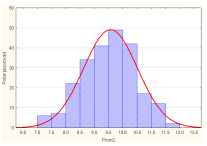


MASARYKOVA UNIVERZITA
Z1069 Statistické metody a zpracování dat
III. Pravděpodobnost, teoretická rozdělení



K čemu je to dobré?



- Popisné a průzkumové metody umožňují přehledně shrnout informaci, které se týkají jen objektů měřených či pozorovaných.
- Činíme závěry pouze z určitého zpracovávaného souboru – **výběrového**, popisujeme jen to, co bylo zjištěno, naměřeno.
- S popisnou statistikou často nevystačíme, potřebujeme činit **zobecňující úsudky**.

Příklady:

- Jak často se taková povodeň může opakovat?
- Jakou hodnotu měřené veličiny nejpravděpodobněji získáme opakovaným měřením?
- Je vysoký počet dvojčat narozených v určitém okrese „normální“?
- Je rozdíl mezi dvěma jevy významný?

Náhodný jev, náhodná proměnná

Přírodní či společenské jevy mohou mít povahu jevů

- **deterministických**
- **náhodných**

Náhodný jev - za určitého souboru podmínek může nastat jeden z množiny výsledků, který závisí nejen na vstupních podmínkách, ale obsahuje i **prvek náhody** (tahání karet, měření teploty vzduchu, ...).

Náhodná proměnná – proměnná, u které nelze na základě určité zákonitosti předem stanovit její konkrétní hodnotu.

- **Spojité** – může nabývat jakékoliv hodnoty z určitého intervalu (teplota vzduchu)
- **Diskrétní** – může nabývat pouze konkrétních hodnot (házání kostkou, pohlaví narozeného dítěte)

Pravděpodobnost

- Vyjadřuje míru nejistoty, s jakou určitý náhodný jev může nastat.
- Vyjadřuje míru nejistoty s jakou může náhodná veličina nabývat určité hodnoty
- **Ve statistice tuto míru nejistoty (pravděpodobnost) můžeme kvantifikovat.**

- Řada jevů a procesů studovaných v geografických disciplínách má charakter **náhodné proměnné**, má **pravděpodobnostní charakter** (mohou nastat s určitou pravděpodobností) – např. výsledky prognóz (demografie, meteorologie apod.)
- Použití teorie pravděpodobnosti (např. pro testování, odhady) vyžaduje data získaná náhodným výběrem (náhodné proměnné).

Pravděpodobnost



- Pravděpodobnost jako vyjádření míry nejistoty o výskytu náhodného jevu, o výsledku náhodného jevu.
- Pravděpodobnost, že nastane určitý náhodný jev se pohybuje v intervalu $<0,1>$ resp. $<0,100>$ %.
- **Jev možný** – množina všech možných výsledků - náhodný jev
- **Jev jistý** – padne něco mezi 1 až 6
- **Jev nemožný** – padne 7
- **Jev elementární** – padne 6
- **Jev složený** – více možných výsledků (padne sudé číslo)

Pravděpodobnost

$P(A)$ - Určení pravděpodobnosti P , s jakou náhodný jev A nastane, můžeme povést dvěma způsoby:

1. Určení pravděpodobnosti „a priori“:
 Podíl počtu požadovaných výsledků a počtu všech možných výsledků:
 Příklad: S jako pravděpodobností padne při házení kostkou šestka:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

A – jev který sledujeme
 $P(A)$ – pravděpodobnost jevu A
 m - Počet požadovaných výsledků
 n – počet všech možných výsledků

V našem případě: $P(A=6)$: $m=1$ (šestku můžeme hodit jen jedním způsobem), $n=6$ (může padnout 6 různých čísel), tedy:

$$P(A = 6) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6} = 0,1667$$

Pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne šestka je 16,67%

Pravděpodobnost

2. Určení pravděpodobnosti „a posteriori“:

Pomocí relativní četnosti výskytu studovaného jevu:

$$P(A) = \frac{n_i}{n}$$

n_i – počet požadovaných výsledků, které nastaly při realizaci jevu (absolutní četnost)

n – celkový počet pokusů (rozsah souboru)

Příklad: Z deseti hodů kostkou ($n=10$) jsme získali následující výsledky: 2,4,6,1,6,3,5,6,2,1. Spočteme frekvenci výskytu jednotlivých výsledků a následně relativní četnost výsledku, při kterém padla šestka, tedy počet případů příznivých jevu A k počtu případů možných.

$$P(A = 6) = \frac{n_i}{n} = \frac{3}{10} = 0,3$$

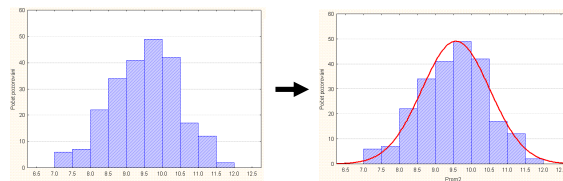
Empiricky zjištěná pravděpodobnost, že padne 6 je 30%.

Obě pravděpodobnosti se liší. Čím více **realizací náhodného pokusu provedeme**, tím si budou výsledky blížit, pro $n \rightarrow \infty$ budou shodné.

