

# Analýza a klasifikace dat – přednáška 4



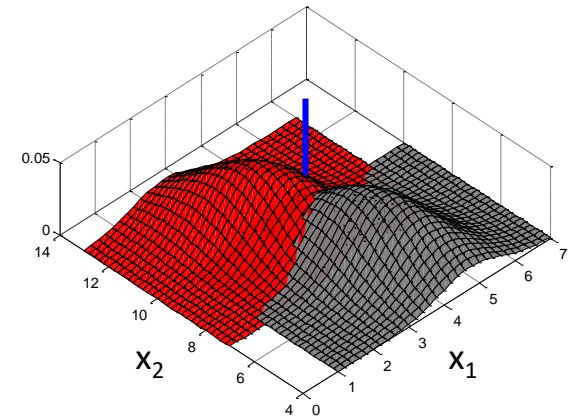
RNDr. Eva Koriťáková, Ph.D.

Podzim 2017

# Typy klasifikátorů – podle principu klasifikace

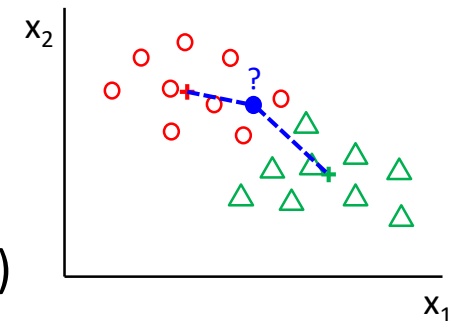
- **klasifikace pomocí diskriminačních funkcí:**

- diskriminační funkce určují míru příslušnosti k dané klasifikační třídě
- pro danou třídu má daná diskriminační funkce nejvyšší hodnotu



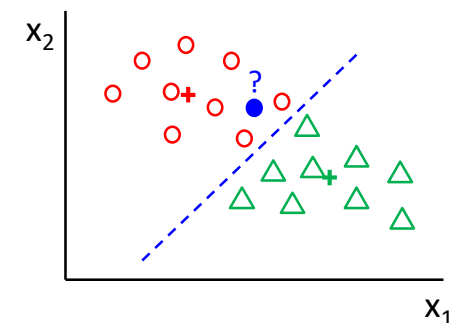
- **klasifikace pomocí vzdálenosti od etalonů klasif. tříd:**

- etalon = reprezentativní objekt(y) klasifikační třídy
- počet etalonů klasif. třídy různý – od jednoho vzorku (např. centroidu) po úplný výčet všech objektů dané třídy (např. u klasif. pomocí metody průměrné vazby)



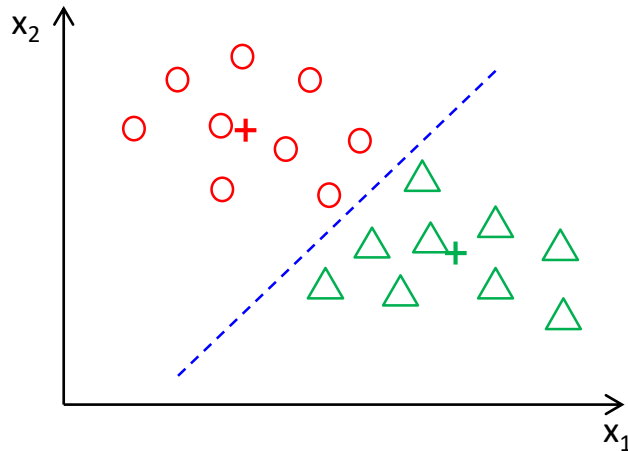
- **klasifikace pomocí hranic v obrazovém prostoru:**

