Cvičení 6: Opakované nezávislé pokusy

Vzorový příklad na binomické rozložení pravděpodobností: Pravděpodobnost, že se pacient uzdraví z určitého druhu rakoviny, je rovna 0,4. Jestliže byla tato choroba diagnostikována u 15 pacientů, jaká je pravděpodobnost, že

a) se nejvýše 8 uzdraví,
b) se aspoň 10 uzdraví,
c) právě 5 se uzdraví,
d) počet uzdravených bude mezi třemi a osmi?

Řešení:
Počet pokusů: n = 15, pravděpodobnost úspěchu: $\vartheta = 0,4$
ad a)

$$\sum_{x=0}^{x_1} P_n(x) = \sum_{x=0}^{8} P_{15}(x) = \sum_{x=0}^{8} \binom{15}{x} 0,4^x 0,6^{15-x} = 0,905$$

S pravděpodobností 90,5 % se z 15 pacientů uzdraví nejvýše 8.

ad b) $\sum_{x=x_0}^{n} P_n(x) = \sum_{x=10}^{15} P_{15}(x) = 1 - \sum_{x=0}^{9} P_{15}(x) = 1 - \sum_{x=0}^{9} \binom{15}{x} 0,4^x 0,6^{15-x} = 0,0338$

S pravděpodobností 3,38 % se z 15 pacientů uzdraví aspoň 10.

ad c)

$$P_n(x) = P_{15}(5) = \binom{15}{5} 0,4^5 0,6^{10} = 0,1859$$

S pravděpodobností 18,59 % se z 15 pacientů uzdraví právě 5.

ad d)

$$\sum_{x=x_0}^{x_1} P_n(x) = \sum_{x=3}^{8} P_{15}(x) = \sum_{x=0}^{8} P_{15}(x) - \sum_{x=0}^{2} P_{15}(x) = \sum_{x=0}^{8} \binom{15}{x} 0,4^x 0,6^{15-x} - \sum_{x=0}^{2} \binom{15}{x} 0,4^x 0,6^{15-x} =$$

$$= 0,8778$$

S pravděpodobností 87,78 % bude mezi 15 pacienty uzdravených od 3 do 8.

Návod:
1. možnost: Použití funkcí Binom a IBinom
Otevřeme nový datový soubor se čtyřmi proměnnými a o jednom případu.
Do Dlouhého jména 1. proměnné napíšeme =IBinom(8;0,4;15).
Do Dlouhého jména 2. proměnné napíšeme =1-IBinom(9;0,4;15).
Do Dlouhého jména 3. proměnné napíšeme =Binom(5;0,4;15).
Do Dlouhého jména 4. proměnné napíšeme =IBinom(8;0,4;15)-IBinom(2;0,4;15).

	Prom1 =IBinom(8;0,4;15)	Prom2 =1-IBinom(9;0,4;15)	Prom3 =Binom(5;0,4;15)	Prom4 =IBinom(8;0,4;15)-IBinom(2;0,4;15)
1	0,904952592	0,0338333029	0,185937845	0,877838591

2. možnost: Použití pravděpodobnostního kalkulátoru
Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor – Rozdělení – Binomické – do okénka N napíšeme 15, do okénka P napíšeme 0,4.
Ad a) Do okénka X napíšeme 8, zaškrtneme Kum. Pravděpodobnost – Výpočet. V okénku p se objeví 0,904953.
Ad b) Do okénka X napíšeme 9, zaškrtneme Kum. Pravděpodobnost – Výpočet. V okénku p se objeví 0,966167. Hledaná pravděpodobnost je doplněk do 1, tedy 0,033833.
Ad c) Do okénka X napíšeme 5, zaškrtneme Pravdě. V okénku p se objeví 0,185938.
Ad d) Nejprve vypočteme pravděpodobnost, že se uzdraví nejvýše 8 pacientů (to bylo spočítáno v bodě a) a poté od ní odečteme pravděpodobnost, že se uzdraví nejvýše 2 pacienti: 0,904953 – 0,027114 = 0,877839.

Příklady k samostatnému řešení (číslování podle skript Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika)

Příklad 4.10.: V rodině je 10 dětí. Za předpokladu, že chlapci i dívky se rodí s pravděpodobností 0,5 a pohlaví se formuje nezávisle na sobě, určete pravděpodobnost, že v této rodině je
a) právě 5 chlapců
b) nejméně 3 a nejvýše 8 chlapců.
Výsledek: ad a) 0,2461, ad b) 0,9346

Příklad 4.11.: Na dvoukolejném železničním mostě se potkají během 24 hodin nejvýše dva vlaky, a to s pravděpodobností 0,2. Za předpokladu, že denní provozy jsou nezávislé, určete pravděpodobnost, že během týdne se dva vlaky na mostě potkají
a) právě třikrát
b) nejvýše třikrát
c) alespoň třikrát.
Výsledek: ad a) 0,11468, ad b) 0,9667, ad c) 0,148

Příklad 4.12.: Je pravděpodobnější vyhrát se stejně silným soupeřem tři partie ze čtyř nebo pět partií z osmi, když nerozhodný výsledek je vyloučen a výsledky jsou nezávislé?
Výsledek: ad a) 0,250000, ad b) 0,218750

Příklad 4.13.: Dvacetkrát nezávisle na sobě házíme třemi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom hodě padnou tři líce?
Výsledek: 0,930791

Příklad 4.14.: Pětkrát nezávisle na sobě házíme třemi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že právě dvakrát padnou tři jedničky?
Výsledek: 0,000211

Vzorový příklad na geometrické rozložení pravděpodobností: Jaká je pravděpodobnost, že při hře „Člověče, nezlob se!" nasadíme figurku
a) právě při třetím hodu,
b) nejpozději při třetím hodu?

Řešení:

Ad a) Počet neúspěchů: x = 2, pravděpodobnost úspěchu: $\vartheta = \frac{1}{6}$

$$P(2) = (1-\vartheta)^2 \vartheta = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} = \mathrm{Geom}(2;1/6) = 0{,}1157$$

Pravděpodobnost, že figurku nasadíme právě při třetím hodu, je 11,57 %.

Ad b) Počet neúspěchů: x = 0, 1, 2, pravděpodobnost úspěchu: $\vartheta = \frac{1}{6}$

$$\sum_{x=0}^{2} P(x) = \sum_{x=0}^{2} (1-\vartheta)^x \vartheta = \sum_{x=0}^{2} \left(\frac{5}{6}\right)^x \frac{1}{6} = \mathrm{IGeom}(2;1/6) = 0{,}4213$$

Pravděpodobnost, že figurku nasadíme nejpozději při třetím hodu, je 42,13 %.

Příklad: V určitém výrobním procesu je známo, že jeden z deseti výrobků nevyhovuje normám. Jaká je pravděpodobnost, že pátý náhodně vybraný výrobek je prvním, který nevyhovuje?
Výsledek: 0,0656