Rozdělení náhodné proměnné

Každému výsledku náhodného jevu či procesu přísluší určitá pravděpodobnost.

Můžeme určit s jakou pravděpodobností náhodný jev nabývá určité výsledné hodnoty či hodnoty z určitého intervalu.



Konstruujeme model umožňující zobecnění našich poznatků o chování hromadných náhodných jevů – **teoretické rozdělení pravděpodobnosti**

Teoretická rozdělení – základní pojmy

Teoretická rozdělení ve statistice charakterizujeme:

1. průběhem frekvenční a distribuční funkce
2. parametry rozdělení

1. Pro diskretní náhodnou proměnnou konstruujeme:

- rozdělení pravděpodobnosti diskretní náhodné proměnné (**frekvenční funkci**)
- **distribuční funkci** diskretní náhodné proměnné

Pro spojitou náhodnou proměnnou konstruujeme:

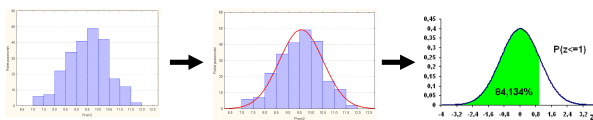
- hustotu pravděpodobnosti spojitě náhodné proměnné (**frekvenční funkci**)
- **distribuční funkci** spojitě náhodné proměnné

2. Parametry rozdělení – čísla (statistiky)

Neznámé hodnoty základních statistických charakteristik základního souboru, které můžeme jen **odhadnout** z charakteristik výběrových

Výběrový soubor	→	Základní soubor
\bar{x}		μ
s^2		σ^2

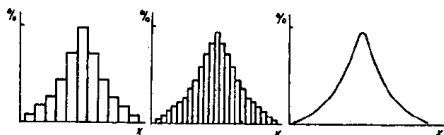
Teoretická rozdělení pravděpodobnosti



Rozdělení pravděpodobnosti $f(x)$ náhodné proměnné X je funkce $f(x)$, která každé hodnotě X přiřazuje určitou pravděpodobnost $p(x)$, se kterou tato nabývá konkrétní velikosti.

Teoretická rozdělení spojitě náhodné veličiny

K tzv. **frekvenční funkci** $f(x)$. Můžeme dospět jednoduše z histogramu relativních četností



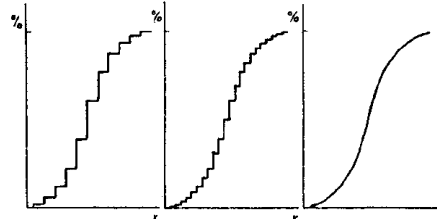
Frekvenční funkce $f(x)$ představuje teoretické rozdělení četností základního souboru o parametrech μ, σ .

Cíl – nahradit výběrové soubory základními a pro ně odvozovat potřebné charakteristiky

(Příklad - hodnocení stupně normality výskytu určitých hodnot – povodně)

Teoretická rozdělení spojitě náhodné veličiny

Analogicky lze ze součtové čáry definovat tzv. **distribuční funkci** $F(x)$.



Distribuční funkce udává pravděpodobnost, se kterou náhodná proměnná nabývá hodnoty menší nebo rovné určité konkrétní velikosti x .

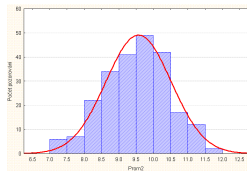
$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Normální rozdělení

- Nejčastěji používané rozdělení spojité náhodné veličiny
- Opakované měření stejné veličiny za stejných podmínek
- Naměřené veličiny více méně kolísají kolem skutečné hodnoty
- Má dva parametry μ , σ

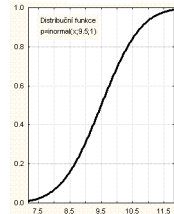
Frekvenční funkce:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

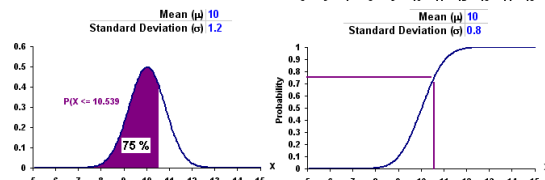
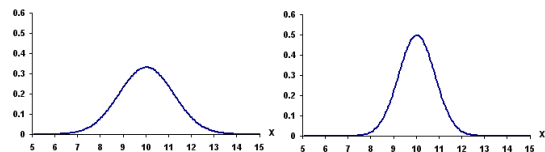


Distribuční funkce:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$



Normální rozdělení



Normované normální rozdělení

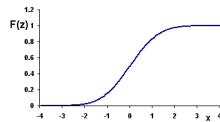
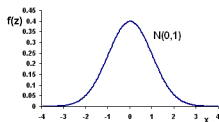
Protože se μ i σ výběr od výběru liší, má i frekvenční funkce (normální křivka) různý tvar. Proto se zavádí tzv. **normovaná náhodná proměnná**

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Normované normální rozdělení již potom nezáleží na parametrech μ i σ a jeho frekvenční a distribuční funkce mají následující tvar:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



