6 Výpočet číselných charakteristik náhodných veličin, aplikace Moivreovy – Laplaceovy věty

6.1 Kvantily vybraných spojitých rozdělení

α-kvantil náhodné veličiny X značíme x_α.

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Náhodná veličina pochází z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Pro $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ se jedná o standardizované normální rozdělení

$$U \sim N(0, 1).$$

α-kvantil standardizovaného normálního rozdělení značíme $u(\alpha)$. Standardizované normální rozdělení je symetrické okolo nuly, proto pro kvantily tohoto rozdělení platí vztah

$$u(\alpha) = -u(1-\alpha).$$

χ^2 rozdělení s n stupni volnosti $\chi^2(n)$

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim N(0,1)$, $i = 1, \ldots, n$. Pak náhodná veličina

$$X = X_1^2 + ... + X_n^2$$

má χ^2 rozdělení s n stupni volnosti

$$X \sim \chi^2(n).$$

α-kvantil χ^2 rozdělení s n stupni volnosti značíme $\chi^2_n(\alpha)$.

Studentovo rozdělení s n stupni volnosti $t(n)$

Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim \chi^2(n)$. Pak náhodná veličina

$$X = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{X_2}{n}}}$$

má Studentovo rozdělení s n stupni volnosti

$$X \sim t(n).$$

α-kvantil Studentova rozdělení s n stupni volnosti značíme $t_n(\alpha)$. Studentovo rozdělení je symetrické okolo nuly, proto pro kvantily tohoto rozdělení platí vztah

$$t(\alpha) = -t(1-\alpha).$$

Fisherovo-Snedecorovo rozdělení s n_1 a n_2 stupni volnosti $F(n_1, n_2)$

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim \chi^2(n_i)$, $i = 1, 2$. Pak náhodná veličina

$$X = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$$

má Fishorovo rozdělení s n_1 a n_2 stupni volnosti

$$X \sim F(n_1, n_2).$$

α-kvantil Fisherova rozdělení s n_1 a n_2 stupni volnosti značíme $F_{n_1,n_2}(\alpha)$ Pro kvantily Fisherova rozdělení platí následující vztah

$$F_{n_1,n_2}(\alpha) = \frac{1}{F_{n_1,n_2}(1-\alpha)}.$$

Příklad 6.1. Najděte medián a horní a dolní kvartil náhodné veličiny $U \sim N(0,1)$.

```
## [1] 0
## [1] -0.6744898
## [1] 0.6744898
```

Příklad 6.2. Najděte dolní kvartil náhodné veličiny $X \sim N(3,5)$.

```
## [1] 1.491795
```

Příklad 6.3. Určete kvantil $\chi^2_{25}(0.025)$.

```
## [1] 13.11972
```

Příklad 6.4. Určete kvantily $t_{30}(0.99)$ a $t_{14}(0.05)$.

```
## [1] 2.457262
## [1] -1.76131
```

Příklad 6.5. Určete kvantily $F_{5,20}(0.975)$ a $F_{2,10}(0.05)$.

```
## [1] 3.289056
## [1] 0.0515573
```

6.2 Výpočet střední hodnoty a rozptylu diskrétních náhodných veličin

Příklad 6.6. Náhodná veličina X udává počet ok při hodu kostkou. Vypočtěte její střední hodnotu a rozptyl.

```
## [1] "EX = 3.5"
## [1] "DX = 2.91667"
```

Příklad k samostatnému řešení

Příklad 6.7. Postupně se zkouší spolehlivost čtyř přístrojů. Další se zkouší jen tehdy, když předchozí je spolehlivý. Každý z přístrojů vydrží zkoušku s pravděpodobností 0.8. Náhodná veličina X udává počet zkoušených přístrojů. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

X nabývá hodnot $1, 2, 3, 4$ a její pravděpodobnostní funkce je $\pi(1) = 0.2$, $\pi(2) = 0.8 * 0.2 = 0.16$, $\pi(3) = 0.8^2 * 0.2 = 0.128$, $\pi(4) = 0.8^3 * 0.2 + 0.8^4 = 0.512$, $\pi(0) = 0$ jinak.

```
## [1] "EX = 2.952"
## [1] "DX = 1.4697"
```

6.3 Výpočet koeficientu korelace diskrétních náhodných veličin

Příklad 6.8. Objektem zájmu rozsáhlé studie bylo sledování pohřebního rituálu dnes již vymřelého ale v minulosti velmi dlouho přetrvávajícího a rozsáhlého jihoamerického kmene. Součástí pohřebního rituálu tohoto kmene bylo odsekávání článků prstů na rukou a nohou zemřelého a jejich následné obětování bohům jako dar, aby zemřelého přijali mezi sebe. Zemřelému tak byl na ruce odetnut buď jeden nebo dva prsty a na noze tři nebo čtyři prsty.

