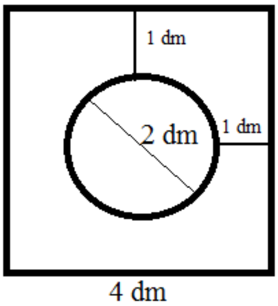
Cvičení 7: Geometrická pravděpodobnost a empirický zákon velkých čísel

Úkol: Máme kruhový disk o průměru 2 dm a hodíme ho na podlahu se čtvercovými kachlič-kami o straně 4 dm. Jaká je pravděpodobnost, že disk přistane uvnitř některé kachličky?
Řešení: Polohu disku na podlaze můžeme popsat souřadnicemi jeho středu [x, y]. Vzhledem k tomu, že všechny polohy disku lze považovat za stejně nadějné, omezíme se na tu kachlič-ku, v níž se ocitl střed disku. Aby byl disk uvnitř kachličky, musí se jeho střed nacházet od okrajů kachličky ve vzdálenosti aspoň poloměru disku.



$$G = \{[x, y] \in R^2; 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4\}$$
$$B = \{[x, y] \in G; 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 3\}$$
$$mes(G) = 4^2 = 16, mes(B) = 2^2 = 4, Q(B) = \frac{mes(B)}{mes(G)} = \frac{4}{16} = 0{,}25$$

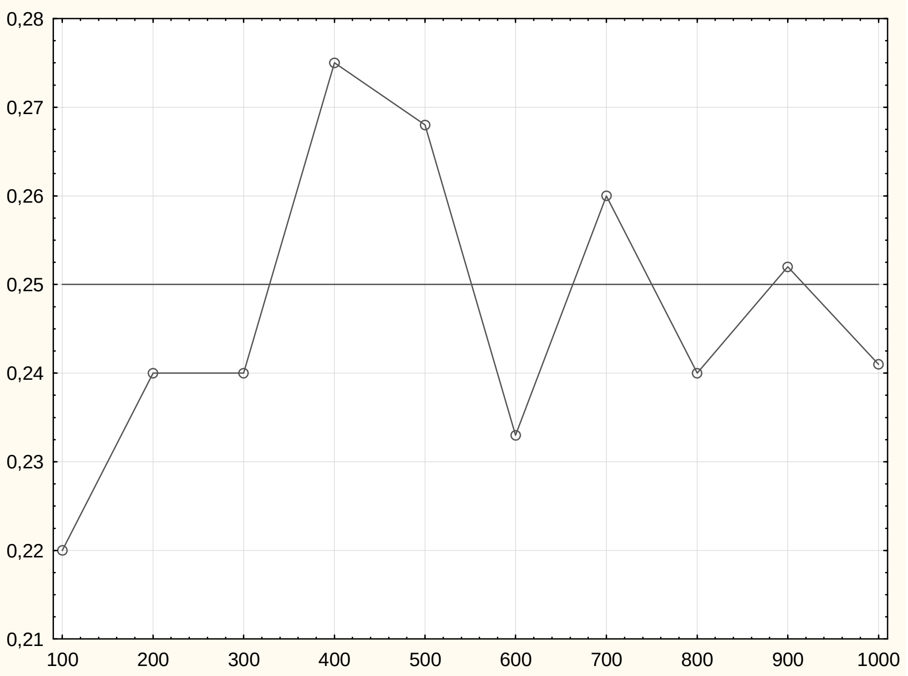
Pro využití empirického zákona velkých čísel tedy stačí, abychom vygenerovali velký počet dvojic čísel (x,y) z intervalu (0,4) a zjistili relativní četnost těch dvojic, kdy $1 \le x \le 3$ a sou-časně $1 \le y \le 3$.

Postup v systému STATISTICA:
Vytvoříme nový datový soubor se třemi proměnnými a n případy, kde n budeme postupně měnit, n = 100, 200, atd. až 1000. První dvě proměnné nazveme x a y a naplníme je náhodně vygenerovanými čísly z intervalu (0,4), tj. do Dlouhého jména každé této proměnné napíšeme =rnd(4). Třetí proměnnou nazveme úspěch. Nabude hodnoty 1, když $1 \le x \le 3$ a současně $1 \le y \le 3$ a hodnoty 0 jinak. Do Dlouhého jména proměnné úspěch napíšeme =iif(x>=1 and x<3 and y>=1 and y<=3;1;0). Zajímá nás relativní četnost úspěchu, tedy prů-měr proměnné úspěch.
Průměr lze spočítat např. tak, že 2x klikneme na název proměnné úspěch a v okně vlastností vybereme tlačítko Hodn./Statist … a přečteme a zapíšeme hodnotu průměru.
Pro přidání počtu případů vybereme na liště tlačítko Případy – Přidat a zadáme čísla případů od – do. Pak znovu vyplníme hodnoty našich tří proměnných pomocí cesty *Data – Přepočítat výrazy tabulky – Přepočítat všechny proměnné – OK.*

Pro vytvoření grafu závislosti relativní četnosti úspěchu na počtu simulací zjištěné průměry proměnné úspěch zapíšeme do nového datového souboru o třech proměnných a 10 případech. Do proměnné v1 nazvané n uložíme počty simulací 100, 200 atd. až 1000. Do proměnné rel. čet. zapíšeme zjištěné průměry proměnné úspěch a do pravděp. uložíme pravděpodobnost úspěchu, tj. do Dlouhého jména proměnné pravděp. napíšeme =0,25.
Datový soubor:

	1 n	2 rel. čet.	3 pravděp.
1	100	0,22	0,25
2	200	0,24	0,25
3	300	0,24	0,25
4	400	0,275	0,25
5	500	0,268	0,25
6	600	0,233	0,25
7	700	0,26	0,25
8	800	0,24	0,25
9	900	0,252	0,25
10	1000	0,241	0,25

Vytvoření grafu: *Grafy – Bodové grafy* – vybereme *Typ grafu Vícenásobný*, odškrtneme *Typ proložení Lineární – Proměnné X: n, Y: rel. čet., pravděp.* - *OK*. Poté 2x klikneme na pozadí grafu, vybereme *Spojnice – Obecné* – u proměnné rel. čet. zaškrtneme *Spojnice*, *u* proměnné pravděp. zaškrtneme *Spojnice* a odškrtneme *Značky – OK.*



Graf závislosti relativní četnosti úspěchu na počtu simulací

Z obrázku vidíme, že s rostoucím počtem simulací se relativní četnost úspěchu blíží pravděpodobnosti úspěchu 0,25.