Normované normální rozdělení

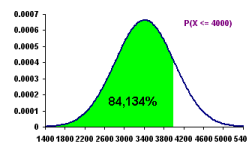
Pro hodnoty distribuční funkce $F(x)$ normálního rozdělení $N[\mu, \sigma]$ a hodnoty distribuční funkce $F(z)$ normovaného normálního rozdělení $N[0,1]$ platí:

$$\text{Jestliže } z_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} \text{ potom } F(x_0) = F(z_0)$$

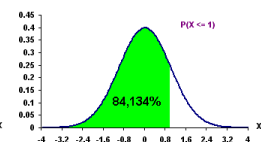
Obsahy ploch pod křivkami hustoty navzájem si odpovídajících si hodnot $F(x_0) = F(z_0)$ jsou stejné (a tedy stejné jsou i pravděpodobnosti výskytu těchto hodnot). Například:

$$\text{Protože } z_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} = \frac{4000 - 3400}{600} = 1 \text{ potom } P(x \leq 4000) = P(z \leq 1) = 0,84134$$

$N[3400,600]$, $x_0 = 4000$

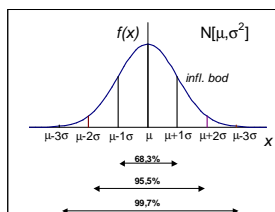


$N[0,1]$, $x_0 = 1$



Hlavní vlastnosti normální křivky

- zvonovitý tvar, asymptoticky se blíží k ose x, může nabývat hodnot $-\infty$ až $+\infty$
- souměrná podle osy procházející jejím vrcholem. x-ová souřadnice vrcholu je aritmetickým průměrem
- aritmetický průměr, medián a modus se rovnají
- s osou x omezuje normální křivka plochu o velikosti 100 % (1)

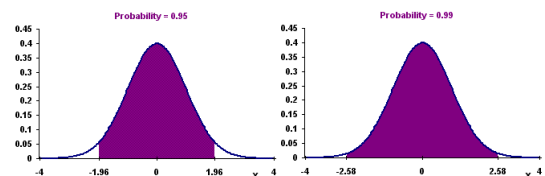


Pomocí násobků směrodatné odchylky lze stanovit pravděpodobnosti, s nimiž leží hodnoty v určitém intervalu:

Vlastnosti normální křivky

a naopak

- 95% pravděpodobnosti odpovídá interval $\mu \pm 1,96\sigma$
- 99% pravděpodobnosti odpovídá interval $\mu \pm 2,58\sigma$



Stanovení mezí extremity

Slovní označení extremity	Symbol	Meze	Pravděpodobnost výskytu jevu (%)	Meze	Pravděpodobnost výskytu jevu (%)
extrémně podnormální	EP	$\bar{x}-3s$	0,135	$\bar{x}-3c$	2,15
silně podnormální	SP	$\bar{x}-2s$ až $\bar{x}-2a$	2,190	$\bar{x}-2c$ až $\bar{x}-2c$	8,87
podnormální	P	$\bar{x}-s$ až $\bar{x}-a$	13,590	$\bar{x}-c$ až $\bar{x}-c$	13,98
normální	O	\bar{x} až $\bar{x}+s$	68,270	$\bar{x}+c$ až $\bar{x}+c$	50,00
nadnormální	N	$\bar{x}+s$ až $\bar{x}+2s$	13,590	$\bar{x}+c$ až $\bar{x}+2c$	13,98
silně nadnormální	SN	$\bar{x}+2s$ až $\bar{x}+3s$	2,190	$\bar{x}+2c$ až $\bar{x}+3c$	8,87
extrémně nadnormální	EN	$\bar{x}+3s$	0,135	$\bar{x}+3c$	2,15

c = tzv. pravděpodobná chyba: $c = 0,6745s$

Příklad použití

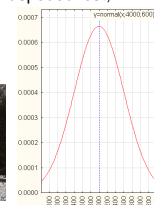
- Pro danou hodnotu jevu hledáme pravděpodobnost jejího výskytu
- Pro zadanou pravděpodobnost hledáme hodnotu studovaného jevu.

Dvě možnosti výpočtu

- převod na normované normální rozdělení a využití statistických tabulek
- pomocí sw modelujícího hodnoty $f(x)$ a $F(x)$ příslušného rozdělení

Příklad: Plochu obhospodařované zemědělské půdy u sledovaného souboru farmářů modelujeme normálním rozdělením. Zjistili jsme, že parametry rozdělení $N[3400 \text{ m}^2, 600 \text{ m}^2]$. Vypočtete pravděpodobnost, že náhodně vybraný zemědělec bude mít:

- méně než 4000 m² půdy
- více než 4200 m² půdy
- méně než 3000 m² půdy
- mezi 2800 a 4000 m² půdy



Příklad řešení při použití tabulek distribuční funkce normovaného normálního rozdělení

Tables of the Normal Distribution

Probability Content from -∞ to Z

<http://www.math.unb.ca/~dnight/utility/NormalDist.htm>

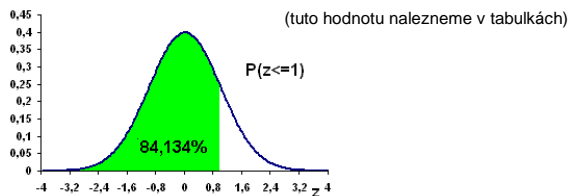
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817

