Analýza a klasifikace dat – přednáška 2

RNDr. Eva Koriťáková, Ph.D.

Podzim 2017

Typy klasifikátorů – podle reprezentace vstupních dat

1. **Podle reprezentace vstupních dat:**
   - **příznakové klasifikátory:** paralelní (s pevným počtem proměnných) x sekvenční
   - **strukturální (syntaktické) klasifikátory**
   - **kombinované klasifikátory**
2. **Podle jednoznačnosti zařazení do skupin:**
   - **deterministické klasifikátory**
   - **pravděpodobnostní klasifikátory**
3. **Podle typů klasifikačních a učících algoritmů:**
   - **parametrické klasifikátory**
   - **neparametrické klasifikátory**
4. **Podle způsobu učení:**
   - **učení s učitelem:** dokonalým x nedokonalým
   - **učení bez učitele**
5. **Podle principu klasifikace:**
   - **klasifikace pomocí diskriminačních funkcí**
   - **klasifikace pomocí vzdálenosti od etalonů klasifikačních tříd**
   - **klasifikace pomocí hranic v obrazovém prostoru**

Typy klasifikátorů – podle reprezentace vstupních dat

1. **Podle reprezentace vstupních dat:**
   - **příznakové klasifikátory:** paralelní (s pevným počtem proměnných) x sekvenční
   - **strukturální (syntaktické) klasifikátory**
   - **kombinované klasifikátory**

2. **Podle jednoznačnosti zařazení do skupin:**
   - **deterministické klasifikátory**
   - **pravděpodobnostní klasifikátory**

3. **Podle typů klasifikačních a učících algoritmů:**
   - **parametrické klasifikátory**
   - **neparametrické klasifikátory**

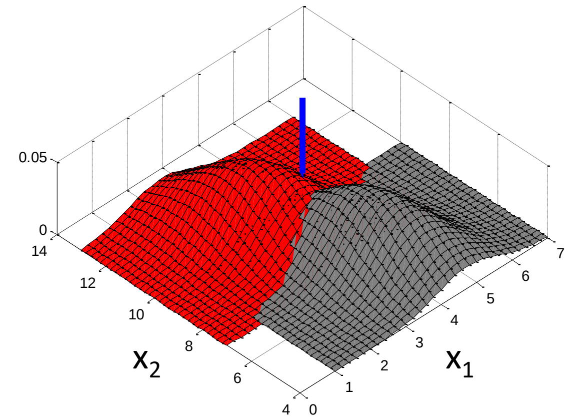
4. **Podle způsobu učení:**
   - **učení s učitelem:** dokonalým x nedokonalým
   - **učení bez učitele**

5. **Podle principu klasifikace:**
   - **klasifikace pomocí diskriminačních funkcí**
   - **klasifikace pomocí vzdálenosti od etalonů klasifikačních tříd**
   - **klasifikace pomocí hranic v obrazovém prostoru**

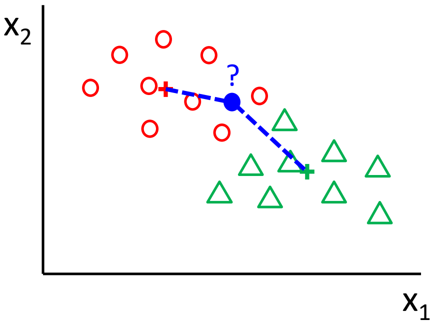
→ budeme se věnovat paralelním příznakovým klasifikátorům

Typy klasifikátorů – podle principu klasifikace

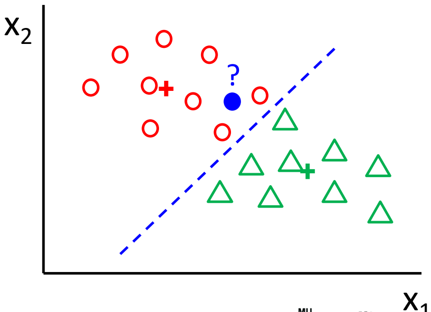
- **klasifikace pomocí diskriminačních funkcí:**
  - diskriminační funkce určují míru příslušnosti k dané klasifikační třídě
  - pro danou třídu má daná diskriminační funkce nejvyšší hodnotu



- **klasifikace pomocí vzdálenosti od etalonů klasif. tříd:**
  - etalon = reprezentativní objekt(y) klasifikační třídy
  - počet etalonů klasif. třídy různý – od jednoho vzorku (např. centroidu) po úplný výčet všech objektů dané třídy (např. u klasif. pomocí metody průměrné vazby)



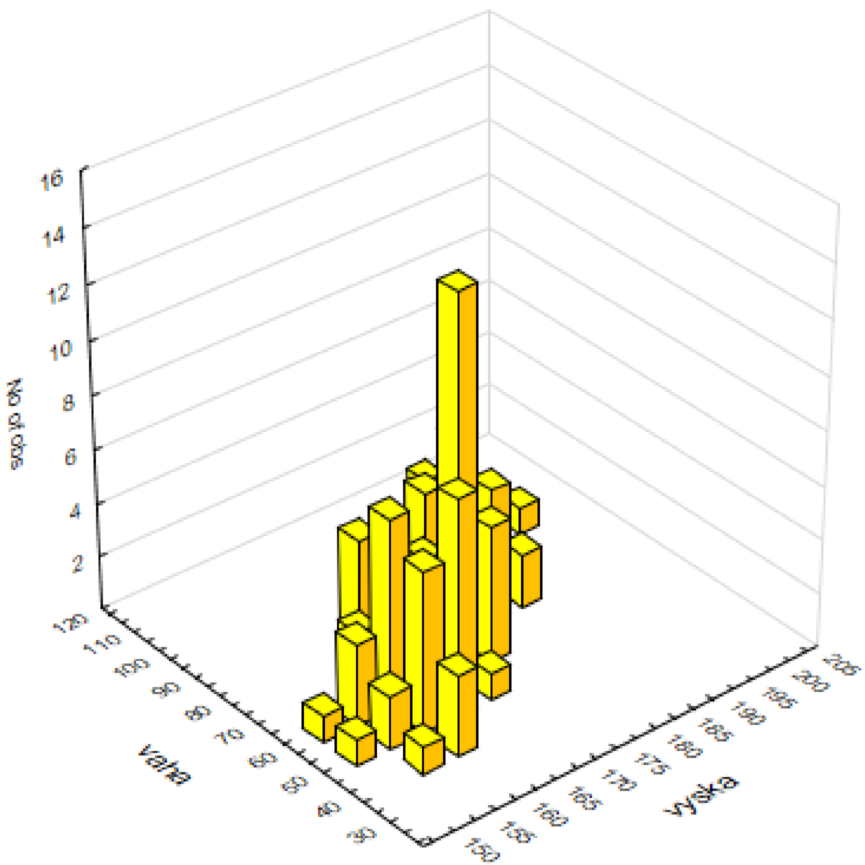
- **klasifikace pomocí hranic v obrazovém prostoru:**
  - stanovení hranic (hraničních ploch) oddělujících klasifikační třídy



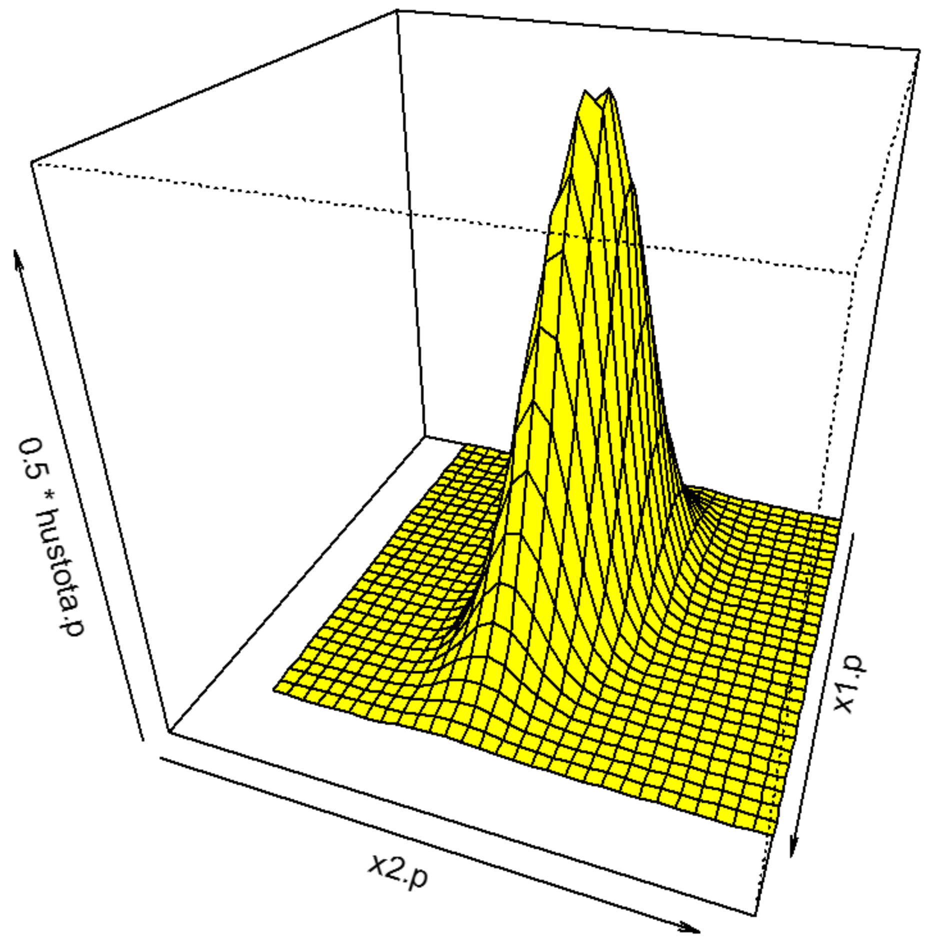
Vícerozměrné normální rozdělení

Motivace

Dvourozměrný histogram



Hustota dvourozměrného normálního rozdělení



Vícerozměrné normální rozdělení

Hustota jednozměrného normálního rozdělení:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(\mathrm{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

μ - střední hodnota σ² – rozptyl

Hustota vícerozměrného normálního rozdělení:

$$f(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

μ - vektor středních hodnot Σ - kovarianční matice

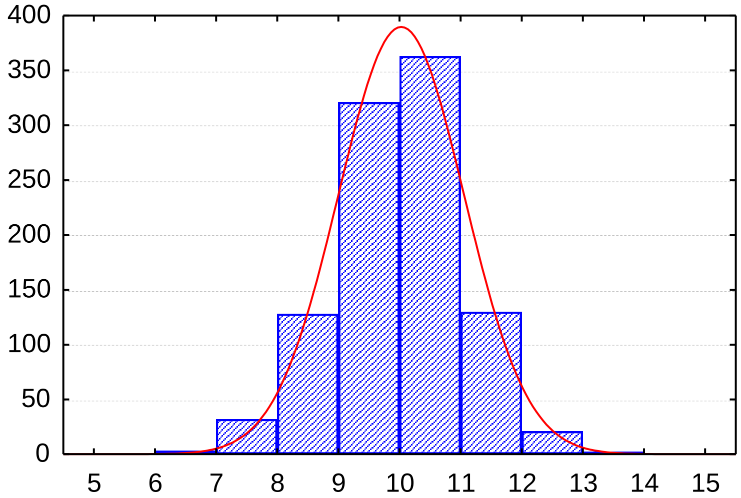
Hustota dvourozměrného normálního rozdělení:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right),$$

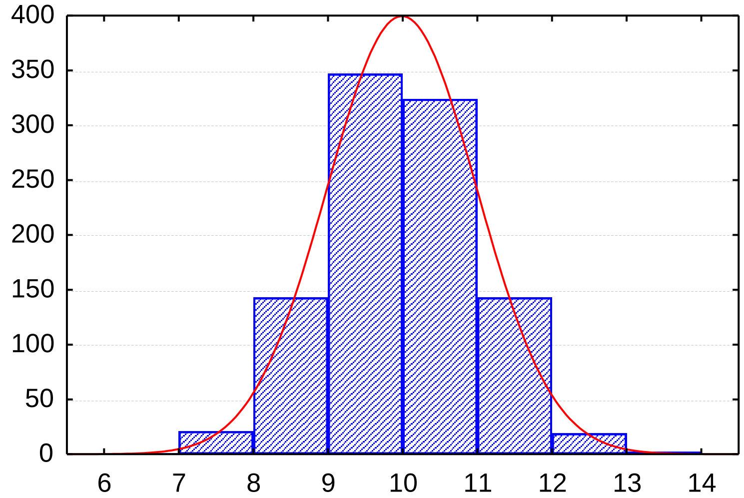
$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

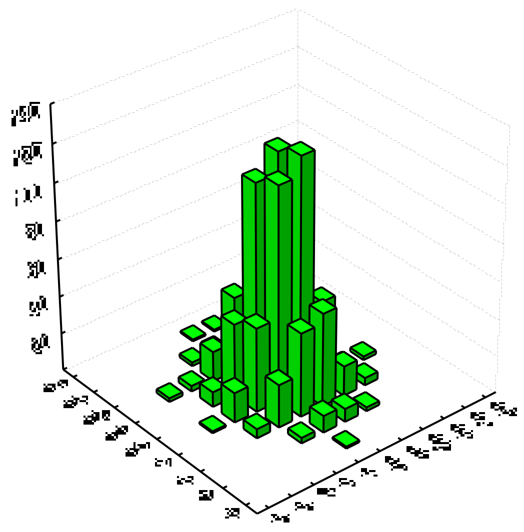
ρ - korelace mezi X a Y;
σ – směrodatná odchylka

Je normalita v jednorozměrném prostoru jedinou podmínkou vícerozměrné normality?