- stanovení hranic (hraničních ploch) oddělujících klasifikační třídy

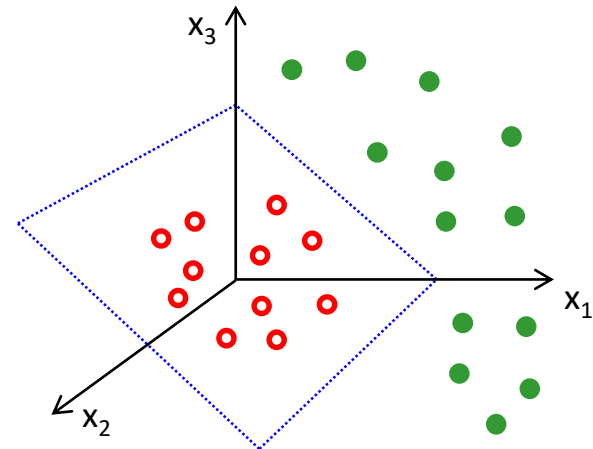


# Motivace

2-rozměrný prostor



3-rozměrný prostor



Hranice je nadplocha o rozměru o jedna menší než je rozměr prostoru

- ve 2-rozměrném prostoru je hranicí křivka (v lineárním případě přímka)
- v 3-rozměrném prostoru plocha (v lineárním případě rovina)

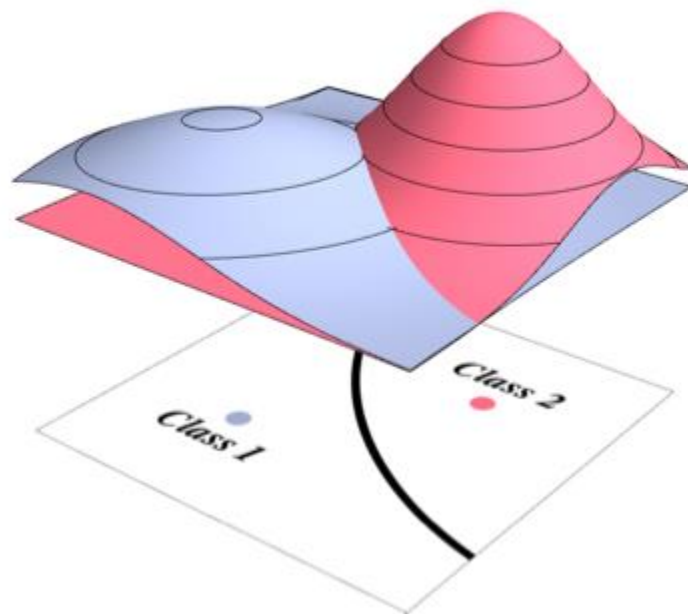
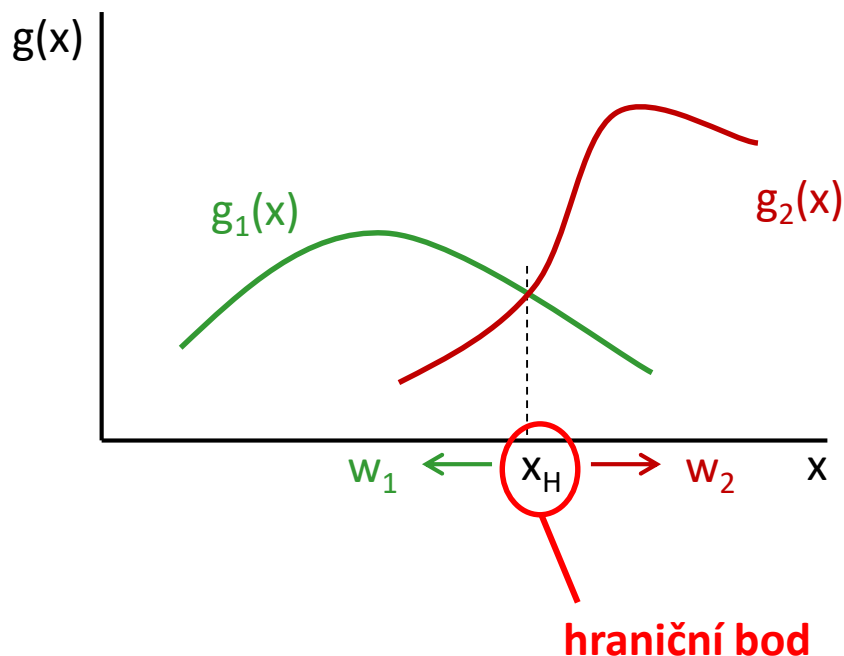
Hranice je tedy dána rovnicí:  $h(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0 = 0$