Ad a) Farmář má méně než 4000 m² půdy

Transformace hodnoty x na normovanou veličinu z (z-skóre):

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{4000 - 3400}{600} = 1$$

Můžeme psát: $P(x \leq 4000) = P(z \leq 1) = 0,84134$



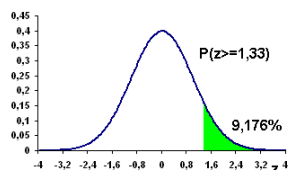
Ad b) Farmář má více než 4200 m² půdy

Transformace hodnoty x na normovanou veličinu z (z-skóre):

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{4200 - 3400}{600} = 1,33$$

Pravděpodobnost, že normovaná proměnná překročí hodnotu 1,33 v tabulkách není. Určujeme obsah plochy pod křivkou hustoty rozdělení za hodnotou 1,33:

$$P(x \geq 4200) = P(z \geq 1,33) = 1 - P(z \leq 1,33) = 1 - 0,90824 = 0,09176$$



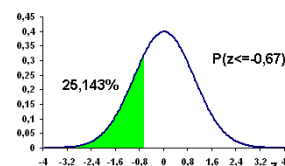
Ad c) Farmář má méně než 3000 m² půdy

Transformace hodnoty x na normovanou veličinu z (z-skóre):

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{3000 - 3400}{600} = -0,67$$

Pravděpodobnost $P(z \leq -0,67)$ určíme na základě symetrie normovaného normálního rozdělení, platí tedy:

$$P(z \leq -0,67) = P(z \geq 0,67) = 1 - P(z \leq 0,67) = 1 - 0,74857 = 0,25143$$



Ad d) Farmář má mezi 2800 a 4000 m² půdy

Transformace hodnoty x na normovanou veličinu z (z-skóre):

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{2800 - 3400}{600} = -1 \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{4000 - 3400}{600} = 1$$

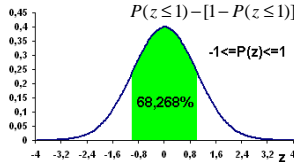
Placha mezi hodnotami 2800 a 4000 m² u rozdělení $N(3400, 600)$ je stejná jako placha mezi hodnotami -1 a 1 u rozdělení $N(0, 1)$.

$$P(2800 \leq x \leq 4000) = P(-1 \leq z \leq 1)$$

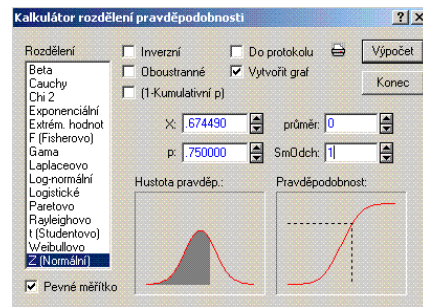
Od plochy před hodnotu 1 odečteme plochy před hodnotou -1, tedy:

$$P(-1 \leq z \leq 1) = P(z \leq 1) - P(z \leq -1) =$$

$$P(z \leq 1) - [1 - P(z \leq 1)] = 0,84134 - [1 - 0,84134] = 0,68268$$



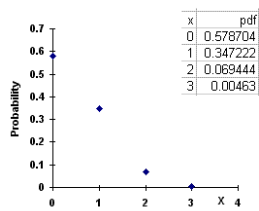
Řešení při použití pomoci sw modelujícího hodnoty $f(x)$ a $F(x)$ příslušného rozdělení



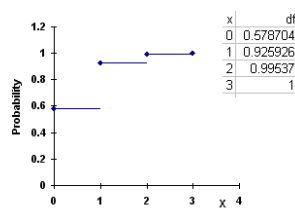
STATISTICA – Pravděpodobnostní kalkulátor

Rozdělení diskrétní náhodné proměnné

Příklad: Třikrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že šestka nepadne, že padne jednou, dvakrát, třikrát?



Rozdělení pravděpodobnosti



Distribuční funkce

Binomické rozdělení

Rozdělení diskrétní náhodné proměnné. Udává rozdělení výsledků jednoho a téhož pokusu za stejných podmínek, kdy výsledkem pokusu mohou být pouze dvě alternativy A nebo B .

Pravděpodobnost, že nastane alternativa A značíme p , pravděpodobnost, že nastane alternativa B značíme q .

Přitom platí: $p + q = 1$

Pokus provedeme n -krát a hledáme pravděpodobnost, že alternativa A nastane právě x -krát. Výpočet této pravděpodobnosti určuje výraz:

$$f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

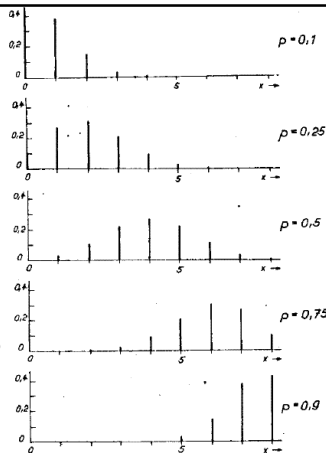
Uvedený vztah vyjadřuje rozdělení pravděpodobností binomického rozdělení (analogie frekvenční funkce u spojitych veličin).

Binomické rozdělení

U binomického rozdělení nabývá náhodná veličina diskrétních hodnot od 0 do n .