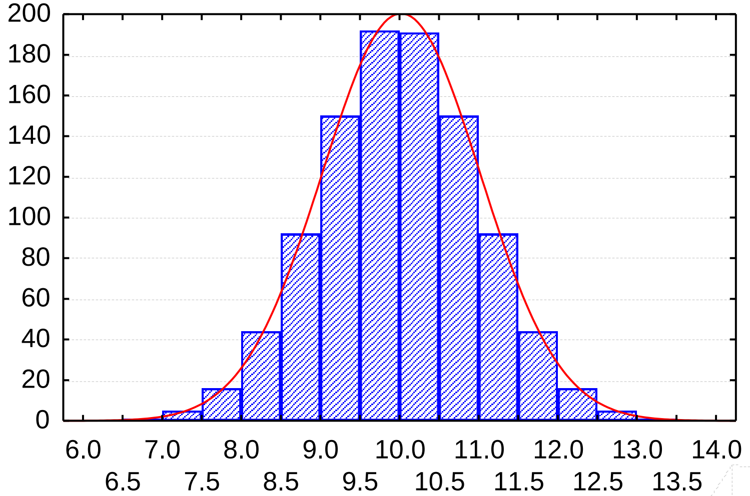


+

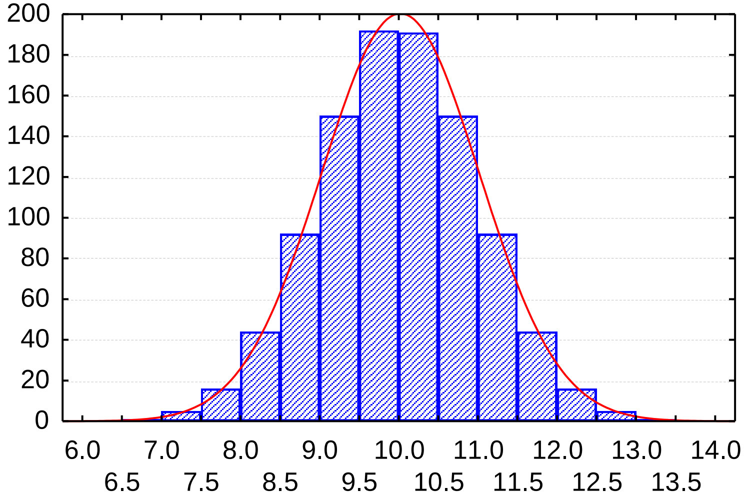


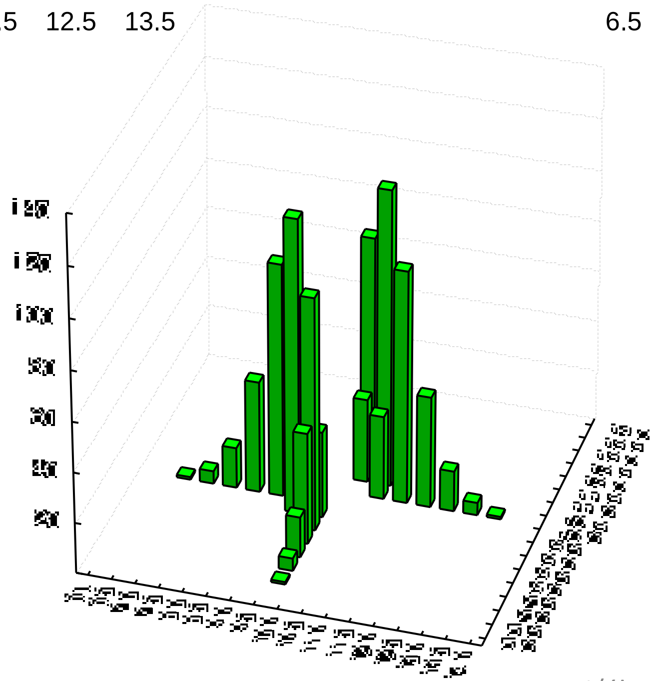


Je normalita v jednorozměrném prostoru jedinou podmínkou vícerozměrné normality?

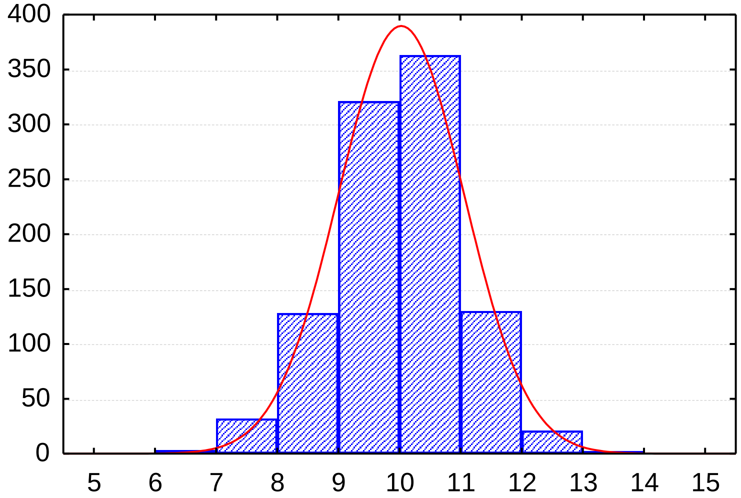


+

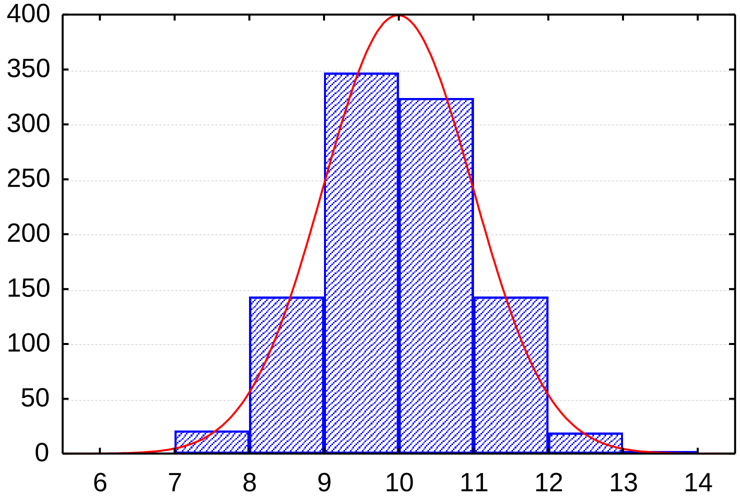


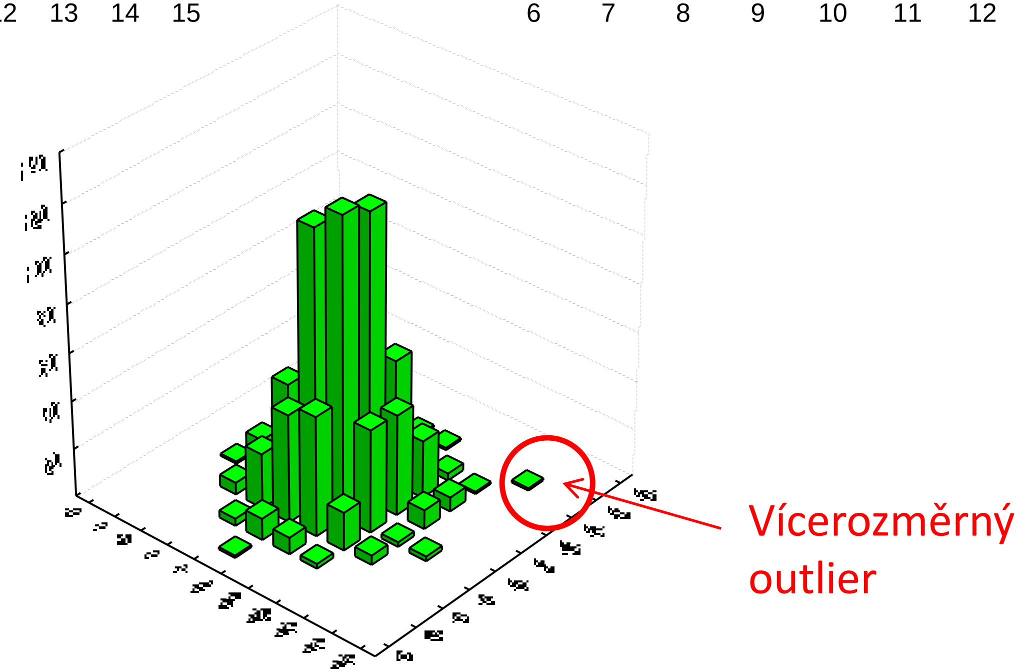


Je normalita v jednorozměrném prostoru jedinou podmínkou vícerozměrné normality?



