ and $v_3=6$ and $v_6=6)$ or $(v_1=6$ and $v_2=6$ and $v_3=6$ and $v_5=6)$ or $(v_1=6$ and $v_2=6$ and $v_3=6$ and $v_4=6)$;1;0)

Jev F:

$=iif((v_1=2$ or $v_1=4$ or $v_1=6)$ and $(v_2=2$ or $v_2=4$ or $v_2=6)$ and $(v_3=2$ or $v_3=4$ or $v_3=6)$ and $(v_4=2$ or $v_4=4$ or $v_4=6)$ and $(v_5=2$ or $v_5=4$ or $v_5=6)$ and $(v_6=2$ or $v_6=4$ or $v_6=6)$;1;0)

Jev G:

$=iif((v_1=1$ and $v_2=1$ and $v_3=1$ and $v_4=1$ and $v_5=1$ and $v_6=1)$ or $(v_1=2$ and $v_2=2$ and $v_3=2$ and $v_4=2$ and $v_5=2$ and $v_6=2)$ or $(v_1=3$ and $v_2=3$ and $v_3=3$ and $v_4=3$ and $v_5=3$ and $v_6=3)$ or $(v_1=4$ and $v_2=4$ and $v_3=4$ and $v_4=4$ and $v_5=4$ and $v_6=4)$ or $(v_1=5$ and $v_2=5$ and $v_3=5$ and $v_4=5$ and $v_5=5$ and $v_6=5)$ or $(v_1=6$ and $v_2=6$ and $v_3=6$ and $v_4=6$ and $v_5=6$ and $v_6=6)$;1;0)

Pro zjištění absolutních a relativních četností jevů A až G vypočteme součty a průměry proměnných jev A až jev G pomocí cesty:

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné 7-13 – OK – na záložce Detailní výsledky ponecháme jen Průměr a Součet – Výpočet.

Výslednou výstupní tabulku rozšíříme o proměnné Počet příznivých případů a Pravděpodobnost, do nichž zapíšeme počty příznivých případů a pravděpodobnosti jednotlivých jevů. Proměnnou Průměr přejmenujeme na Relativní četnost a proměnnou Součet na Absolutní četnost.

	absolutní četnost	relativní četnost	počet příznivých případů	pravděpodobnost
Jev A	688	0,014746	720	0,01543
Jev B	2	0,000043	1	0,00002143
Jev C	29	0,000622	30	0,000643
Jev D	361	0,007737	375	0,008037
Jev E	361	0,007737	406	0,0087
Jev F	703	0,015068	729	0,015625
Jev G	4	0,000086	6	0,0001286

Tabulka 3: Absolutní a relativní četnosti a pravděpodobnosti jevů A až G

Při této konkrétní simulaci pozorujeme nejvyšší odchylku relativní četnosti od pravděpodobnosti u jevu E. Simulace lze mnohonásobně nezávisle opakovat a sledovat, jak se mění výsledky v závislosti na počtu opakování.