Rozdělení pravděpodobnosti binomického rozdělení pro $n=8$ a různé hodnoty pravděpodobnosti p

Je-li $p = q = 0,5$, potom je binomické rozdělení souměrné



Základní momenty binomického rozdělení

$$\mu = n \cdot p \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \quad \alpha = \frac{1-2p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \quad \varepsilon = \frac{1-6p \cdot q}{n \cdot p \cdot q}$$

Příklady použití binomického rozdělení

- rozdělení počtu dní s určitým meteorologickým jevem za měsíc
- pravděpodobnost narození dvou chlapců v rodinách se třemi dětmi
- pravděpodobnost pozdního příchodu na jednu ze 12 přednášek ze statistiky

Binomické rozdělení

Příklad: Pravděpodobnost, že se v určitém roce vyskytne na studovaném toku povodeň je 0,25. Jaká je pravděpodobnost, že se během příštích čtyř let vyskytnou 3 povodně?



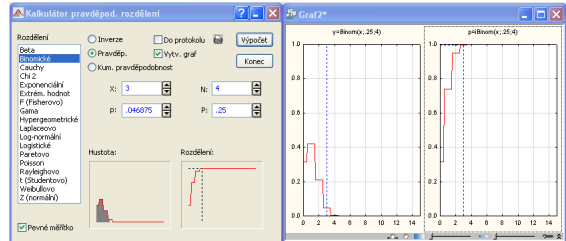
- každý rok je nezávislý „pokus“
- každý rok se povodeň může vyskytnout či nemusí
- pravděpodobnost výskytu povodně $p=0,25$
- pro 4 roky ($n=4$) hledáme pravděpodobnost výskytu tří povodní ($x=3$)

$$f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{4}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^{4-3} = 0,0469$$

Pravděpodobnost výskytu tří povodní ve 4 rocích je necelých 5 procent.

Binomické rozdělení

řešení příkladu z programu Statistica – Pravděpodobnostní kalkulator



Poissonovo rozdělení

Popisuje pravděpodobnost výskytu **vzácných jevů**. Je vhodné v případech, kdy p v binomickém rozdělení je příliš malé nebo naopak příliš blízké 1.

Náhodná veličina s Poissonovým rozdělením může nabývat hodnot $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ (kolikrát jev nastal v určitém časovém úseku) a to s rozdělením pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

Pro aritmetický průměr a rozptyl platí: $\mu = \sigma^2 = \lambda$

kde lambda (λ) je očekávaná hodnota a jediný parametr Poissonova rozdělení:

$$\lambda = n \cdot p$$

Označuje se jako rozdělení vzácných případů (bouřky v zimě, výskyt krupobítí v roce, ...). Jeho použití se doporučuje, pokud $n > 30$ (resp. 50) a $p \leq 0,1$ nebo $p \geq 0,9$.

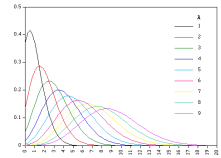
Poissonovo rozdělení

Použití tohoto rozdělení lze charakterizovat následujícími vlastnostmi:

1. Pravděpodobnost výskytu jedné události v daném intervalu (čase nebo prostoru) je úměrná délce tohoto intervalu.
2. Události se vyskytují nezávisle jak ve stejném intervalu, tak mezi po sobě jdoucími intervaly.
3. Událost může nastat v kterémkoliv okamžiku
4. Výskyt dvou či většího počtu událostí během krátkého časového okamžiku (ale i v malém prostoru) je prakticky nemožný

Použití:

- počet dětí ztracených v obchodním domě v určité časovém úseku
- počet telefonních hovorů v určitém časovém úseku
- počet borovic na jednotku plochy smíšeného lesa



S rostoucí hodnotou λ se tvar tohoto rozdělení blíží normálnímu

Poissonovo rozdělení - příklad



Průměrný počet těžkých dopravních nehod na určité křižovatce za měsíc je 5. Rozdělení četností nehod modelujeme Poissonovým rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že počet nehod bude **více než 4**.

- Rozdělení četností nehod obecně pro $x = 0, 1, 2, 3, 4$ má tvar:

$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = \frac{5^x \cdot e^{-5}}{x!}$$

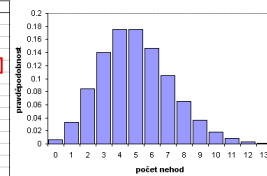
- Vypočteme pravděpodobnosti $f(x)$ pro jednotlivá x : $f(0), \dots, f(4)$
- Součet těchto pravděpodobností je 0,44
- Hledaná pravděpodobnost – tedy že počet nehod přesáhne 4:

$$1 - 0,44 = 0,56$$

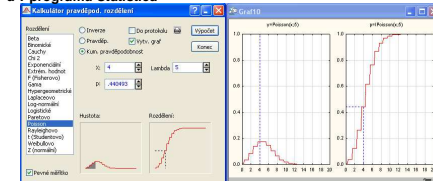
Poissonovo rozdělení – příklad řešený

v programu EXCEL

x	pdf	cdf
0	0.007	0.007
1	0.034	0.040
2	0.084	0.125
3	0.140	0.265
4	0.175	0.440
5	0.175	0.616
6	0.146	0.762
7	0.104	0.867
8	0.065	0.932
9	0.036	0.968
10	0.018	0.986
11	0.008	0.995
12	0.003	0.998
13	0.001	0.999



a v programu Statistica



Výsledek:

$$1 - 0,44 = 0,56$$

Rozdělení CHÍ - kvadrát χ^2

Ze základního souboru s normovaným normálním rozdělením provedeme náhodný výběr n prvků, které označíme x_1, x_2, \dots, x_n . Součet čtverců těchto hodnot se označuje jako χ^2 („chí – kvadrát“):