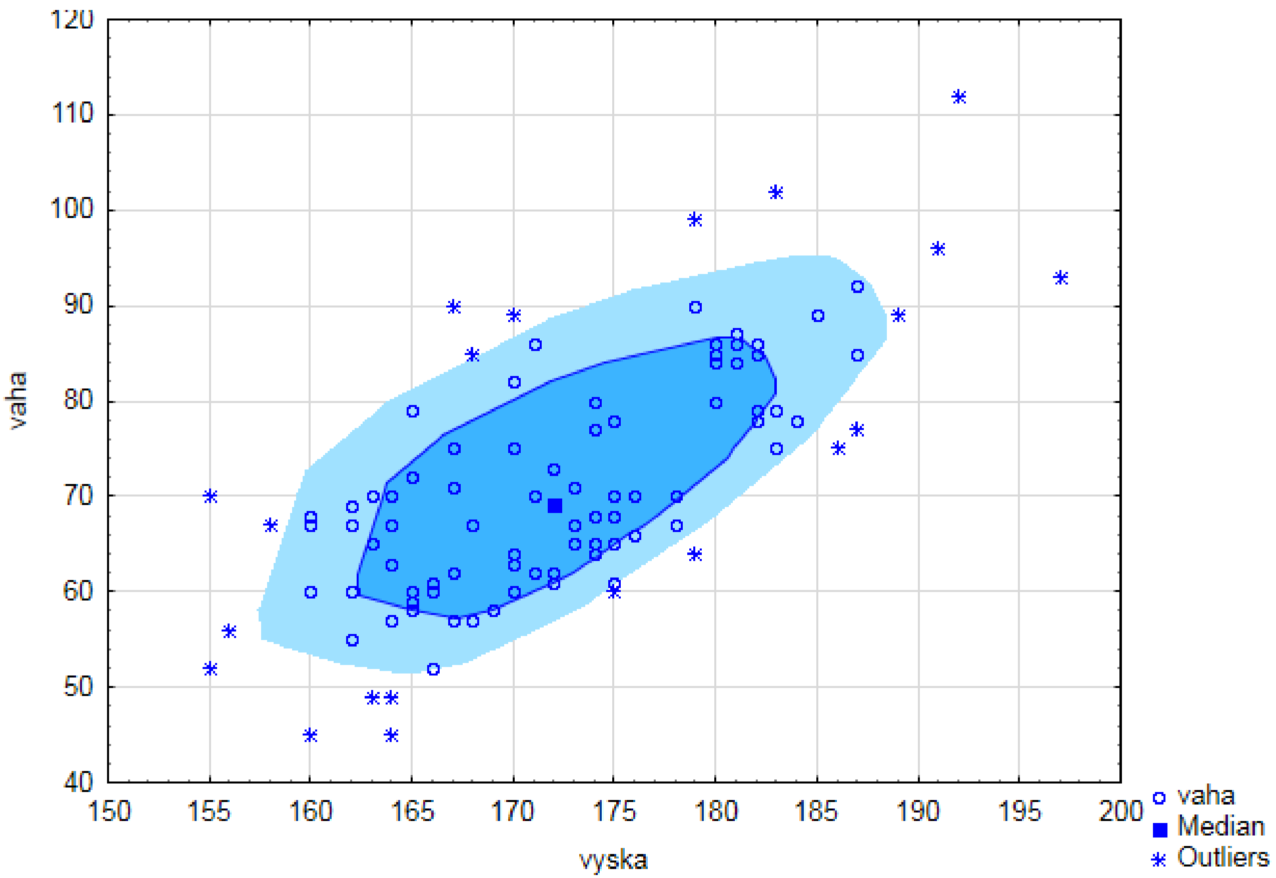
+





Ověření dvourozměrné normality

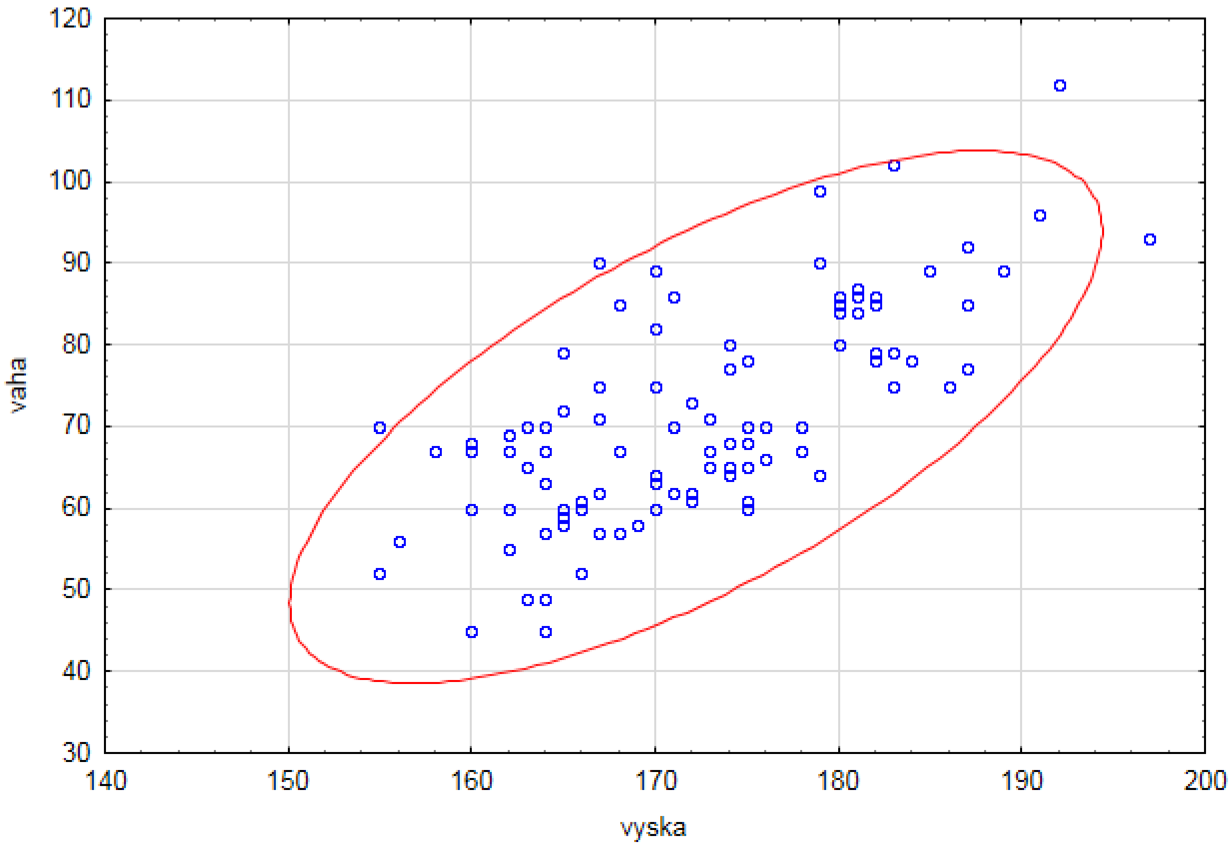
Bagplot = „bivariate boxplot“ (tzn. „dvourozměrný krabicový graf“)



v softwaru Statistica: Graphs – 2D Graphs – Bag Plots

Ověření dvourozměrné normality

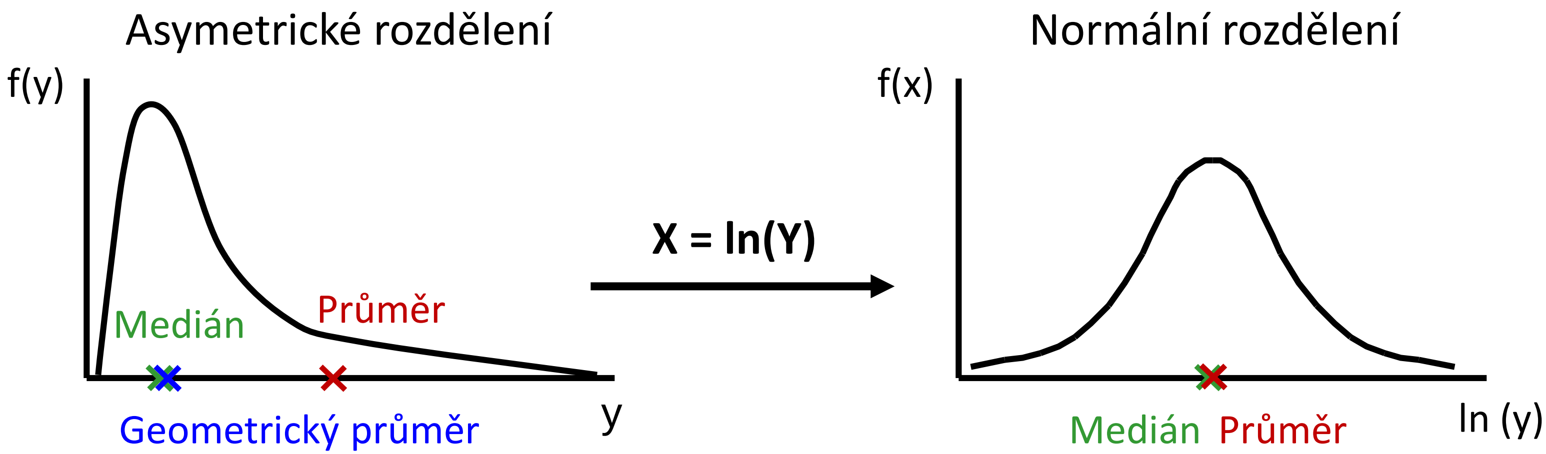
Vykreslení regulační elipsy („control“ elipse):



v softwaru Statistica: Graphs – Scatterplots – na záložce Advanced zvolit Elipse Normal

Normalizace dat

- Převod na normální rozdělení (normalita je předpokladem řady statistických testů).
- Např. **logaritmická transformace**: X = ln(Y) nebo X = ln(Y+1), pokud data obsahují hodnotu 0



- Další příklady:
  - **odmocninová transf.** (pro proměnné s Poissonovým rozložením nebo obecně data typu počet jedinců, buněk apod.: $X = \sqrt{Y}$ nebo $X = \sqrt{Y+1}$
  - **arcsin transfomace** (pro proměnné s binomickým rozložením)
  - **Box-Coxova tranformace**

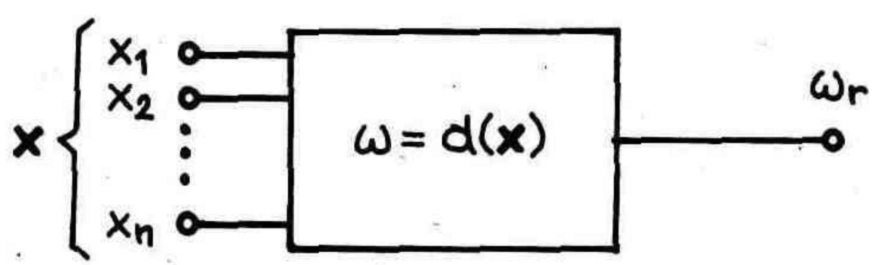
Klasifikace pomocí diskriminačních funkcí

Příznakový klasifikátor

- klasifikátor je algoritmus (stroj, *machine*) s tolika vstupy, kolik je proměnných (příznaků) a s jedním diskrétním výstupem, který udává třídu, do které klasifikátor zařadil rozpoznávaný objekt:

$$\omega_r = d(\mathbf{x})$$

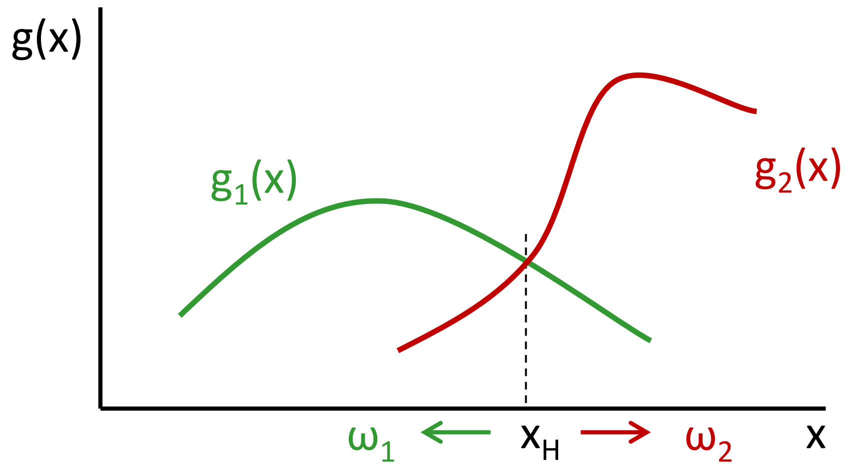
- $\mathbf{x}$ je vektor hodnot jednotlivých proměnných pro daný subjekt, tedy $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$
- $d(\mathbf{x})$ je skalární funkce vektorového argumentu $\mathbf{x}$, kterou nazýváme **rozhodovací pravidlo klasifikátoru**
- ω_r je **identifikátor klasifikační třídy**



Klasifikace pomocí diskriminačních funkcí

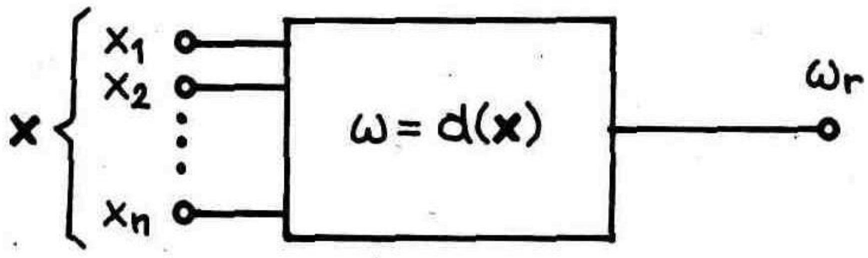
- rozhodovací pravidlo klasifikátoru d(**x**) založeno na výpočtu diskriminačních funkcí
- **diskriminační funkce $g_i(\mathbf{x})$** – vyjadřují míru příslušnosti objektu **x** do jednotlivých klasifikačních tříd
- zařadíme **x** do takové třídy ω_i, pro kterou je $g_i(\mathbf{x})$ maximální
- matematicky: pro objekt **x** z třídy ω_r platí, že

$$g_r(\mathbf{x}) > g_s(\mathbf{x}), \text{ pro } s = 1,2,\dots,R \text{ a } r \neq s$$

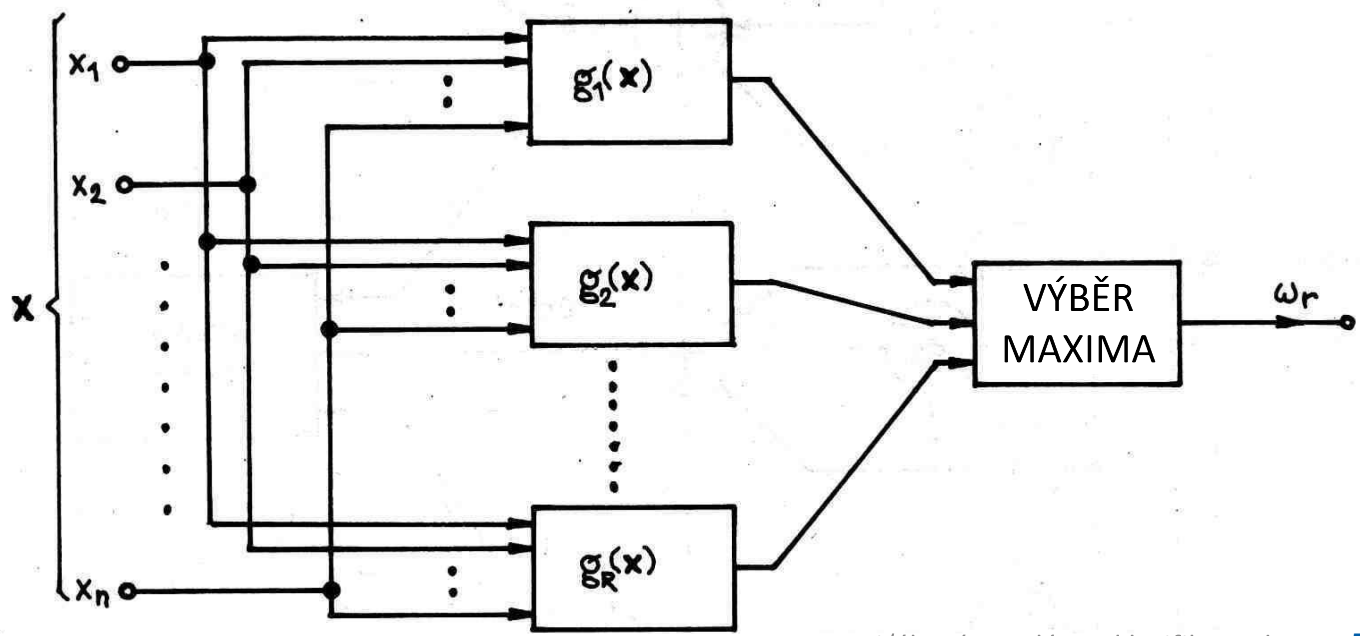


Blokové schéma klasifikátoru

- obecné blokové schéma klasifikátoru:



- blokové schéma klasifikátoru pomocí diskriminačních funkcí:

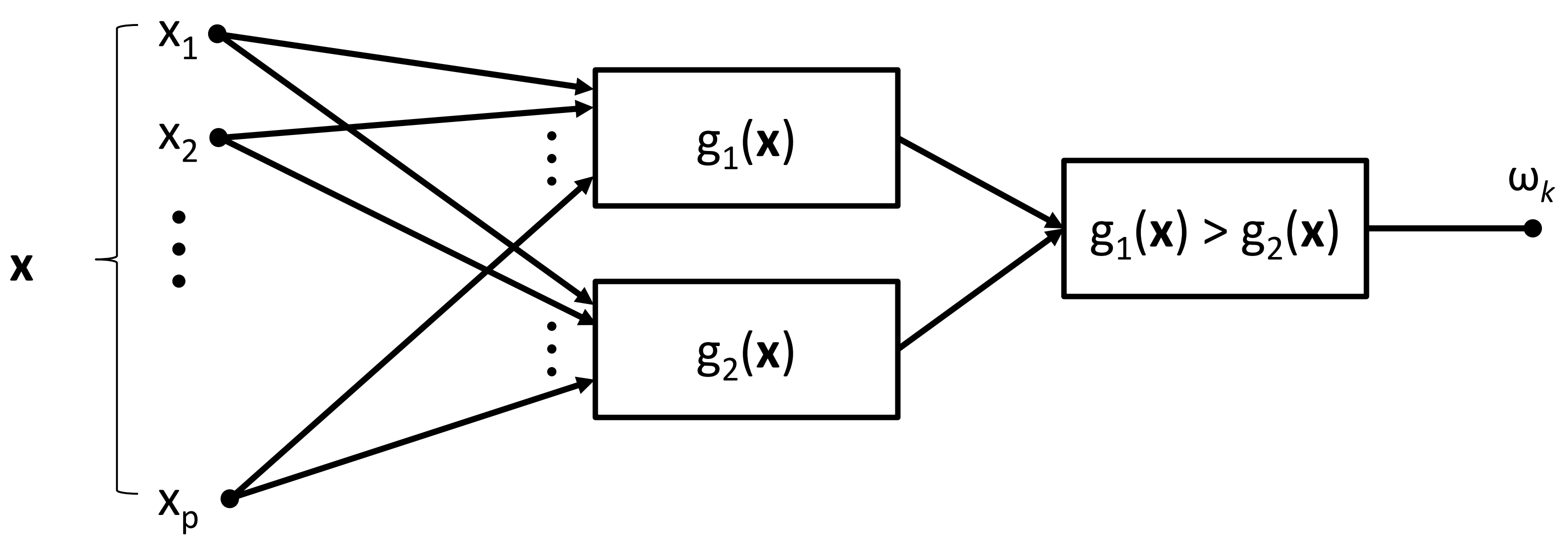


Dichotomický klasifikátor

- pro klasifikaci do dvou tříd
- rozhodovací pravidlo klasifikátoru lze zapsat jako:

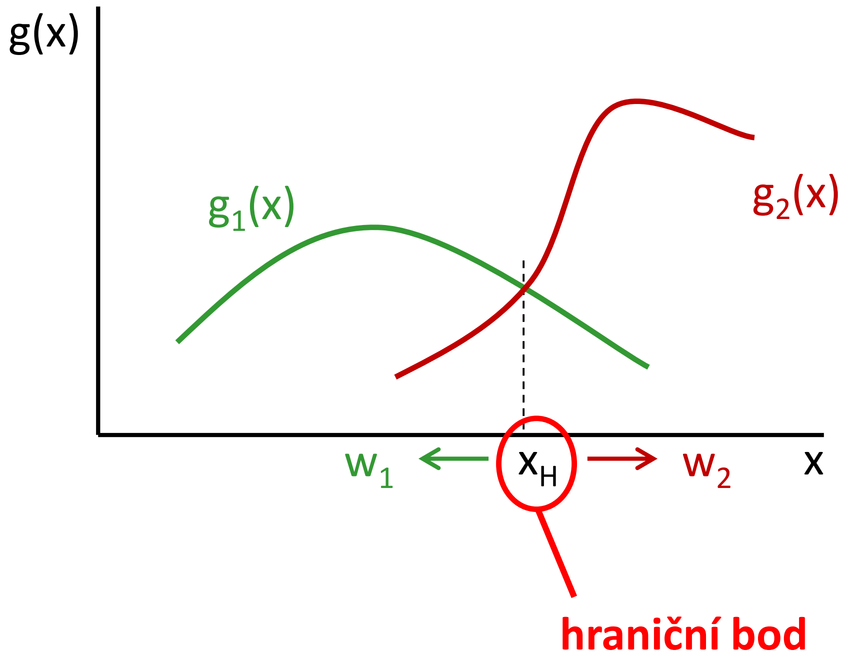
$$\omega_k = \mathrm{d}(\mathbf{x}) = \mathrm{sign}(\mathrm{g}_1(\mathbf{x}) - \mathrm{g}_2(\mathbf{x}))$$

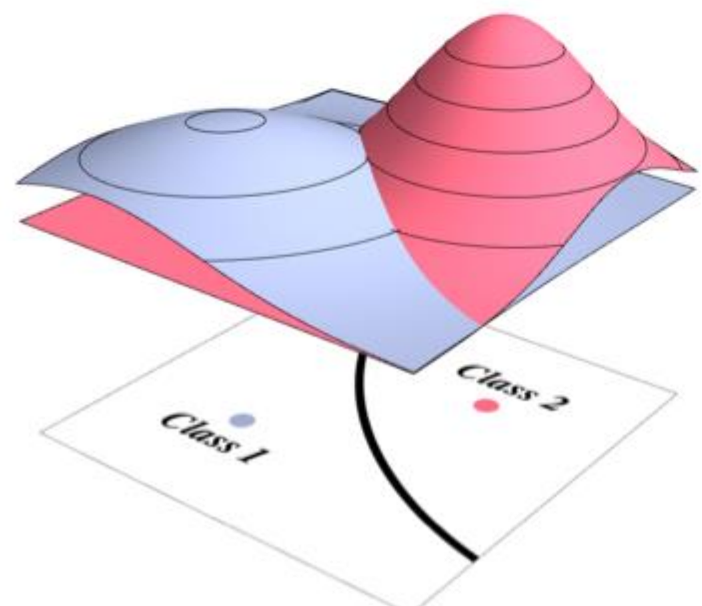
- pokud $\mathrm{d}(\mathbf{x}) \geq 0 \rightarrow$ zařazení **x** do třídy ω_1
- pokud $\mathrm{d}(\mathbf{x}) < 0 \rightarrow$ zařazení **x** do třídy ω_2



Souvislost klasifikace pomocí diskriminačních funkcí s klasifikací pomocí hranic

Hranice mezi dvěma sousedními třídami ω_1 a ω_2 je určena průmětem průsečíku funkcí $g_r(\mathbf{x})$ a $g_s(\mathbf{x})$, definovaného rovnicí $g_r(\mathbf{x}) = g_s(\mathbf{x})$, do obrazového prostoru.





Příklady diskriminačních funkcí

- nejjednodušším tvarem diskriminační funkce je lineární funkce:

  $$g_r(\mathbf{x}) = a_{r0} + a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rp}x_p$$

- diskriminační funkce na základě statistických vlastností množiny objektů:

  $$g_r(\mathbf{x}) = P(\omega_r|\mathbf{x})$$

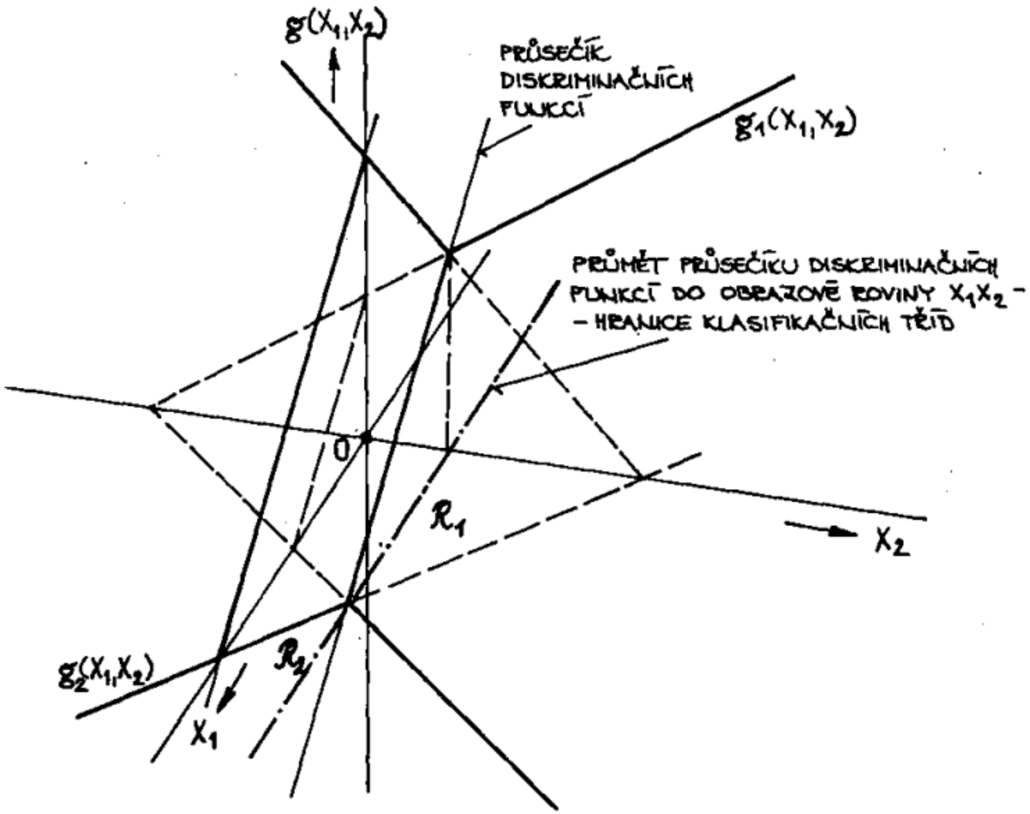
  kde $P(\omega_r|\mathbf{x})$ je pravděpodobnost zatřídění **x** do třídy ω_r

  → **Bayesův klasifikátor**

Lineární diskriminační funkce

$g_r(\mathbf{x}) = a_{r0} + a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rp}x_p$,

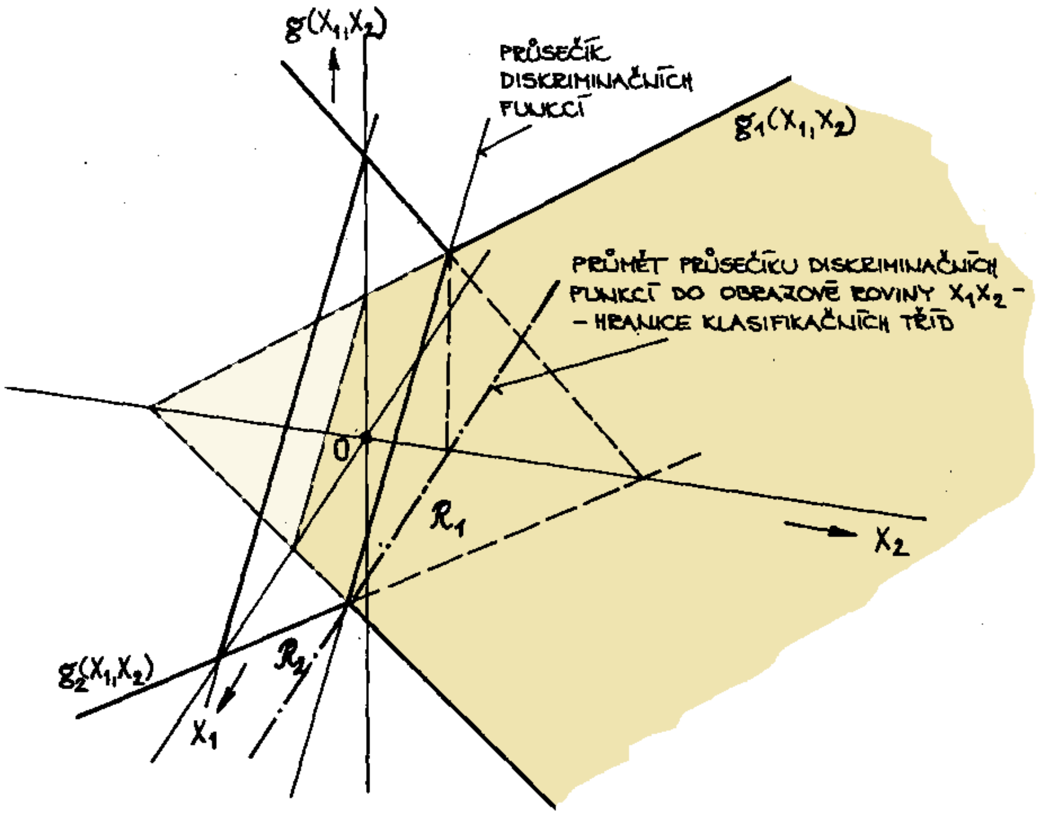
kde a_{r0} je práh diskriminační funkce posouvající počátek souřadného systému a a_{ri} jsou váhové koeficienty i-tého příznaku x_i



Lineární diskriminační funkce

$g_r(\mathbf{x}) = a_{r0} + a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rp}x_p$,