Výpočet hranice různými metodami (např. Fisherova LDA, SVM apod. – viz dále)

# Souvislost klasifikace pomocí diskriminačních funkcí s klasifikací pomocí hranic

Hranice mezi dvěma sousedními třídami  $\omega_1$  a  $\omega_2$  je určena průmětem průsečíku funkcí  $g_r(\mathbf{x})$  a  $g_s(\mathbf{x})$ , definovaného rovnicí  $g_r(\mathbf{x}) = g_s(\mathbf{x})$ , do obrazového prostoru, tzn.:  $h(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x}) = 0$

např. u Bayesova klasifikátoru:  $h(\mathbf{x}) = P(\omega_D|\mathbf{x}) - P(\omega_H|\mathbf{x}) = 0$



# Souvislost klasifikace podle minimální vzdálenosti s klasifikací pomocí hranic

- zařazení objektu  $\mathbf{x}$  do té třídy, jejíž etalon má od bodu  $\mathbf{x}$  minimální vzdálenost – tzn.  $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}_{rE} - \mathbf{x}\| = \min_{\forall s} \|\mathbf{x}_{sE} - \mathbf{x}\|$

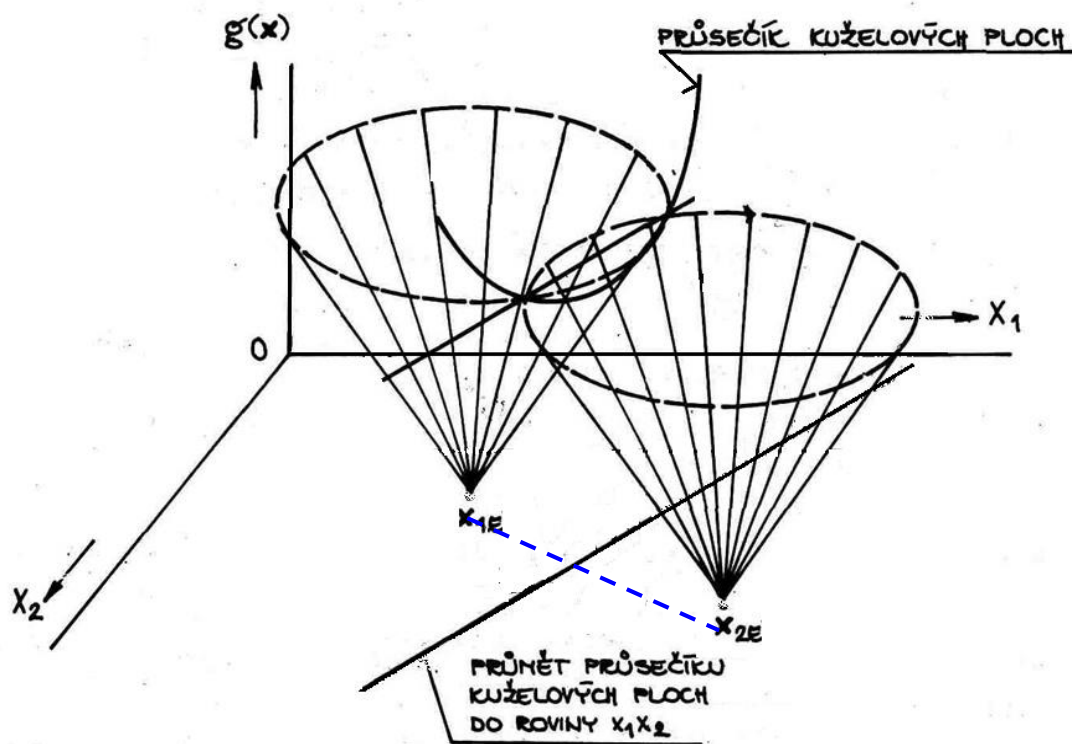
- v případě dvou tříd reprezentovaných etalony  $\mathbf{x}_{1E} = (x_{11E}, x_{12E})$  a  $\mathbf{x}_{2E} = (x_{21E}, x_{22E})$  ve dvoupríznakovém euklidovském prostoru je vzdálenost mezi obrazem  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  a libovolným z obou etalonů definována:

