

## 8 Testování hypotéz

- Datový soubor = Náhodný výběr → stanovíme předpoklady → ověřujeme, zda platí;
  - předpoklady
    - \* o charakteristikách:  $\mu$ ,  $\sigma^2$ ,  $\sigma$ , ...
    - \* o rozdělení: normální, poissonovo, exponenciální, ...
    - \* o nezávislosti dvou náh. výběrů...
- REÁLNÁ DATA → jsou variabilní → dva náhodné výběry zkoumající totéž → výsledek nikdy nevyjde stejný
- zkoumáme, zda se vzorky liší pouze variabilitou, nebo je skutečně rozdíl v hodnotách parametru

### Postup testování hypotéz:

1. Formulace problému ... přesná, jednoznačná
2. stanovení nulové hypotézy  $H_0$ 
  - hypotéza o níž test rozhodne, zda se zamítne, nebo ne
  - 1 náhodný výběr a publikovaná hodnota  $c$ ;  $H_0 : \mu = c$
3. stanovení alternativní hypotézy  $H_1$ 
  - alt. hypotézu přijímáme, pokud  $H_0$  zamítáme
    - $H_1 : \mu_1 \neq c$  (oboustranná alt.);
    - $H_1 : \mu_1 < c$  (levostranná alt.);
    - $H_1 : \mu_1 > c$  (pravostranná alt.).
4. volba hladiny významnosti  $\alpha$ 
  - pst(riziko), že  $H_0$  zamítneme, když platí - snažíme se tuto hodnotu snížit na minimum
5. provedení měření
6. Testování  $H_0$  (tři různé způsoby):
  - Kritický obor
  - Interval spolehlivosti
  - p-hodnota
7. rozhodnutí o zamítnutí/nezamítnutí  $H_0$
8. interpretace výsledků

## 8.1 Testování pomocí kritického oboru

- vybereme vhodnou testovací statistiku  $T_0$
- vypočítáme hodnotu testovací statistiky  $t_0$
- stanovíme kritický obor  $W$ :
  - oboustranná alt.:  $W = (T_{min}; K_{\alpha/2}) \cup (K_{1-\alpha/2}; T_{max})$
  - pravostranná alt.:  $W = (K_{1-\alpha}; T_{max})$
  - levostranná alt.:  $W = (T_{min}; K_{\alpha})$
- Pokud  $t_0 \in W$ ,  $H_0$  zamítáme na hladině význam.  $\alpha$ .

## 8.2 Testování pomocí IS:

- Testujeme hypotézu  $H_0 : \theta = c$  oproti  $H_1 : \theta \neq c$  ( $\theta < c$ ;  $\theta > c$ )
- Sestrojíme  $100(1 - \alpha)\%$  IS:
  - oboustranná alt.  $\rightarrow$  oboustranný IS
  - levostranná alt.  $\rightarrow$  pravostranný IS
  - pravostranná alt.  $\rightarrow$  levostranný IS
- pokud  $c \in IS$ ,  $H_0$  nezamítáme na hladině význam.  $\alpha$ .

## Testování pomocí p-hodnoty

- p-hodnota:
  - pro oboustrannou alt.:  $p = 2 \min\{P(T_0 < t_0); P(T_0 > t_0)\}$
  - pro levostrannou alt.:  $p = P(T_0 \leq t_0)$
  - pro pravostrannou alt.:  $p = P(T_0 \geq t_0) = 1 - P(T_0 \leq t_0)$
- Je-li  $p \leq \alpha$ ,  $H_0$  zamítáme na hladině význam.  $\alpha$ .

**Příklad 8.1.** Víme, že výška hochů ve věku 9.5 až 10 let má normální rozdělení s neznámou střední hodnotou  $\mu$  a známým rozptylem  $\sigma^2 = 39.112 \text{ cm}^2$ . Dětský lékař náhodně vybral 15 hochů uvedeného věku, změřil je a vypočítal realizaci výběrového průměru  $m = 139.13 \text{ cm}$ . Podle jeho názoru by výška hochů v tomto věku neměla přesáhnout 142 cm s pravděpodobností 0.95. Lze tvrzení lékaře akceptovat?

