4 Opakované pokusy

4.1 Opakované nezávislé pokusy

Opakovaně nezávisle provádíme týž náhodný pokus a sledujeme nastoupení jevu, kterému říkáme **úspěch**. V každém z těchto pokusů nastává úspěch s pravděpodobností θ, $0 < \theta < 1$.

Binomické rozdělení pravděpodobnosti

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane právě x-krát ($0 \leq x \leq n$):

$$P_n(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}. \tag{1}$$

Příklad 4.1. Pojišťovna zjistila, že 12 % pojistných událostí je způsobeno vloupáním. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 30 náhodně vybranými pojistnými událostmi bude způsobeno vloupáním

a) nejvýše 6;

b) aspoň 6;

c) právě 6;

d) od dvou do pěti?

ad a)
```
## [1] 0.9393926
```

ad b)
```
## [1] 0.1430769
```

ad c)
```
## [1] 0.08246953
```

ad d)
```
## [1] 0.7469528
```

Příklady k samostatnému řešení

Příklad 4.2. V rodině je 10 dětí. Za předpokladu, že chlapci i dívky se rodí s pravděpodobností 0.5 a pohlaví se formuje nezávisle na sobě, určete pravděpodobnost, že v této rodině je

a) právě 5 chlapců;

b) nejméně 3 a nejvýše 8 chlapců.

$n = 10$; úspěch = narození chlapce; pravděpodobnost úspěchu $\theta = 0.5$;

ad a)
```
## [1] 0.2460938
```

ad b)
```
## [1] 0.9345703
```

Příklad 4.3. Na dvoukolejném železničním mostě se potkají během 24 hodin nejvýše dva vlaky, a to s pravděpodobností 0.2. Za předpokladu, že denní provozy jsou nezávislé, určete pravděpodobnost, že během týdne se dva vlaky na mostě potkají

a) právě třikrát;

b) nejvýše třikrát;

c) alespoň třikrát.

$n = 7$; úspěch = potkání dvou vlaků během 24 hodin; pravděpodobnost úspěchu $\theta = 0.2$;

ad a)
```
## [1] 0.114688
```

ad b)
```
## [1] 0.966656
```

ad c)
```
## [1] 0.148032
```

Příklad 4.4. Je pravděpodobnější vyhrát se stejně silným soupeřem tři partie ze čtyř nebo pět partií z osmi, když nerozhodný výsledek je vyloučen a výsledky jsou nezávislé?

Úspěch je výhra partie se stejně silným soupeřem, když remíza je vyloučena; pravděpodobnost úspěchu $\theta = 0.5$;

a) n = 4, x = 3;

b) n = 8, x = 5.

ad a)
```
## [1] 0.25
```

ad b)
```
## [1] 0.21875
```

Příklad 4.5. Dvacetkrát nezávisle na sobě házíme třemi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom hodu padnou tři líce?

$n = 20$; úspěch je padnutí tří líců při hodu třemi mincemi; $\theta = 1/8 = 0.125$;

```
## [1] 0.9307912
```

Výsledek: 0.931.

Geometrické rozdělení pravděpodobnosti

Pravděpodobnost, že prvnímu úspěchu bude předcházet x neúspěchů:

$$P(x) = (1-\theta)^x\theta. \tag{2}$$

Příklad 4.6. Jaká je pravděpodobnost, že při hře Člověče, nezlob se! nasadíme figurku nejpozději při třetím hodu?

Počet neúspěchů: $x = 0, 1, 2$; pravděpodobnost úspěchu: $\theta = \frac{1}{6}$;

```
## [1] 0.4212963
```

Příklad k samostatnému řešení

Příklad 4.7. Studenti biologie zkoumají barvu očí octomilek. Pravděpodobnost, že octomilka má bílou barvu očí, je 0.25, pravděpodobnost, že má červenou barvu očí, je 0.75. Jaká je pravděpodobnost, že až čtvrtá zkoumaná octomilka bude mít bílou barvu očí?

Počet neúspěchů: $x = 3$; pravděpodobnost úspěchu: $\theta = 0.25$;

```
## [1] 0.1054688
```

4.2 Opakované závislé pokusy

Hypergeometrické rozložení pravděpodobností

Máme N objektů, mezi nimi je M objektů označeno $0 \leq M \leq N$. Náhodně bez vracení vybereme k objektů ($0 \leq k \leq N$).
Pravděpodobnost, že ve výběru je právě x označených objektů ($\max\{0, M - N + k\} \leq x \leq \min\{k, M\}$):

$$P_{N,M,k}(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{k-x}}{\binom{N}{k}}. \tag{3}$$

Příklad 4.8. Koupili jsme 10 cibulek červených tulipánů a 5 cibulek žlutých tulipánů. Zasadili jsme 8 náhodně vybraných cibulek.

a) Jaká je pravděpodobnost, že žádná nebude cibulka žlutých tulipánů?

b) Jaká je pravděpodobnost, že jsme zasadili všech 5 cibulek žlutých tulipánů?

c) Jaká je pravděpodobnost, že aspoň dvě budou cibulky žlutých tulipánů?

Počet objektů: $N = 15$, počet označených objektů: $M = 5$, počet vybraných objektů: $n = 8$

ad a)
```
## [1] 0.006993007
```

ad b)
```
## [1] 0.01864802
```

ad c)
```
## [1] 0.8997669
```

Příklad k samostatnému řešení:

Příklad 4.9. Dítě dostalo sáček, v němž bylo 5 červených a 5 žlutých bonbónů. Dítě náhodně vybralo ze sáčku 6 bonbónů. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými bonbóny budou právě 2 červené?

```
## [1] 0.2380952
```