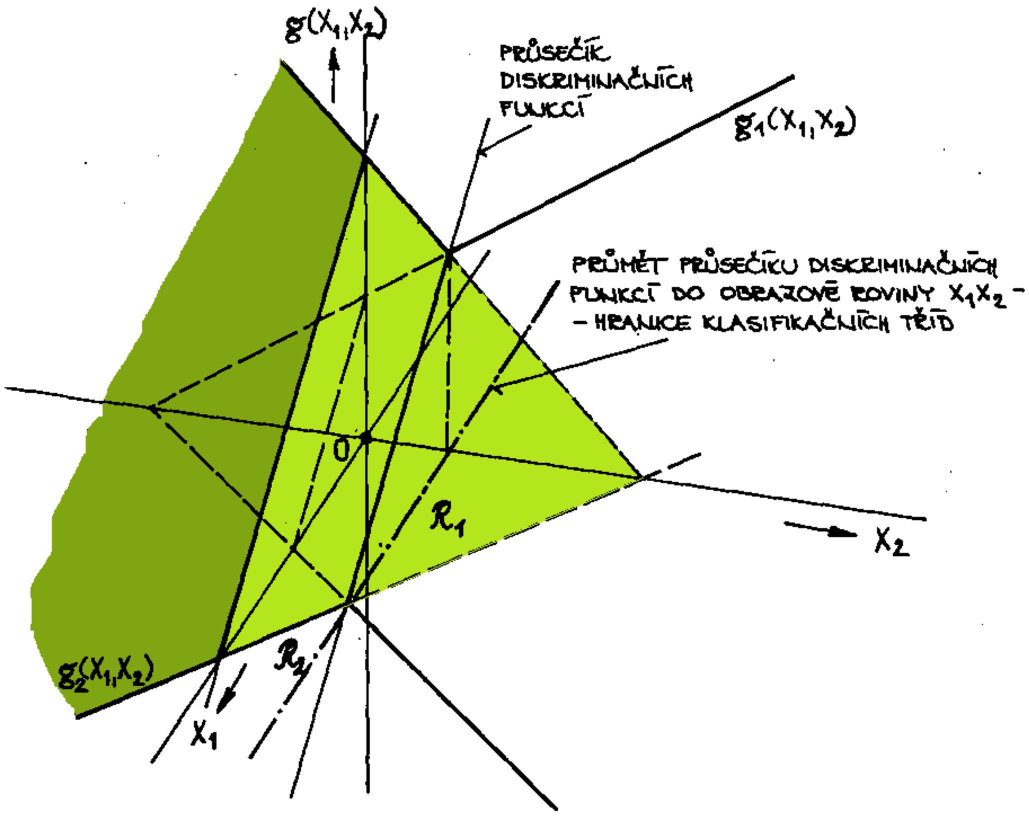
kde a_{r0} je práh diskriminační funkce posouvající počátek souřadného systému a a_{ri} jsou váhové koeficienty i-tého příznaku x_i



Lineární diskriminační funkce

$g_r(\mathbf{x}) = a_{r0} + a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rp}x_p$,

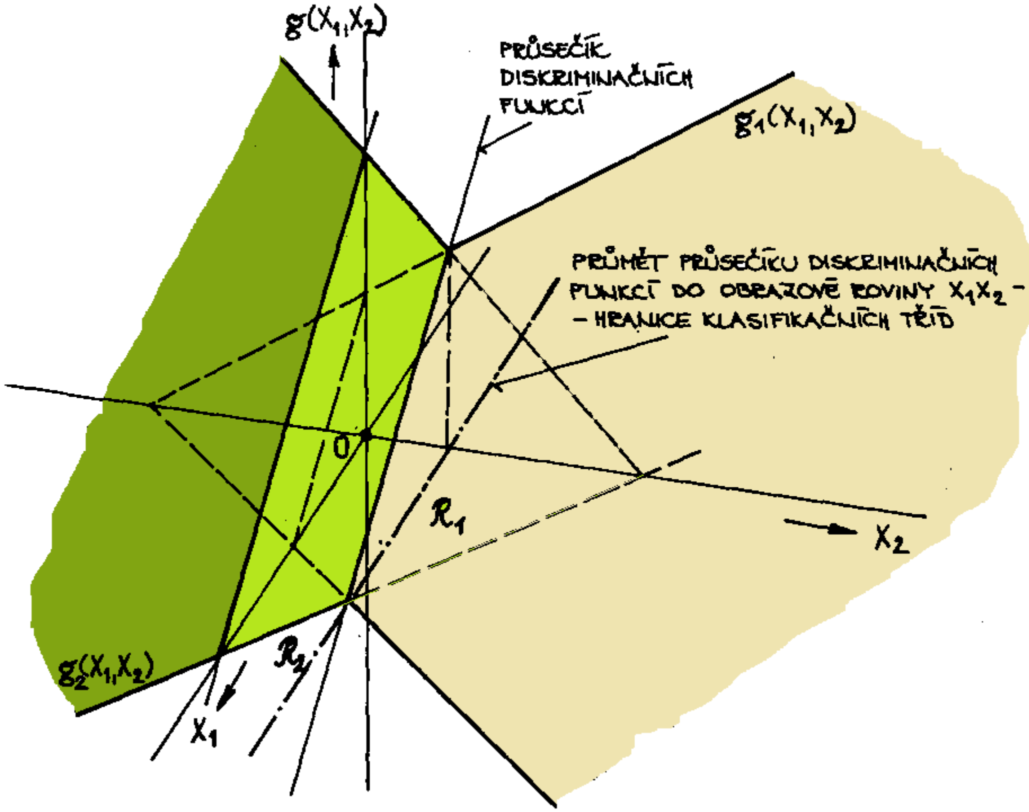
kde a_{r0} je práh diskriminační funkce posouvající počátek souřadného systému a a_{ri} jsou váhové koeficienty i-tého příznaku x_i



Lineární diskriminační funkce

$g_r(\mathbf{x}) = a_{r0} + a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rp}x_p$,

kde a_{r0} je práh diskriminační funkce posouvající počátek souřadného systému a a_{ri} jsou váhové koeficienty i-tého příznaku x_i



Bayesův klasifikátor

- diskriminační funkce určeny na základě statistických vlastností množiny objektů
- vyjdeme z **Bayesova vzorce**: $P(\omega_k|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|\omega_k)\cdot P(\omega_k)}{p(\mathbf{x})}$, kde
  - $P(\omega_k|\mathbf{x})$ je aposteriorní podmíněná pravděpodobnost zatřídění objektu **x** do třídy ω_k
  - $p(\mathbf{x}|\omega_k)$ je podmíněná hustota pravděpodobnosti výskytu objektu $\mathbf{x}$ ve třídě $\omega_k, k = 1,2$
  - $P(\omega_k)$ je apriorní pravděpodobnost třídy ω_k
  - $p(\mathbf{x})$ je celková hustota pravděpodobnosti rozložení objektu $\mathbf{x}$ v celém obrazovém prostoru

Bayesův klasifikátor – kritéria

- Kritérium maximální aposteriorní pravděpodobnosti
- Kritérium minimální pravděpodobnosti chybného rozhodnutí
- Kritérium minimální střední ztráty
- Kritérium maximální pravděpodobnosti

Bayesův klasifikátor – kritéria

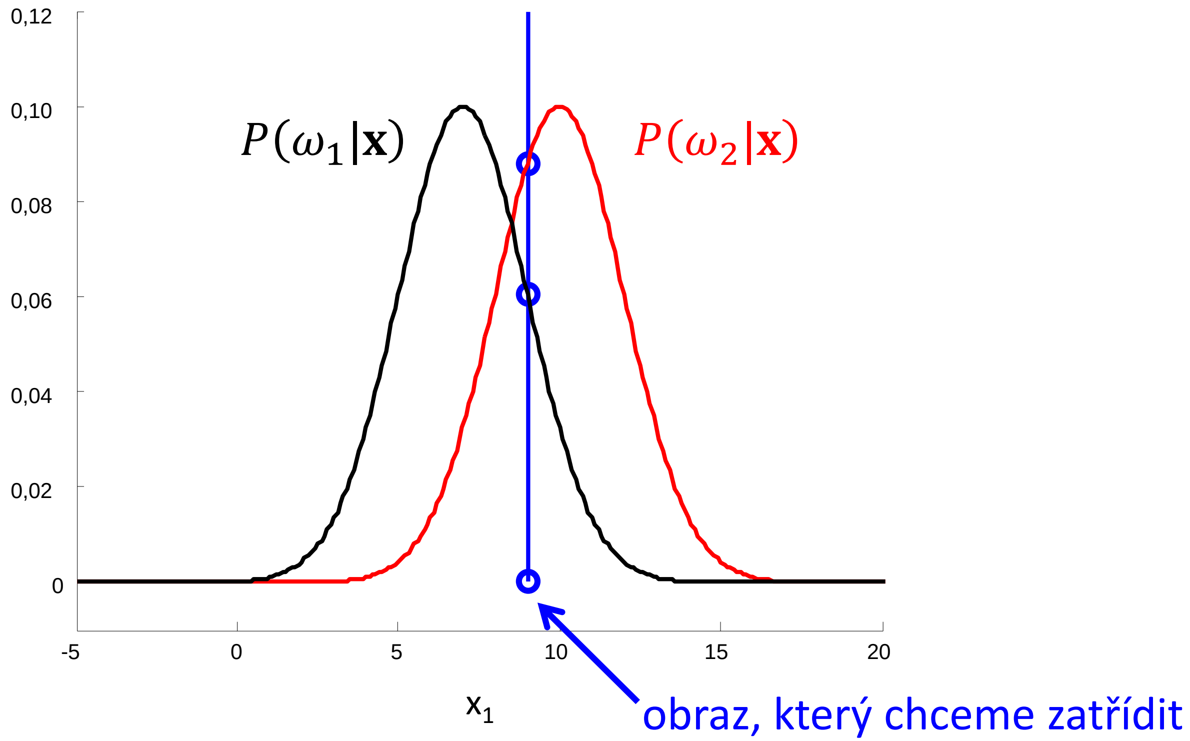
- Kritérium maximální aposteriorní pravděpodobnosti
- Kritérium minimální pravděpodobnosti chybného rozhodnutí
- Kritérium minimální střední ztráty
- Kritérium maximální pravděpodobnosti

Bayesův kl. – kritérium maximální aposteriorní psti

- zatřídění obrazu **x** do třídy s větší aposteriorní pravděpodobností, tedy:

  když $P(\omega_1|\mathbf{x}) \geq P(\omega_2|\mathbf{x})$ → zařazení **x** do třídy ω_1

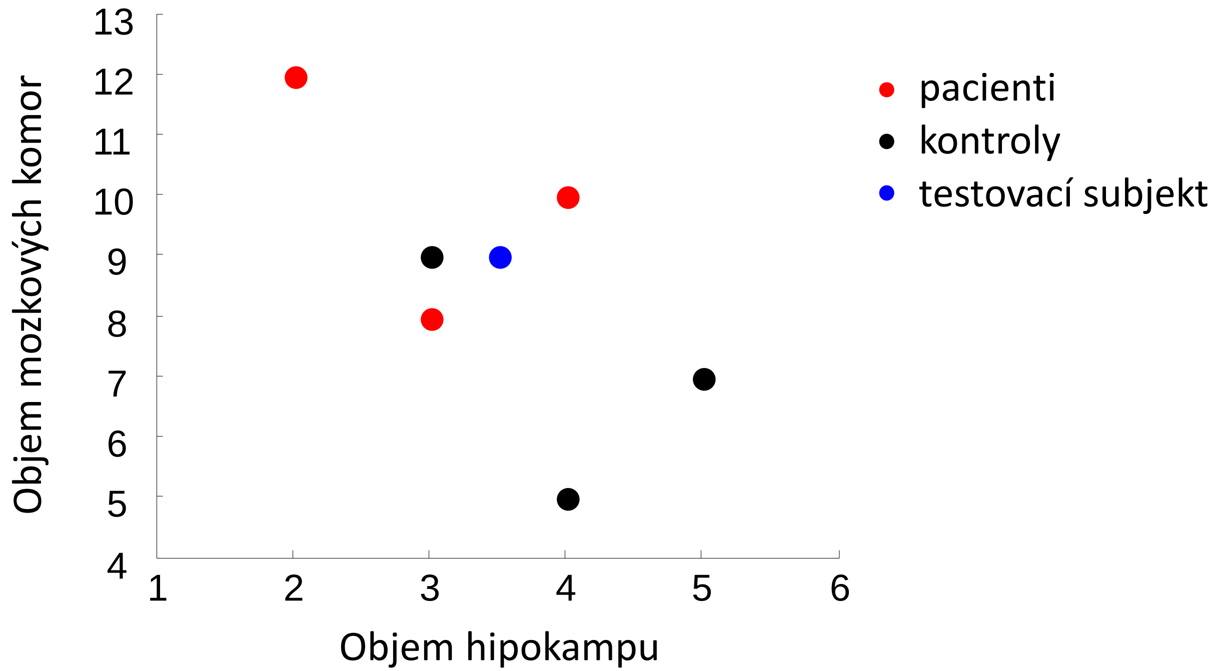
  když $P(\omega_1|\mathbf{x}) < P(\omega_2|\mathbf{x})$ → zařazení **x** do třídy ω_2



Bayesův kl. – kritérium maximální aposteriorní psti

Příklad: Bylo provedeno měření objemu hipokampu a mozkových komor (v cm^3) u 3 pacientů se schizofrenií a 3 kontrol: $\mathbf{X}_D = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 10 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}_H = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Určete, zda testovací subjekt $\mathbf{x} = [3{,}5 \quad 9]$ patří do skupiny pacientů či kontrolních subjektů pomocí Bayesova klasifikátoru.