$$v(\mathbf{x}_{sE}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}_{sE} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(x_{s1E} - x_1)^2 + (x_{s2E} - x_2)^2}$$

- hledáme menší z obou vzdáleností, tj.  $\min_{s=1,2} v(\mathbf{x}_{sE}, \mathbf{x})$ , tzn.  $\min_{s=1,2} v^2(\mathbf{x}_{sE}, \mathbf{x})$  :

$$\begin{aligned} \min_{\forall s} v(\mathbf{x}_{sE}, \mathbf{x}) &\approx \min_{\forall s} v^2(\mathbf{x}_{sE}, \mathbf{x}) = \min_{\forall s} \left( (x_{s1E} - x_1)^2 + (x_{s2E} - x_2)^2 \right) = \\ &\min_{\forall s} \left( x_1^2 + x_2^2 - 2[x_{s1E}x_1 + x_{s2E}x_2 - (x_{s1E}^2 + x_{s2E}^2)/2] \right) \end{aligned}$$

# Souvislost klasifikace podle minimální vzdálenosti s klasifikací pomocí hranic



- diskriminační kuželové plochy se protínají v parabole a její průmět do obrazové roviny je přímka definovaná vztahem

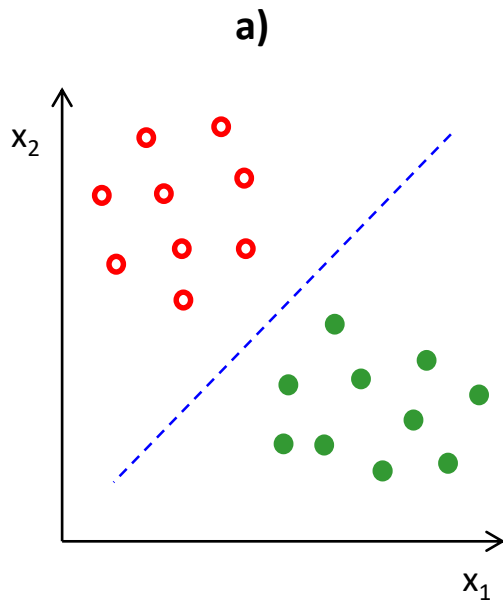
$$x_1(x_{11E} - x_{21E}) + x_2(x_{12E} - x_{22E}) - (x_{12E}^2 + x_{11E}^2 - x_{21E}^2 - x_{22E}^2)/2 = 0$$

- tato hraniční přímka mezi klasifikačními třídami je vždy **kolmá** na spojnici obou etalonů a tuto spojnici **půlí**
- souvislost s klasifikací podle diskriminačních funkcí