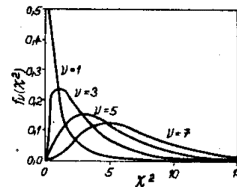
$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \chi^2$$

Hodnota χ^2 může nabývat v různých výběrech různých hodnot v intervalu $(0; \infty)$ a má své vlastní rozdělení - rozdělení s vlastní frekvenční ($f_v(\chi^2)$) a distribuční funkcí ($F_v(\chi^2)$)

Symbol ν značí počet stupňů volnosti a je jediným parametrem rozdělení. Je roven rozsahu náhodného výběru.

Každé hodnotě $\nu = n$ přísluší jiná křivka. S rostoucím ν se rozdělení blíží rozdělení normálnímu.

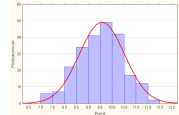
Rozdělení CHÍ - kvadrát χ^2



Frekvenční funkce chí-kvadrát rozdělení pro různý počet stupňů volnosti

Použití:

- v teorii odhadu a testování hypotéz
- při ověřování předpokladu zda empirické rozdělení četností má určité teoretické pravděpodobnosti rozdělení
- testování rozptylu dvou výběrových souborů při neznámé střední hodnotě
- při ověřování nezávislosti kvalitativních znaků
- pro testy nezávislosti v kontingenčních tabulkách.



Rozdělení t (Studentovo)

Využívá se především pro hodnocení odchylek hodnot aritmetického průměru základního souboru μ a aritmetického průměru výběrového souboru \bar{x} .

Pro hodnocení odchylek $(\bar{x} - \mu)$ se definuje náhodná veličina

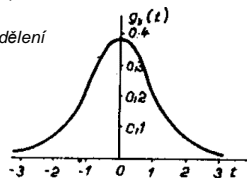
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n-1}$$

Této přísluší tzv. *t-rozdělení* (Studentovo). Spojitá náhodná veličina t může nabývat hodnot $(-\infty; \infty)$. Frekvenční funkce $q_\nu(t)$ je souměrná podle osy procházející vrcholem a má jeden parametr $\nu = n - 1$.

S rostoucím počtem stupňů volnosti se *t-rozdělení* blíží rozdělení normálnímu.

Teoreticky se shodují při $\nu = \infty$.

V praxi však postačuje $\nu > 30$.

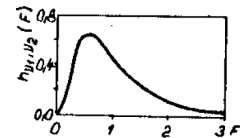


Rozdělení F (Fisherovo-Snedecorovo)

Uvažujeme dvě nezávislé náhodné veličiny, které mají χ^2 rozdělení s ν_1 a ν_2 stupni volnosti. Veličina F , určená jako jejich poměr

$$F = \frac{\chi_1^2}{\nu_1} : \frac{\chi_2^2}{\nu_2}$$

má tzv. *F-rozdělení*.



Jak je patrné z obrázku, náhodná veličina F nabývá pouze kladných hodnot.

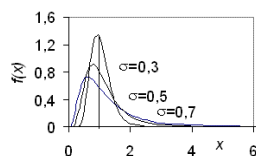
Frekvenční funkce $h_{\nu_1, \nu_2}(F)$ je nesymetrická s dvěma parametry ν_1 a ν_2

Používá se u testů v regresní analýze, při analýze rozptylu a při testu shody rozptylů dvou výběrů z normálního rozdělení.

Lognormální rozdělení

Proměnná X má lognormální rozdělení pravděpodobností, když logaritmickou transformací ($Y = \ln X$) získá právě rozdělení normální s parametry μ a σ^2 .

Frekvenční funkce log-normálního rozdělení: $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$



Příklady:

- rozdělení věku obyvatelstva v populaci
- koncentrace stopových prvků v horninách (stopová analýza),

Další v geografii využívaná teoretická rozdělení

- Gama rozdělení
- Gumbelovo rozdělení
- GEV (General Extreme Value)





Pearsonova křivka III. typu

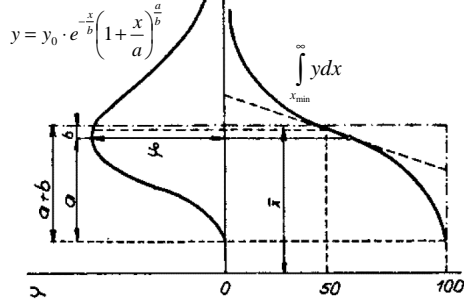
- Na řadu souborů geografických údajů nelze aplikovat normální rozdělení.
- Je to v případech, že studovaná veličina nemá teoreticky zdůvodněnou možnost nabývat nekonečných hodnot či je omezena z obou stran konečnými čísly.
- V těchto případech lze často využít některé z 12 křivek Pearsonovy systému.
- Především v meteorologii, klimatologii či hydrologii se ke konstrukci tzv. čar překročení využívá Pearsonovy křivky III. typu.