Testujeme  $H_0 : \mu \geq 142$  proti  $H_1 : \mu < 142$  na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$ .

a) Test provedeme pomocí kritického oboru.

Pro úlohy o střední hodnotě normálního rozdělení při známém rozptylu používáme pivotovou statistiku

$$U = \frac{M - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1).$$

Testovací statistika bude mít tedy tvar

$$T_0 = \frac{M - c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1).$$

Vypočítáme realizaci testového kritéria:

$$t_0 = \frac{139.13 - 142}{\frac{\sqrt{39.112}}{\sqrt{15}}} = -1.7773.$$

```
sigma <- sqrt(39.112)
n <- 15
m <- 139.13
c <- 142
alpha <- 0.05
```

```
# ad a)
t0 <- (m-c)/(sigma/sqrt(n))
qnorm(alpha)
```

Stanovíme kritický obor:  $W \in (-\infty, u_\alpha) = (-\infty, u_{0.05}) = (-\infty, -u_{0.95}) = (-\infty, -1.6449)$ . Protože  $-1.7773 \in W$ , nulovou hypotézu  $H_0$  zamítáme na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$ . Tvrzení lékaře lze tedy akceptovat s rizikem omylu 5%.

b) Test provedeme pomocí intervalu spolehlivosti.

Meze  $100(1 - \alpha)\%$  empirického pravostranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu  $\mu$  při známém rozptylu  $\sigma^2$  jsou

$$(-\infty, h) = \left(-\infty, m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha\right).$$

V našem případě dostáváme:

$$h = 139.13 - \frac{\sqrt{39.112}}{\sqrt{15}} u_{0.05} = 139.13 + \frac{\sqrt{39.112}}{\sqrt{15}} 1.645 = 141.79.$$

```
hh <- m-(sigma/sqrt(n))*qnorm(alpha)
```

Protože  $142 \notin (-\infty; 141.79)$ ,  $H_0$  zamítáme na hladině významnosti 0.05.

c) Test provedeme pomocí p-hodnoty.

$$p = \Pr(T_0 \leq t_0) = \Phi(-1.7773) = 0.0378$$

```
pval <- pnorm(t0)
```

Jelikož  $0.0378 \leq 0.05$ , nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0.05.

## Testování normality

- Normalita = nepostradatelný předpoklad parametr. testů (jednovýběrových, párových, dvouvýběrových, ...)
- Testování normality
  - $H_0$ : Data pochází z normálního rozd.
  - $H_1$ : Data nepochází z normálního rozd.
- Testy normality
  - Shapiro-Wilkův test `shapiro.test()`
  - Lillie-Forsův test `lillie.test()` [nortest]
  - Anderson-Darlingův test `ad.test()` [nortest]
- výstup testů =  $p$ -hodnota:  $p > \alpha \rightarrow H_0$  nezamítáme;  $p \leq \alpha \rightarrow H_0$  zamítáme
- grafické ověření normality:
  - Q-Q plot `qqnorm` a `qqline`.

## Párový test:

- porovnání rozdílů párových součástí objektu, párových orgánů člověka
- porovnání délky uší, výšky/šířky nadočnicového oblouku, zkoumání podobných rysů dvojčat apod.
- Nechtě  $(X_1, Y_1) \dots (X_n, Y_n)$  je náh. výběr z dvourozměrného norm. rozd., přičemž  $n \geq 2$ . Střední hodnota znaku X je  $\mu_1$ , střední hodnota znaku Y je  $\mu_2$ .
- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$
- $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \rightarrow \mu_1 - \mu_2 \neq 0$
- utvoříme rozdíly  $Z_1 = X_1 - Y_1, \dots, Z_n = X_n - Y_n$ .
- $Z_1, \dots, Z_n$  je náh. výběr z norm. rozdělení  $\rightarrow$  jednovýběrový test o  $\mu$ , když  $\sigma^2$  neznáme.