Bayesův kl. – kritérium maximální aposteriorní psti

Příklad: Bylo provedeno měření objemu hipokampu a mozkových komor (v cm^3) u 3 pacientů se schizofrenií a 3 kontrol: $\mathbf{X}_D = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 10 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}_H = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Určete, zda testovací subjekt $\mathbf{x} = [3{,}5 \quad 9]$ patří do skupiny pacientů či kontrolních subjektů pomocí Bayesova klasifikátoru.

$$P(\omega_k|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|\omega_k) \cdot P(\omega_k)}{p(\mathbf{x})}$$

Označení a pomocné výpočty:

$n_D = 3; \quad n_H = 3; \quad n = 6$

Apriorní psti:

$$P(\omega_D) = \frac{n_D}{n} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

$$P(\omega_H) = \frac{n_H}{n} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

Podmíněné hustoty psti: $p(\mathbf{x}|\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2|\mathbf{S}_k|}} \cdot$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}_k^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right)$$

Potřebujeme vypočítat: vícerozměrné průměry $\bar{\mathbf{x}}_D$ a $\bar{\mathbf{x}}_H$; kovarianční matice $\mathbf{S}_D$ a $\mathbf{S}_H$.

Bayesův kl. – kritérium maximální aposteriorní psti

Příklad: Bylo provedeno měření objemu hipokampu a mozkových komor (v cm³) u 3 pacientů se schizofrenií a 3 kontrol: $\mathbf{X}_D = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 10 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}_H = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Určete, zda testovací subjekt $\mathbf{x} = [3{,}5 \quad 9]$ patří do skupiny pacientů či kontrolních subjektů pomocí Bayesova klasifikátoru.

$$\boxed{P(\omega_k|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|\omega_k) \cdot P(\omega_k)}{p(\mathbf{x})}}$$

Označení a pomocné výpočty:

Vícerozměrné průměry: $\bar{\mathbf{x}}_D =$

$$\left[\frac{1}{n_D}\sum_{i=1}^{n_D} \mathrm{x}_{i1} \quad \frac{1}{n_D}\sum_{i=1}^{n_D} \mathrm{x}_{i2}\right] = [3 \quad 10]$$

$$\bar{\mathbf{x}}_H = \left[\frac{1}{n_H}\sum_{i=1}^{n_H} \mathrm{x}_{i1} \quad \frac{1}{n_H}\sum_{i=1}^{n_H} \mathrm{x}_{i2}\right] = [4 \quad 7]$$

Výběrové kovarianční matice:

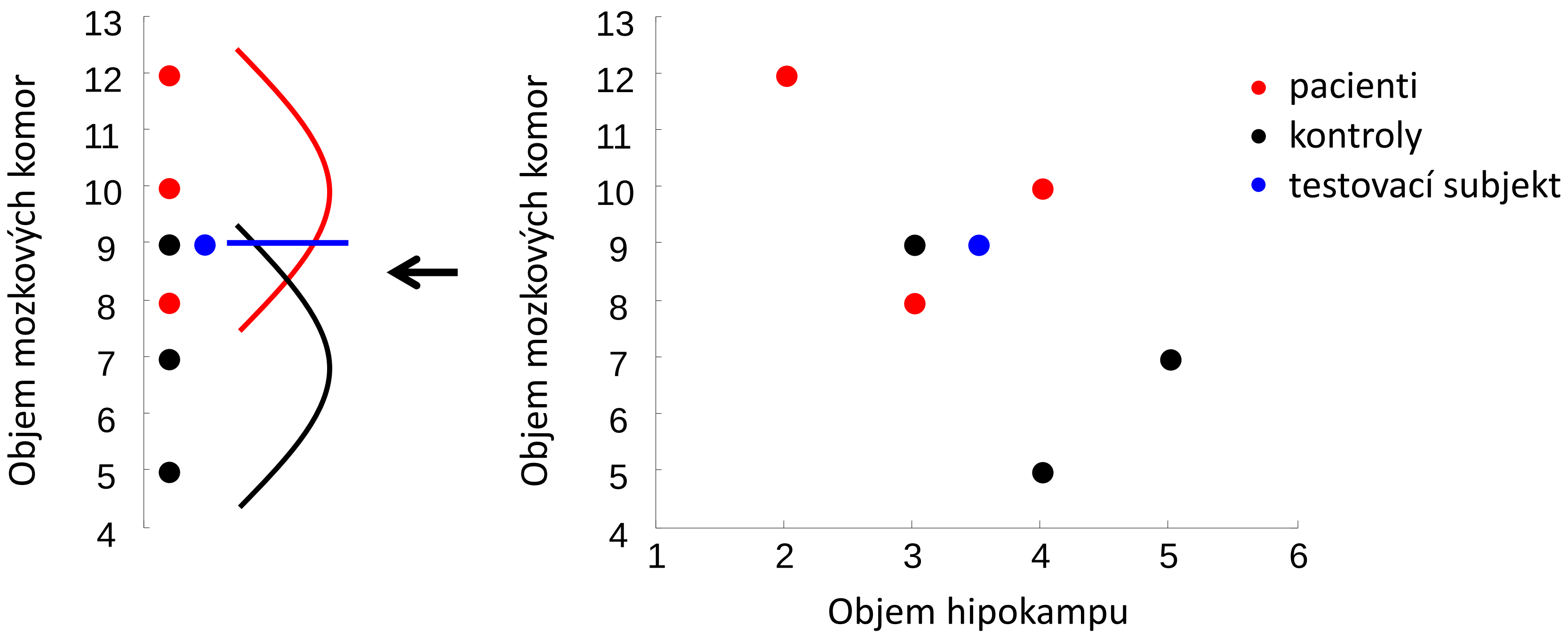
$$\mathbf{S}_D = \begin{bmatrix} s_{11}^D & s_{12}^D \\ s_{21}^D & s_{22}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_H = \begin{bmatrix} s_{11}^H & s_{12}^H \\ s_{21}^H & s_{22}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Bayesův kl. – kritérium maximální aposteriorní psti

Příklad:

1. Klasifikace podle objemu mozkových komor:



$$P(\omega_D|\mathrm{x}_2) = \frac{0{,}176 \cdot 0{,}5}{0{,}1485} = 0{,}593$$

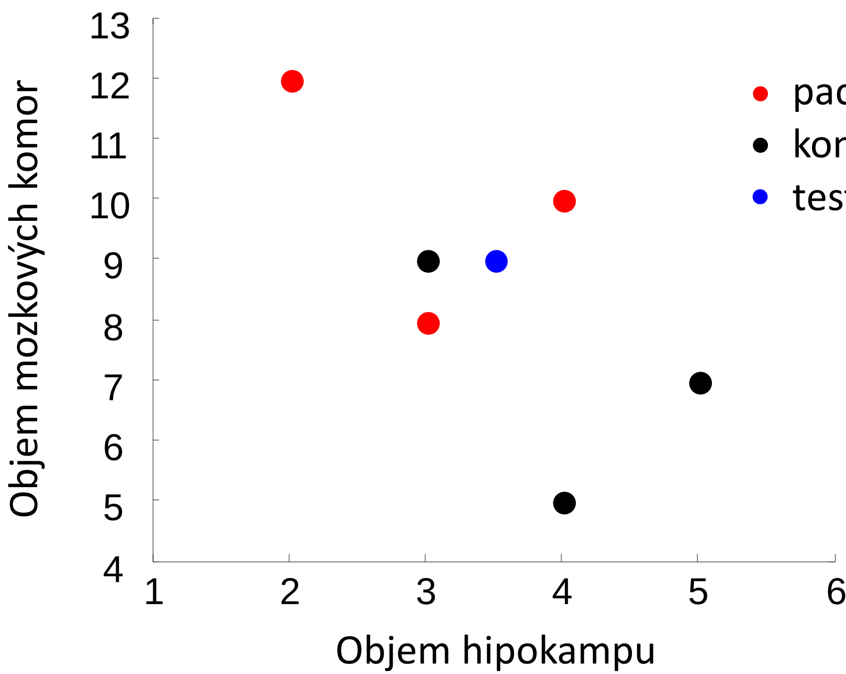
$$P(\omega_H|\mathrm{x}_2) = \frac{0{,}121 \cdot 0{,}5}{0{,}1485} = 0{,}407$$

→ subjekt zařazen do třídy pacientů

Bayesův kl. – kritérium maximální aposteriorní psti

Příklad:

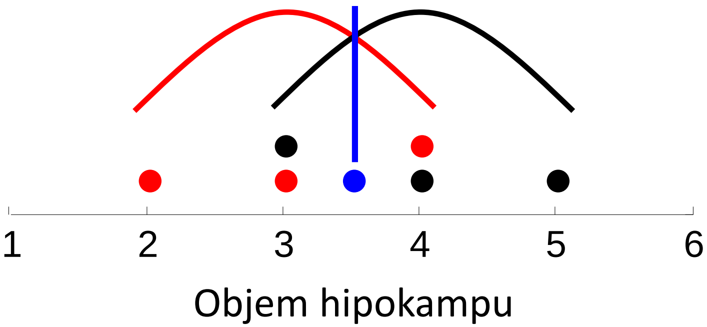
2. Klasifikace podle objemu hipokampu:



$$P(\omega_D|x_1) = \frac{0{,}352 \cdot 0{,}5}{0{,}352} = 0{,}5$$

$$P(\omega_H|x_1) = \frac{0{,}352 \cdot 0{,}5}{0{,}352} = 0{,}5$$

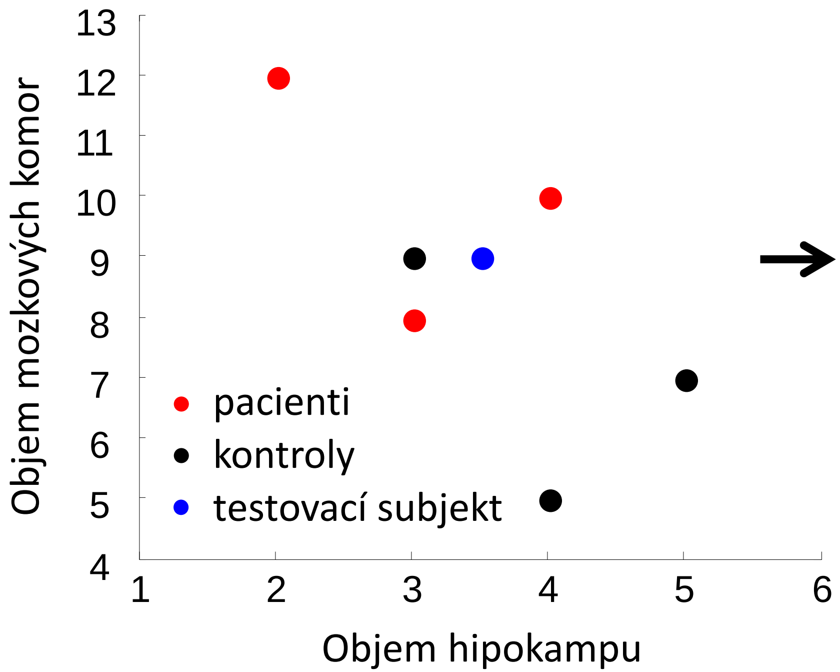
→ nelze jednoznačně určit, kam subjekt zařadíme



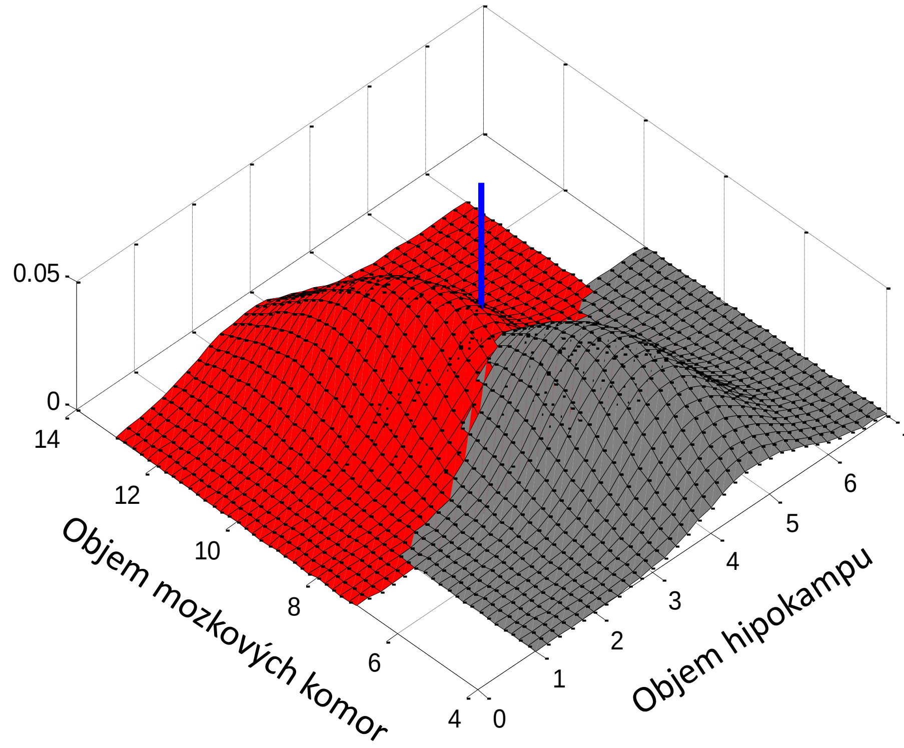
Bayesův kl. – kritérium maximální aposteriorní psti