Průběh křivky je určen třemi parametry:

- aritmetickým průměrem
- variačním koeficientem
- koeficientem asymetrie

Pearsonova křivka III. typu

Tvar rovnice:



Hodnota y_0 značí největší pořadnici křivky a odpovídá modu rozdělení. b – vzdálenost pořadnice procházející aritmetickým průměrem od y_0 , a – vzdálenost y_0 od počátku křivky.

Čára překročení

Čára překročení je součtová čára četností a lze z ní stanovit pravděpodobnost, se kterou bude znak určité hodnoty dosažený a překročený (či nebude dosažený).

Ke konstrukci čáry překročení musíme znát tři parametry:

Spočteme aritmetický průměr

Označíme-li $\frac{x_i}{\bar{x}} = k_i$ potom variační koeficient bude: $v = \sqrt{\frac{\sum (k_i - 1)^2}{n-1}}$

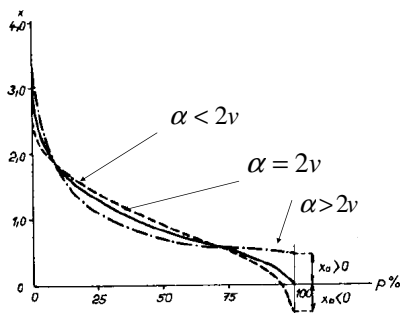
Koeficient asymetrie je roven $\alpha = \frac{2b}{v}$ a nebo $\alpha = \frac{\sum (k_i - 1)^3}{(n-1) \cdot v^3}$

a nebo $\alpha = 2v$

Uvedená podmínka je často nutná pro fyzikálně zdůvodnitelné výsledky

Čára překročení

Tvar čáry překročení pro různá α



Konstrukce čáry překročení I

1) Seřadíme hodnoty R_i v klesajícím pořadí

2) Vypočteme aritmetický průměr \bar{R}

3) Stanovíme hodnoty $k_i = \frac{R_i}{\bar{R}}$

4) Vypočteme výrazy $(k_i - 1)$, $(k_i - 1)^2$, $(k_i - 1)^3$ a jejich sumy

5) Vypočteme hodnoty variačního koeficientu v a koeficientu asymetrie α

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	Pořadí	Rok	R_i	k_i	$k_i - 1$	$(k_i - 1)^2$	$(k_i - 1)^3$	m	$P\%$	P_c	T
2	1	1981	90,0	2,662	1,662	2,762	4,590	1	1,78	0,02	56
3	2	1977	86,5	1,967	0,967	0,936	0,904	2	4,31	0,04	23
4	3	1979	82,5	1,849	0,849	0,720	0,611	3	6,85	0,07	15
5	4	1996	51,5	1,523	0,523	0,274	0,143	4	9,39	0,09	11
6
7
8	36	1988	19,6	0,580	-0,420	0,177	-0,074	36	90,61	0,91	1
9	37	1976	19,2	0,568	-0,432	0,187	-0,081	37	93,15	0,93	1
10	38	1990	18,4	0,544	-0,456	0,208	-0,095	38	95,69	0,96	1
11	39	1994	15,9	0,470	-0,530	0,281	-0,149	39	98,22	0,98	1

pravděpodobnost překročení $P_c = \frac{m - 0,3}{n + 0,4}$

$T = \frac{1}{P_c}$
doba opakování

$v = \sqrt{\frac{\sum (k_i - 1)^2}{n-1}} = 0,447$ $\alpha \approx 2v = 0,90$

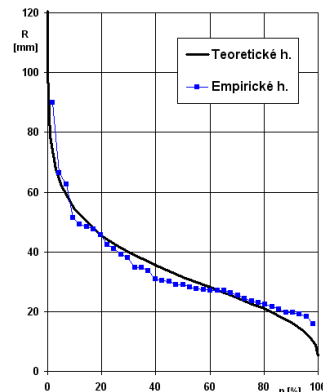
Konstrukce čáry překročení II

- Pro jednotlivé hodnoty pravděpodobnosti překročení p a pro vypočtenou hodnotu koeficientu asymetrie α vypočteme pomocí tabelovaných hodnot E pro případ $v = 1$ pořadnice čáry překročení – teoretické hodnoty R .
- Každé hodnotě R odpovídá určité p a určitá doba opakování (T)