Dále bylo zjištěno, že domorodci odtínali jeden prst na ruce a tři prsty na noze zemřelého s pravděpodobností 0.1, dva prsty na ruce a tři prsty na noze s pravděpodobností 0.3, jeden prst na ruce a čtyři prsty na noze s pravděpodobností 0.35 a dva prsty na ruce a čtyři prsty na noze s pravděpodobností 0.25. Určete korelaci znaků X – počet odetnutých prstů na rukou a Y – počet odetnutých prstů na nohou.

```
##                    EX   EY   DX     DY   CXY     RXY
## Charakteristiky 1.6 3.55 0.24 0.2475 -0.08 -0.3282
```

Příklad 6.9. Náhodná veličina X udává příjem manžela (v tisících dolarů) a náhodná veličina Y příjem manželky (v tisících dolarů). Je známa simultánní pravděpodobnostní funkce $\pi(x,y)$ diskrétního náhodného vektoru (X,Y): $\pi(10,10)=0.2$, $\pi(10,20)=0.04$, $\pi(10,30)=0.01$, $\pi(10,40)=0$, $\pi(20,10)=0.1$, $\pi(20,20)=0.36$, $\pi(20,30)=0.09$, $\pi(20,40)=0$, $\pi(30,10)=0$, $\pi(30,20)=0.05$, $\pi(30,30)=0.1$, $\pi(30,40)=0$, $\pi(40,10)=0$, $\pi(40,20)=0$, $\pi(40,30)=0$, $\pi(40,40)=0.05$, $\pi(x,y)=0$ jinak. Vypočtěte koeficient korelace příjmů manžela a manželky.

Náhodná veličina X i náhodná veličina Y nabývají hodnot $10, 20, 30, 40$.

Tabulka pravděpodobnostních funkcí $\pi(X,Y)$					
X - příjem manžela	Y - příjem manželky				
	10	20	30	40	$\sum$
10	0.2	0.04	0.01	0	
20	0.1	0.36	0.09	0	
30	0	0.05	0.1	0	
40	0	0	0	0.05	
$\sum$					1

```
##                  EX EY DX DY CXY    RXY
## Charakteristiky 20 20 60 70  49 0.7561
```

Příklady k samostatnému řešení

Příklad 6.10. Diskrétní náhodný vektor (X,Y) má simultánní pravděpodobnostní funkci s hodnotami $\pi(0,-1)=c$, $\pi(0,0)=\pi(0,1)=\pi(1,-1)=\pi(2,-1)=0$, $\pi(1,0)=\pi(1,1)=\pi(2,1)=2c$, $\pi(2,0)=3c$, $\pi(x,y)=0$ jinak. Určete konstantu c a vypočtěte $R(X,Y)$.

Tabulka pr. funkcí $\pi(X,Y)$				
X	Y			
	-1	0	1	$\sum$
0	c	0	0	c
1	0	$2c$	$2c$	$4c$
2	0	$3c$	$2c$	$5c$
$\sum$	c	$5c$	$4c$	1

```
##                    EX  EY   DX   DY  CXY    RXY
## Charakteristiky 1.4 0.3 0.44 0.41 0.18 0.4238
```

Příklad 6.11. Zkoumali jsme potomky kosmanů. Náhodná veličina X udává počet manželských potomků, které samice porodila a náhodná veličina Y počet nemanželských potomků, které samice porodila. Je známa simultánní pravděpodobnostní funkce $\pi(x, y)$ diskrétního náhodného vektoru (X, Y):

Tabulka simultánní pstní fce $\pi(X, Y)$			
X - počet manž.p.	Y - počet nemanž.p.		
	1	2	3
1	0.2	0.04	0.01
2	0.15	0.36	0.09
3	0.05	0.1	0.0

Vypočtěte koeficient korelace manželských a nemanželských potomků.

```
##                   EX  EY   DX   DY  CXY    RXY
## Charakteristiky 1.9 1.7 0.39 0.41 0.11 0.2751
```

6.4 Aplikace Moivrovy a Laplaceovy věty

Příklad 6.12. Pravděpodobnost úspěchu při jednom pokusu je 0.3. S jakou pravděpodobností lze tvrdit, že počet úspěchů ve 100 pokusech bude v mezích od 20 do 40? Výpočet proveďte

a) přesně;

b) pomocí aproximace normálním rozdělením.

```
## [1] 0.9786144
## [1] 0.9786144
## [1] 0.9772632
```

Příklad 6.13. Pravděpodobnost, že zakoupený elektrospotřebič bude vyžadovat opravu během záruční doby, je rovna 0.2. Jaká je pravděpodobnost, že během záruční doby bude nutno ze 400 prodaných spotřebičů opravit více než 96? Výpočet proveďte

a) přesně;

b) pomocí aproximace normálním rozdělením.

```
## [1] 0.02138855
## [1] 0.02275013
```

Příklad k samostatnému řešení

Příklad 6.14. Pravděpodobnost, že určitý typ výrobku má výrobní vadu, je 0.05. Jaká je pravděpodobnost, že ze série 1000 výrobků bude mít výrobní vadu nejvýše 70? Výpočet proveďte

a) přesně;

b) pomocí aproximace normálním rozdělením.

```
## [1] 0.9976697
## [1] 0.9981455
```