Příklad:

3. Klasifikace podle obou proměnných:



→



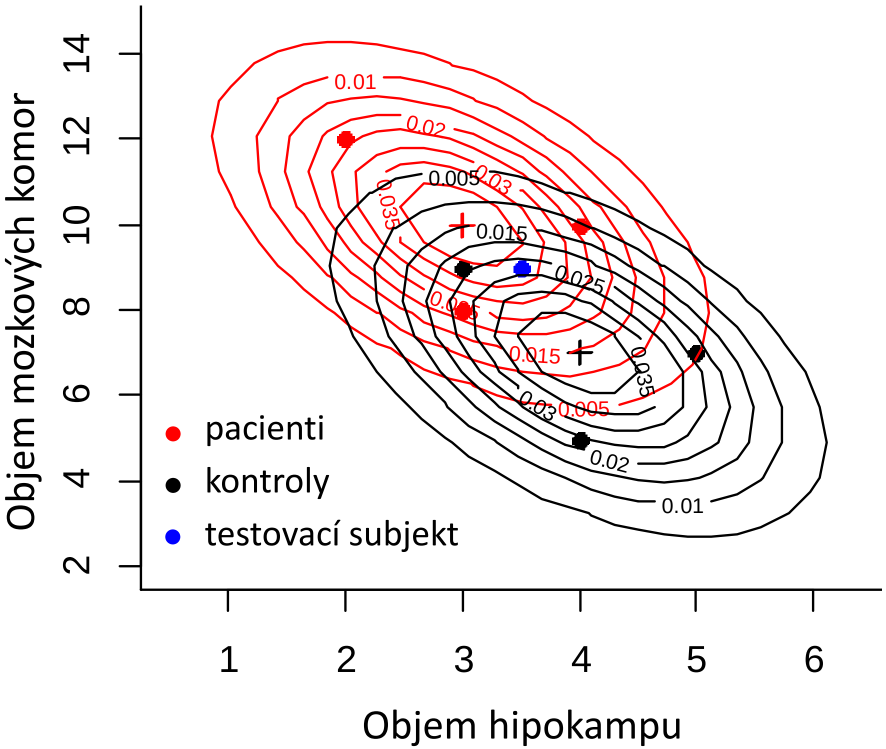
$$P(\omega_D|\mathbf{x}) = \frac{0{,}078 \cdot 0{,}5}{0{,}067} = 0{,}582$$

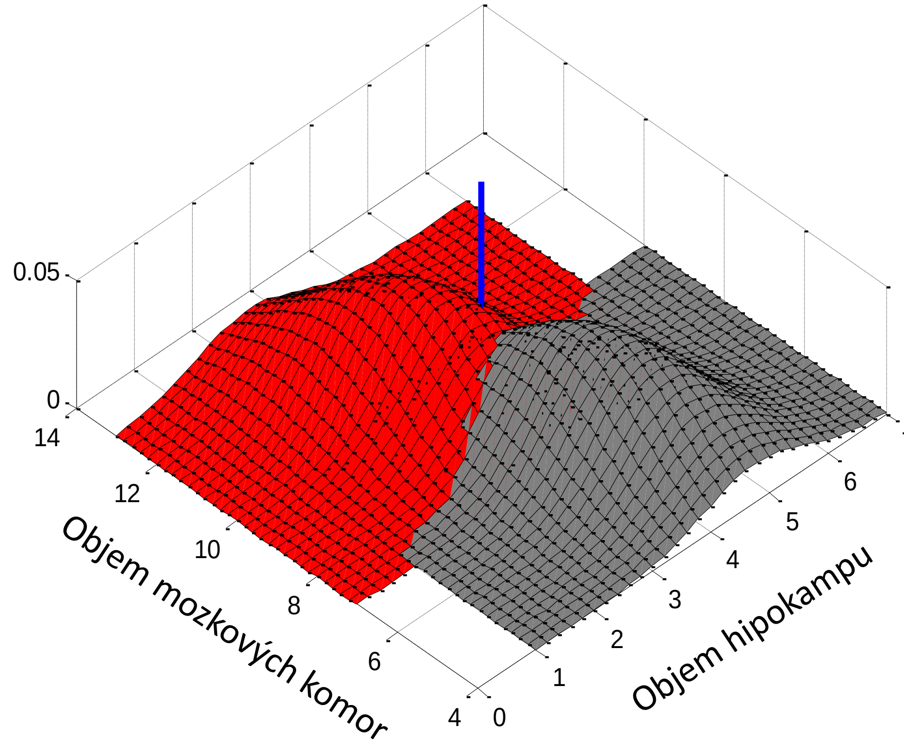
$$P(\omega_H|\mathbf{x}) = \frac{0{,}056 \cdot 0{,}5}{0{,}067} = 0{,}418$$

→ subjekt zařazen do třídy pacientů

Bayesův kl. – kritérium maximální aposteriorní psti

Příklad - klasifikace podle obou proměnných:





Bayesův kl. – kritérium maximální aposteriorní psti

Příklad - Výpočet hranice pomocí diskriminačních funkcí:

Pro hranici je rozdíl diskriminačních funkcí roven 0:

$$P(\omega_D|\mathbf{x}) - P(\omega_H|\mathbf{x}) = 0$$

$$P(\omega_D|\mathbf{x}) = P(\omega_H|\mathbf{x})$$

$\frac{P(\omega_D|\mathbf{x})}{P(\omega_H|\mathbf{x})} = 1$ → kritérium maximální aposteriorní pravděpodobnosti

Levá strana je rovna: $\frac{P(\omega_D|\mathbf{x})}{P(\omega_H|\mathbf{x})} = \frac{0{,}582}{0{,}418} = 1{,}4$

Pravá strana je rovna: 1

→ protože věrohodnostní poměr (na levé straně) je větší než výraz na pravé straně, subjekt zařadíme do třídy pacientů

Bayesův klasifikátor – kritéria

- Kritérium maximální aposteriorní pravděpodobnosti
- Kritérium minimální pravděpodobnosti chybného rozhodnutí
- Kritérium minimální střední ztráty
- Kritérium maximální pravděpodobnosti

Bayesův kl. – kritérium min. psti chybného rozhodnutí

- Vyjdeme z výpočtu hranice pomocí diskriminačních funkcí:

$$P\ (\omega_D|\mathbf{x}) - P(\omega_H|\mathbf{x}) = 0$$

$$\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)\cdot P(\omega_D)}{p(\mathbf{x})} - \frac{p(\mathbf{x}|\omega_H)\cdot P(\omega_H)}{p(\mathbf{x})} = 0$$

- Můžeme vykrátit $p(\mathbf{x})$, protože celková hustota pravděpodobnosti je stejná pro obě diskriminační funkce:

$$p(\mathbf{x}|\omega_D)\cdot P(\omega_D) - p(\mathbf{x}|\omega_H)\cdot P(\omega_H) = 0$$

- $\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{P(\omega_H)}{P(\omega_D)} \rightarrow$ kritérium minimální psti chybného rozhodnutí

Bayesův kl. – kritérium min. psti chybného rozhodnutí

$\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{P(\omega_H)}{P(\omega_D)} \rightarrow$ kritérium minimální psti chybného rozhodnutí

Pro náš příklad:

Levá strana je rovna: $\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{0{,}078}{0{,}056} = 1{,}4$

Pravá strana rovna $\frac{P(\omega_H)}{P(\omega_D)} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1$

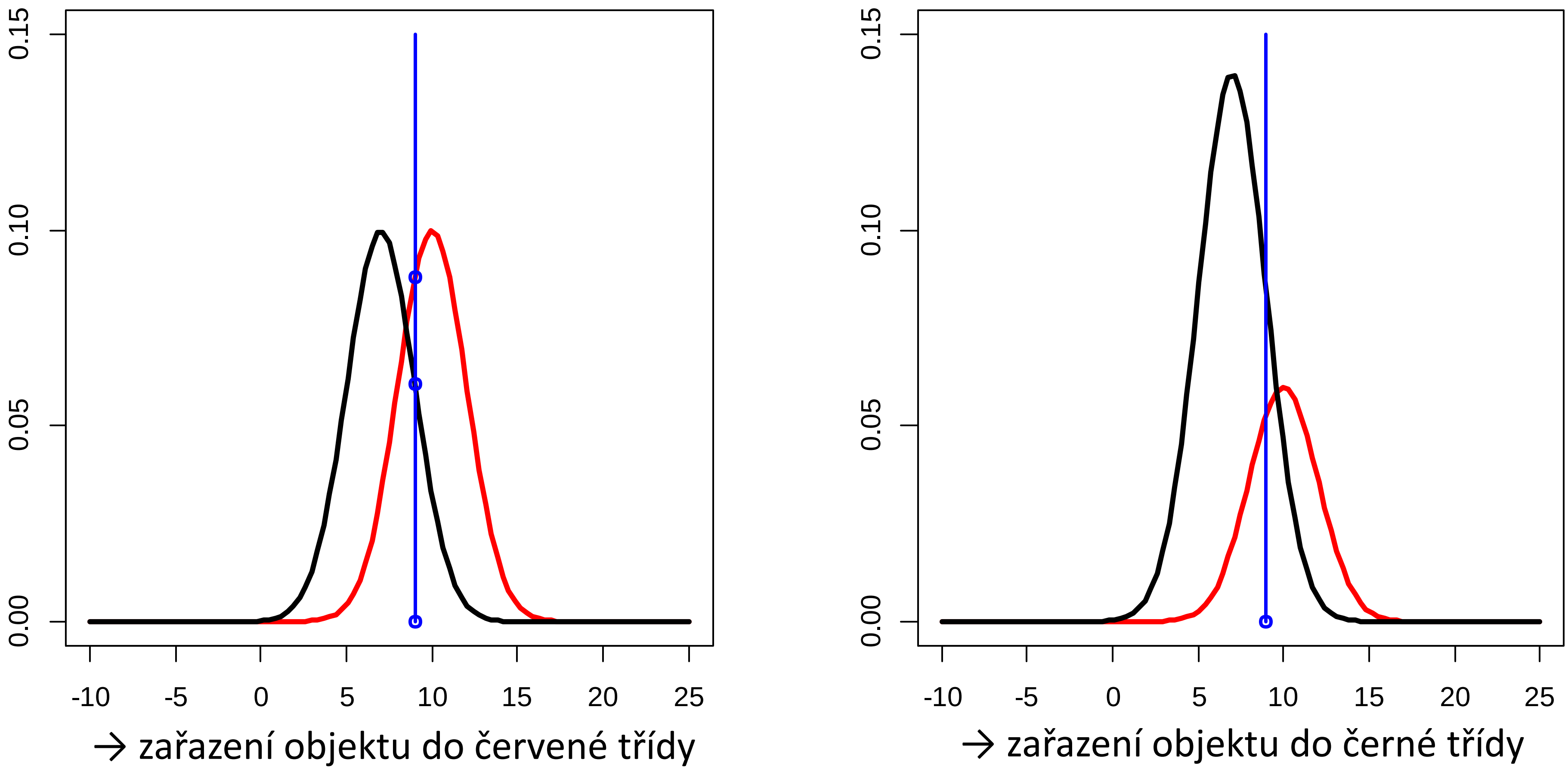
$\rightarrow$ protože věrohodnostní poměr (na levé straně) je větší než výraz na pravé straně, subjekt zařadíme do třídy pacientů

Poznámka: Kdyby byly apriorní pravděpodobnosti jiné, např. $\frac{P(\omega_H)}{P(\omega_D)} = \frac{6/9}{3/9} = 2$, byl by testovací subjekt zařazen do třídy kontrolních subjektů.

Bayesův kl. – kritérium min. psti chybného rozhodnutí

Poznámka: Kdyby byly apriorní pravděpodobnosti jiné, např. $\frac{P(\omega_H)}{P(\omega_D)} = \frac{6/9}{3/9} = 2$,

byl by testovací subjekt zařazen do třídy kontrolních subjektů.