Pravděpodobnosti překročení pro koeficient asymetrie 0,9

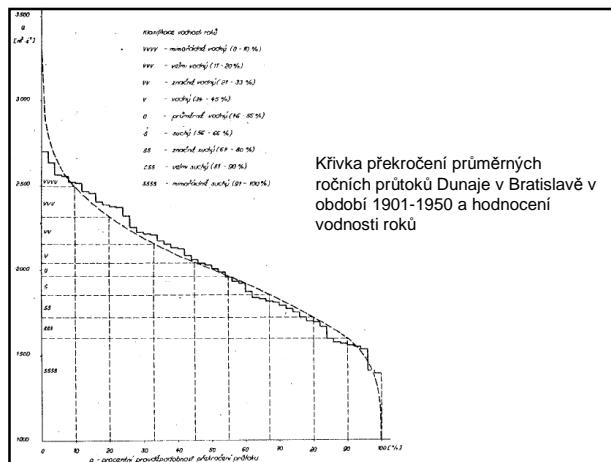
P	E (E ^v +1)	R	T
0.01	5.73	3.56	120.52
0.1	4.39	2.96	100.09
1	2.96	2.32	78.60
3	2.22	1.93	67.41
5	1.86	1.83	61.96
10	1.34	1.60	54.09
20	0.77	1.34	45.46
25	0.57	1.26	42.44
30	0.40	1.18	39.86
40	0.11	1.05	35.47
50	-0.15	0.93	31.54
60	-0.39	0.83	28.06
70	-0.61	0.73	24.58
75	-0.73	0.67	22.76
80	-0.85	0.62	20.95
90	-1.15	0.49	16.41
95	-1.35	0.40	13.36
97	-1.47	0.34	11.56
99	-1.68	0.26	8.69
99.9	-1.90	0.15	5.06
100			1.00

Konstrukce čáry překročení III



Hodnocení extremity jevu na základě procenta pravděpodobnosti překročení určeného z čáry překročení:

Pravděpodobnost	Je v je	Symbol
0 - 10	extrémně nadnormální	EN
11 - 20	velmi silně nadnormální	VN
21 - 33	silně nadnormální	SN
34 - 45	nadnormální	N
46 - 55	normální	O
56 - 67	podnormální	P
68 - 80	silně podnormální	SP
81 - 90	velmi silně podnormální	VP
91 - 100	extrémně podnormální	EP



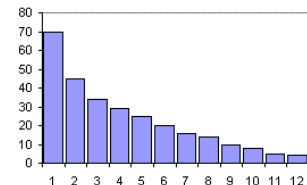
Křivka překročení průměrných ročních průtoků Dunaje v Bratislavě v období 1901-1950 a hodnocení vodnosti roků

Řešení při použití pomocí sw modelujícího hodnoty $f(x)$ a $F(x)$ příslušného rozdělení

EXCEL – soubor XL_Stat.rar – viz. studijní materiály v IS

Asymetrická rozdělení

- vzdálenosti na které se lidé stěhují, cestují na dovolenou, do práce ...
- osobní příjmy
- vzdálenost dojíždky



Většina těchto rozdělení má kladnou asymetrii

Nalezněte příklady pro rozdělení se zápornou asymetrií (!)

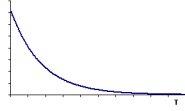
Jak lze charakterizovat rozdělení takových veličin jako:

- počet členů domácnosti
- četnost zaměstnanců podle průměrné měsíční mzdy

Exponenciální rozdělení

Frekvenční funkce $f(x)$ má následující tvar a její sklon klesá s rostoucí hodnotou x

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{pro } x \geq 0$$



Rozdělení má jeden parametr (λ), jeho velké hodnoty indikují velký sklon frekvenční funkce a naopak.

Hodnoty pravděpodobnosti lze určovat přímo z distribuční funkce:

$$F(x) = p(X < x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Očekávaná hodnota průměru je $1/\lambda$, a očekávaná hodnota rozptylu $1/\lambda^2$. Z očekávané hodnoty průměru potom lze určit hodnotu parametru (λ).

Hodláme-li výběrovým souborem, který má silně pozitivní asymetrii proložit exponenciální rozdělení, určíme průměrnou hodnotu výběrového souboru a parametr rozdělení λ bude jeho převrácenou hodnotou.

Exponenciální rozdělení - příklad

40 studentů dojíždí do školy z průměrné vzdálenosti 7 km. Histogram hodnot vzdálenosti vykazuje pozitivní asymetrii. Hodnota parametru exponenciálního rozdělení bude $\lambda = 1/7 = 0,143$. Jaká je pravděpodobnost, že student dojíždí ze vzdálenosti 15 km a delší?

Exponential Distribution (for a variable T)

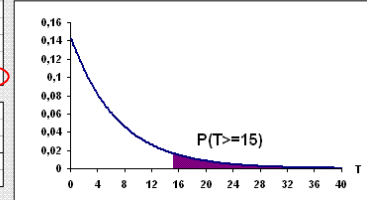
Parameters
Failure Rate (λ) 0,143

Probability
Value of Variable (t) = 15

$P(T = t) = 0$
 $P(0 \leq T \leq t) = 0,88293$
 $P(T \geq t) = 0,11707$

Inverse Probability

$P(T \leq t) = 0,95$
 $t = 20,9492$
 $P(T \geq t) = 0,05$
 $t = 20,9492$



Exponenciální rozdělení - příklad

Zadání – viz. předchozí příklad

Řešení v programu Statistica – Pravděpodobnostní kalkukátor

Beta rozdělení U - rozdělení

α, β – parametry tvaru rozdělení

A, B – dolní a horní mez

Beta Distribution (for a variable X)

Parameters
Alpha (α) 0,5
Beta (β) 0,5
A 0
B 1

Probability
Value of Variable (x) = 0,5

$P(X = x) = 0$
 $P(X \leq x) = 0,5$
 $P(X \geq x) = 0,5$