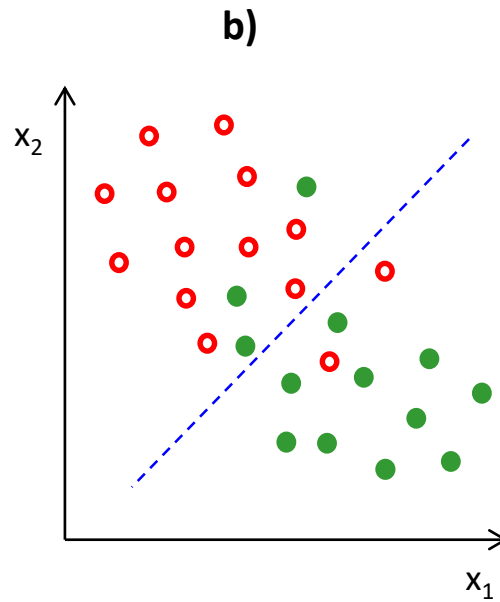
# Souvislost jednotlivých principů klasifikace - shrnutí

- Hranice mezi klasifikačními třídami jsou dány průmětem diskriminačních funkcí do obrazového prostoru.
- Klasifikace podle minimální vzdálenosti definuje hranici, která je kolmá na spojnici etalonů klasifikačních tříd a půlí ji.
- Princip klasifikace dle minimální vzdálenosti vede buď přímo, nebo prostřednictvím využití metrik podobnosti k definici diskriminačních funkcí a ty dle prvního ze zde uvedených pravidel k určení hranic mezi klasifikačními třídami.

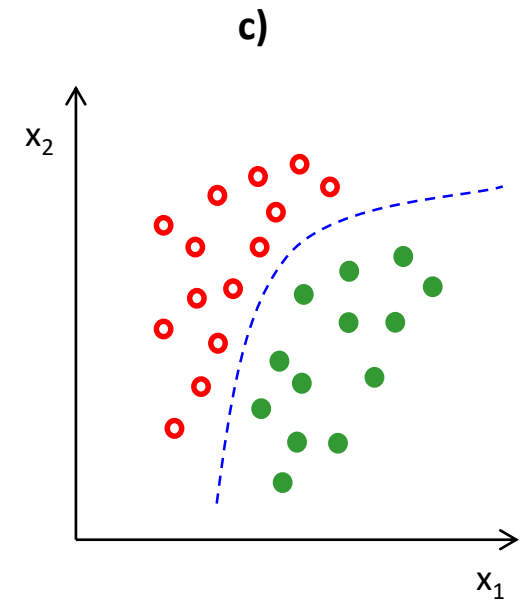
# Lineární separabilita



lineárně separabilní  
úloha



lineárně neseparabilní  
úloha  
lineárně separované  
klasifikační třídy



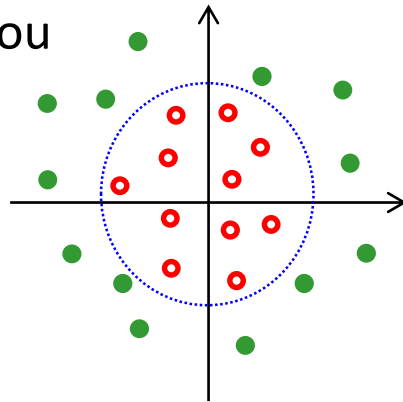
nelineárně  
separabilní úloha



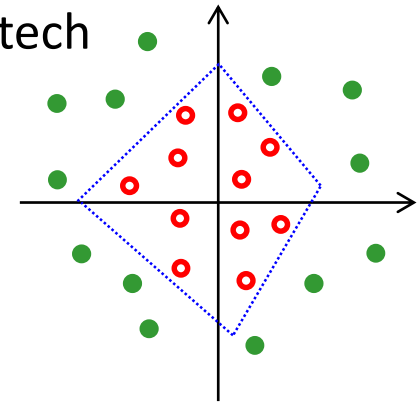
# Lineárně neseparabilní třídy – způsoby řešení

1. zachováme původní obrazový prostor a zvolíme nelineární hranici:

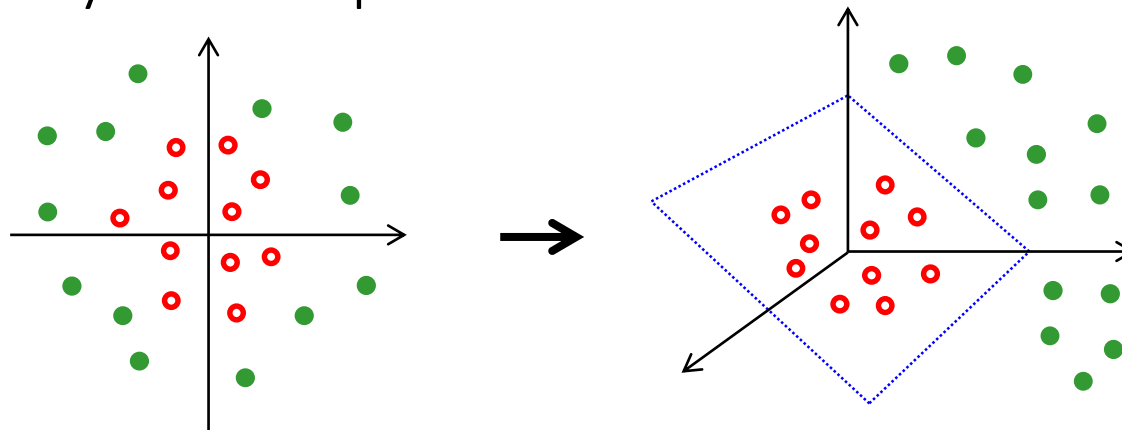
a) definovanou  
obecně



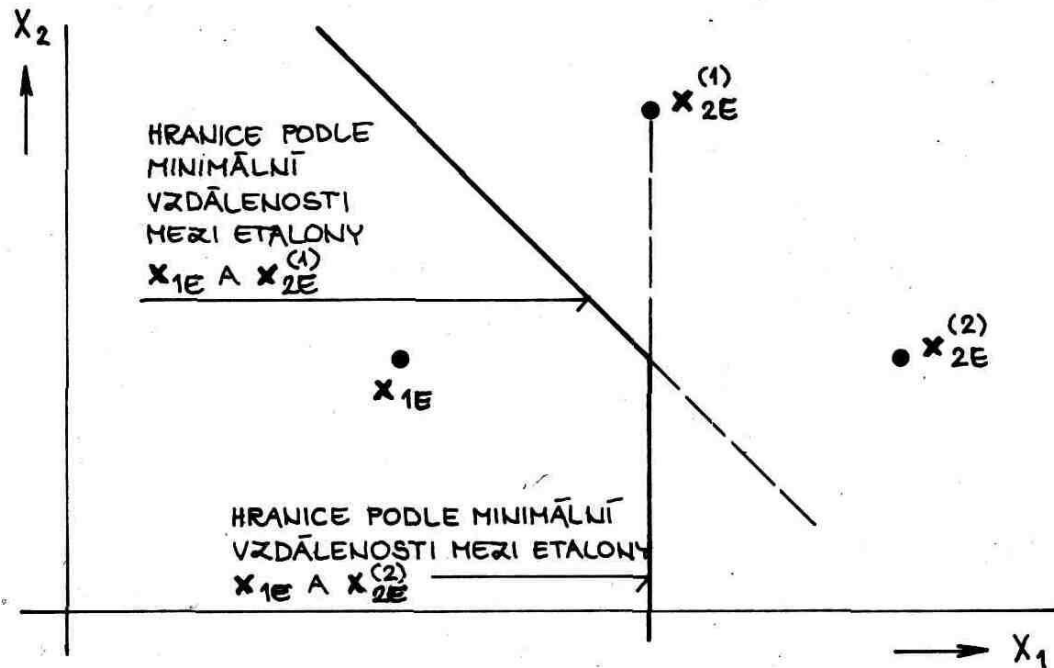
b) složenou po částech  
z lineárních úseků