Bayesův klasifikátor – kritéria

- Kritérium maximální aposteriorní pravděpodobnosti
- Kritérium minimální pravděpodobnosti chybného rozhodnutí
- Kritérium minimální střední ztráty
- Kritérium maximální pravděpodobnosti

Bayesův kl. – kritérium minimální střední ztráty

- chceme do výpočtů zahrnout ztrátu při chybné klasifikaci objektu ze třídy ω_s do třídy ω_r - ztráta definována pomocí **ztrátové funkce $\lambda(\omega_r|\omega_s)$**
- ztrátové funkce zapíšeme do matice ztrátových funkcí:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda(\omega_1|\omega_1) & \lambda(\omega_1|\omega_2) & \cdots & \lambda(\omega_1|\omega_K) \\ \lambda(\omega_2|\omega_1) & \lambda(\omega_2|\omega_2) & \cdots & \lambda(\omega_2|\omega_K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(\omega_K|\omega_1) & \lambda(\omega_K|\omega_2) & \cdots & \lambda(\omega_K|\omega_K) \end{bmatrix}$$

- prvky na diagonále $\lambda(\omega_1|\omega_1)$ bývají zpravidla nulové, protože při správném zařazení objektu ze třídy ω_1 do třídy ω_1 nevzniká žádná ztráta
- např. $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda(\omega_D|\omega_D) & \lambda(\omega_D|\omega_H) \\ \lambda(\omega_H|\omega_D) & \lambda(\omega_H|\omega_H) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ → víc penalizuji, když je pacient nesprávně zařazen do třídy kontrolních subjektů (ω_2), než když je kontrolní subjekt nesprávně zařazen do třídy pacientů (ω_1)
- např. $\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ → víc penalizuji, když je kontrolní subjekt nesprávně zařazen do třídy pacientů (ω_1), než když je pacient nesprávně zařazen do třídy kontrolních subjektů (ω_2)

Bayesův kl. – kritérium minimální střední ztráty

Odvození kritéria minimální střední ztráty:

- Celková střední ztráta J(a) je průměrná hodnota z dílčích středních ztrát:

$$\mathrm{J}(\mathbf{a}) = \int_{\chi} \sum_{s=1}^{R} \lambda(\omega_r | \omega_s).\mathrm{p}(\mathbf{x} | \omega_s).\mathrm{P}(\omega_s) d\mathbf{x}$$

- Chceme minimalizovat střední ztrátu:

$$\mathrm{J}(\mathbf{a}^*) = \min_r \int_{\chi} \sum_{s=1}^{R} \lambda(\omega_r | \omega_s).\mathrm{p}(\mathbf{x} | \omega_s).\mathrm{P}(\omega_s) d\mathbf{x}$$

- Hledáme minimální střední ztrátu, pokud ale chceme využít principu diskriminačních funkcí, budeme hledat maximum z výrazu se záporným znaménkem → diskriminační funkce potom bude tvaru:

$$\mathbf{g}_r(\mathbf{x}) = -\sum_{s=1}^{R} \lambda(\omega_r | \omega_s).\mathrm{p}(\mathbf{x} | \omega_s).\mathrm{P}(\omega_s)$$

Bayesův kl. – kritérium minimální střední ztráty

Diskriminační funkce obecně: $g_r(\mathbf{x}) = -\sum_{s=1}^{R} \lambda(\omega_r|\omega_s) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_s) \cdot P(\omega_s)$

Diskriminační funkce pro dichotomický klasifikátor:

$$g_1(\mathbf{x}) = -\lambda(\omega_1|\omega_1) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_1) \cdot P(\omega_1) - \lambda(\omega_1|\omega_2) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_2) \cdot P(\omega_2)$$
$$g_2(\mathbf{x}) = -\lambda(\omega_2|\omega_1) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_1) \cdot P(\omega_1) - \lambda(\omega_2|\omega_2) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_2) \cdot P(\omega_2)$$

Výpočet hranice pomocí diskriminačních funkcí:

$$g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x}) = 0$$

$$-\lambda(\omega_1|\omega_1) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_1) \cdot P(\omega_1) - \lambda(\omega_1|\omega_2) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_2) \cdot P(\omega_2) + \lambda(\omega_2|\omega_1) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_1) \cdot P(\omega_1) + \lambda(\omega_2|\omega_2) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_2) \cdot P(\omega_2) = 0$$

$$\big(\lambda(\omega_2|\omega_1) - \lambda(\omega_1|\omega_1)\big) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_1) \cdot P(\omega_1) + \big(\lambda(\omega_2|\omega_2) - \lambda(\omega_1|\omega_2)\big) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_2) \cdot P(\omega_2) = 0$$

$$\big(\lambda(\omega_2|\omega_1) - \lambda(\omega_1|\omega_1)\big) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_1) \cdot P(\omega_1) = \big(\lambda(\omega_1|\omega_2) - \lambda(\omega_2|\omega_2)\big) \cdot p(\mathbf{x}|\omega_2) \cdot P(\omega_2)$$

$\dfrac{p(\mathbf{x}|\omega_1)}{p(\mathbf{x}|\omega_2)} = \dfrac{\big(\lambda(\omega_1|\omega_2) - \lambda(\omega_2|\omega_2)\big)P(\omega_2)}{\big(\lambda(\omega_2|\omega_1) - \lambda(\omega_1|\omega_1)\big)P(\omega_1)}$ → kritérium minimální střední ztráty

Bayesův kl. – kritérium minimální střední ztráty

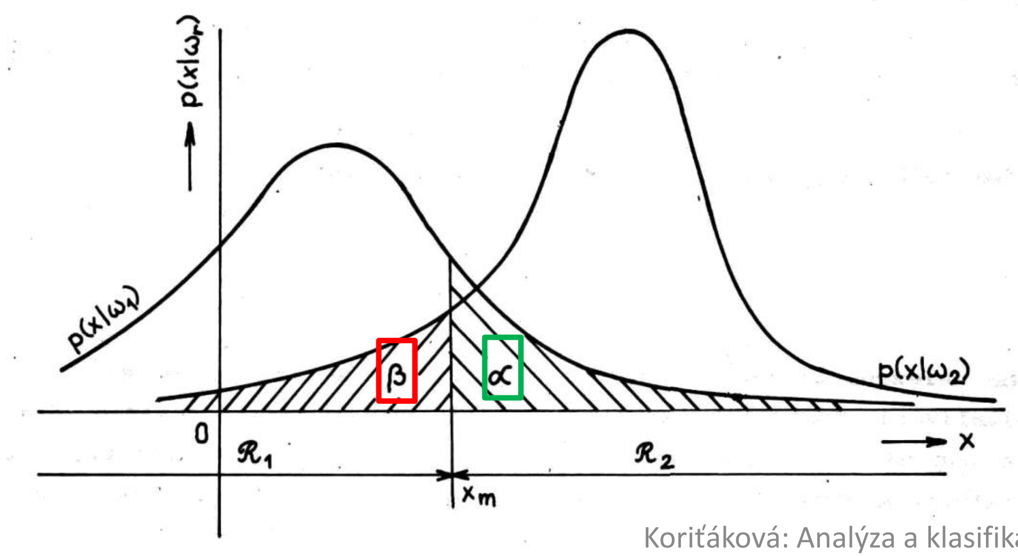
Celková střední ztráta v případě dvou tříd je:

$$J(\mathbf{a}) = \int_{\mathcal{R}_1} \sum_{s=1}^{2} \lambda(\omega_1|\omega_s).p(\mathbf{x}|\omega_s).P(\omega_s)d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{R}_2} \sum_{s=1}^{2} \lambda(\omega_2|\omega_s).p(\mathbf{x}|\omega_s).P(\omega_s)d\mathbf{x} =$$

$$= \lambda(\omega_1|\omega_1).P(\omega_1)\int_{\mathcal{R}_1} p(\mathbf{x}|\omega_1).d\mathbf{x} + \lambda(\omega_1|\omega_2).P(\omega_2)\boxed{\int_{\mathcal{R}_1} p(\mathbf{x}|\omega_2).d\mathbf{x}} +$$

$$+ \lambda(\omega_2|\omega_1).P(\omega_1)\boxed{\int_{\mathcal{R}_2} p(\mathbf{x}|\omega_1).d\mathbf{x}} + \lambda(\omega_2|\omega_2).P(\omega_2)\int_{\mathcal{R}_2} p(\mathbf{x}|\omega_2).d\mathbf{x} =$$

$$= \lambda(\omega_1|\omega_1).P(\omega_1).(1-\alpha) + \lambda(\omega_1|\omega_2).P(\omega_2).\boxed{\beta} + \lambda(\omega_2|\omega_1).P(\omega_1).\boxed{\alpha} + \lambda(\omega_2|\omega_2).P(\omega_2)(1-\beta)$$



Bayesův kl. – kritérium minimální střední ztráty

$$\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{\big(\lambda(\omega_D|\omega_H)-\lambda(\omega_H|\omega_H)\big)P(\omega_H)}{\big(\lambda(\omega_H|\omega_D)-\lambda(\omega_D|\omega_D)\big)P(\omega_D)}$$ → kritérium minimální střední ztráty

Pro náš příklad:

Levá strana je rovna: $\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{0{,}078}{0{,}056} = 1{,}4$

Pravá strana je při různém nastavení vah rovna:

- $\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (tzn., více penalizuji, pokud je pacient nesprávně zařazen do třídy kontrolních subjektů, než když je kontrolní subjekt nesprávně zařazen do třídy pacientů), pak pravá strana je rovna $\frac{(1-0)\cdot 0{,}5}{(2-0)\cdot 0{,}5} = 0{,}5$ a subjekt zařadím do třídy pacientů.
- $\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (penalizuji shodně nesprávné zařazení do třídy kontrolních subjektů i pacientů – kritérium minimální pravděpodobnosti chybného rozhodnutí), pak pravá strana je rovna $\frac{(1-0)\cdot 0{,}5}{(1-0)\cdot 0{,}5} = 1$ a subjekt zařadím do třídy pacientů.
- $\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (tzn., více penalizuji, pokud je kontrolní subjekt nesprávně zařazen do třídy pacientů, než když je pacient nesprávně zařazen do třídy kontrolních subjektů), pak pravá strana je rovna $\frac{(2-0)\cdot 0{,}5}{(1-0)\cdot 0{,}5} = 2$ a subjekt zařadím do třídy kontrolních subjektů.

Bayesův kl. – kritérium minimální střední ztráty

- **Poznámka:** pokud nastavíme matici ztrátových funkcí ve tvaru $\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, dostáváme kritérium minimální psti chybného rozhodnutí:

$$\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{\big(\lambda(\omega_D|\omega_H) - \lambda(\omega_H|\omega_H)\big)P(\omega_H)}{\big(\lambda(\omega_H|\omega_D) - \lambda(\omega_D|\omega_D)\big)P(\omega_D)}$$

$$\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{(1-0)P(\omega_H)}{(1-0)P(\omega_D)}$$

- $\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{P(\omega_H)}{P(\omega_D)} \rightarrow$ kritérium minimální psti chybného rozhodnutí

Bayesův klasifikátor – kritéria

- Kritérium maximální aposteriorní pravděpodobnosti
- Kritérium minimální pravděpodobnosti chybného rozhodnutí
- Kritérium minimální střední ztráty
- Kritérium maximální pravděpodobnosti

Bayesův kl. – kritérium maximální psti

- Předpoklady:
  - rovnoměrné zastoupení K tříd, tzn. $P(\omega_D) = P(\omega_H) = \frac{1}{K} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
  - nulové ztráty při správném rozhodnutí, tzn. $\lambda(\omega_D|\omega_D) = \lambda(\omega_H|\omega_H) = 0$
- pak získáváme po dosazení do obecného vzorce pro výpočet věrohodnostního poměru:

$$\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{(\lambda(\omega_D|\omega_H) - 0) \cdot 0{,}5}{(\lambda(\omega_H|\omega_D) - 0) \cdot 0{,}5}$$

- $\boxed{\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{\lambda(\omega_D|\omega_H)}{\lambda(\omega_H|\omega_D)} \rightarrow \text{kritérium maximální pravděpodobnosti}}$

Bayesův kl. – kritérium maximální psti

$\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{\lambda(\omega_D|\omega_H)}{\lambda(\omega_H|\omega_D)}$ → kritérium maximální pravděpodobnosti

Pro náš příklad:

Levá strana je rovna: $\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{0{,}078}{0{,}056} = 1{,}4$

Pravá strana je při různém nastavení vah rovna:

- $\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (tzn., více penalizuji, pokud je pacient nesprávně zařazen do třídy kontrolních subjektů, než když je kontrolní subjekt nesprávně zařazen do třídy pacientů), pak pravá strana je rovna $\frac{1}{2} = 0{,}5$ a subjekt zařadím do třídy pacientů.
- $\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (penalizuji shodně nesprávné zařazení do třídy kontrolních subjektů i pacientů), pak pravá strana je rovna $\frac{1}{1} = 1$ a subjekt zařadím do třídy pacientů.
- $\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (tzn., více penalizuji, pokud je kontrolní subjekt nesprávně zařazen do třídy pacientů, než když je pacient nesprávně zařazen do třídy kontrolních subjektů), pak pravá strana je rovna $\frac{2}{1} = 2$ a subjekt zařadím do třídy kontrolních subjektů.

Bayesův klasifikátor – kritéria

- Kritérium maximální aposteriorní pravděpodobnosti:

$$\frac{P(\omega_D|\mathbf{x})}{P(\omega_H|\mathbf{x})} = 1$$

- Kritérium minimální pravděpodobnosti chybného rozhodnutí

$$\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{P(\omega_H)}{P(\omega_D)}$$

- Kritérium minimální střední ztráty

$$\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{\big(\lambda(\omega_D|\omega_H) - \lambda(\omega_H|\omega_H)\big)P(\omega_H)}{\big(\lambda(\omega_H|\omega_D) - \lambda(\omega_D|\omega_D)\big)P(\omega_D)}$$

- Kritérium maximální pravděpodobnosti

$$\frac{p(\mathbf{x}|\omega_D)}{p(\mathbf{x}|\omega_H)} = \frac{\lambda(\omega_D|\omega_H)}{\lambda(\omega_H|\omega_D)}$$

Příprava nových učebních materiálů pro obor Matematická biologie

je podporována projektem OPVK

č. CZ.1.07/2.2.00/28.0043

„Interdisciplinární rozvoj studijního oboru Matematická biologie“

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