2. zobrazíme původní  $p$ -rozměrný obrazový prostor nelineární transformací do nového  $m$ -rozměrného prostoru tak, aby v novém prostoru byly klasifikační třídy lineárně separabilní



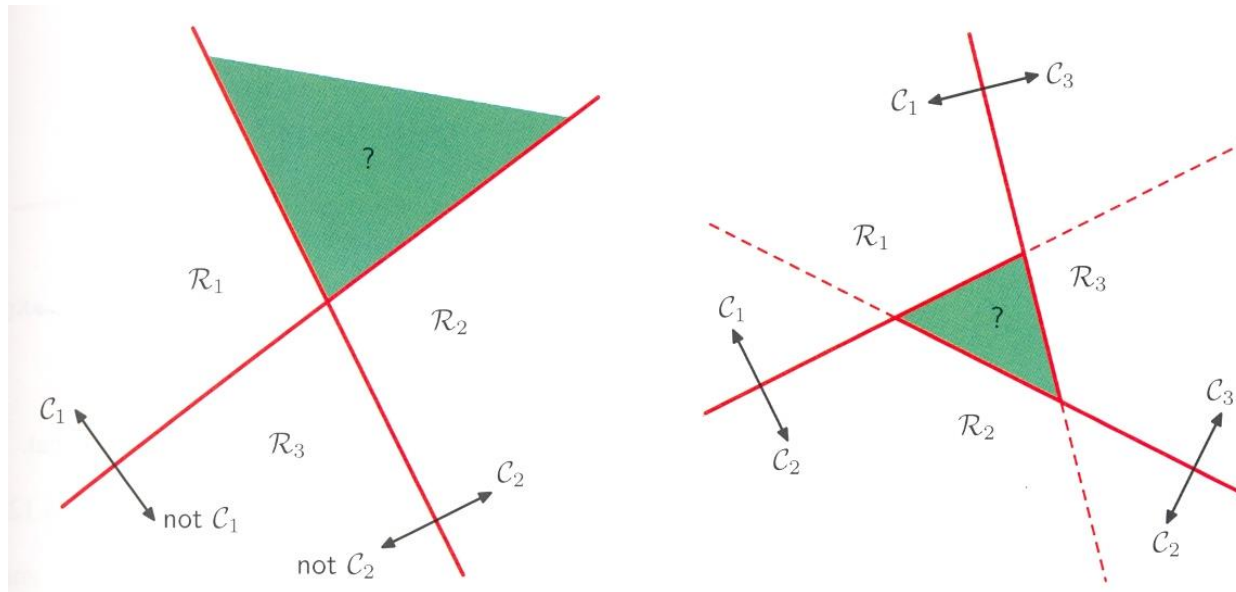
# Lineárně neseparabilní třídy – souvislost klasifikace dle minimální vzdálenosti s klasifikací pomocí hranic



Klasifikace podle minimální vzdálenosti s třídami reprezentovanými více etalony je „ekvivalentní“ klasifikaci s po částech lineární hraniční plochou

# Klasifikace s více třídami

1. klasifikace „jedna versus zbytek“  
R-1 hranice oddělí jednu klasifikační třídu od všech dalších
2. klasifikace „jedna versus jedna“  
 $R(R-1)/2$  binárních hranic mezi každými dvěma třídami



- problematickým úsekům se můžeme vyhnout použitím diskriminačních funkcí (do r-té třídy  $w_r$  zařadíme obraz  $x$  za předpokladu, že  $g_r(\mathbf{x}) > g_s(\mathbf{x})$  pro  $\forall r \neq s$ )  
→ klasifikační hranice je průmět průsečíku  $g_r(\mathbf{x}) = g_s(\mathbf{x})$  do obrazového prostoru  
– takto definovaný klasifikační prostor je vždy spojitý a konvexní

# Metody stanovení klasifikačních hranic

---

- Fisherova lineární diskriminace (FLDA)
- Algoritmus podpůrných vektorů
- Metoda nejmenších čtverců
- Perceptron

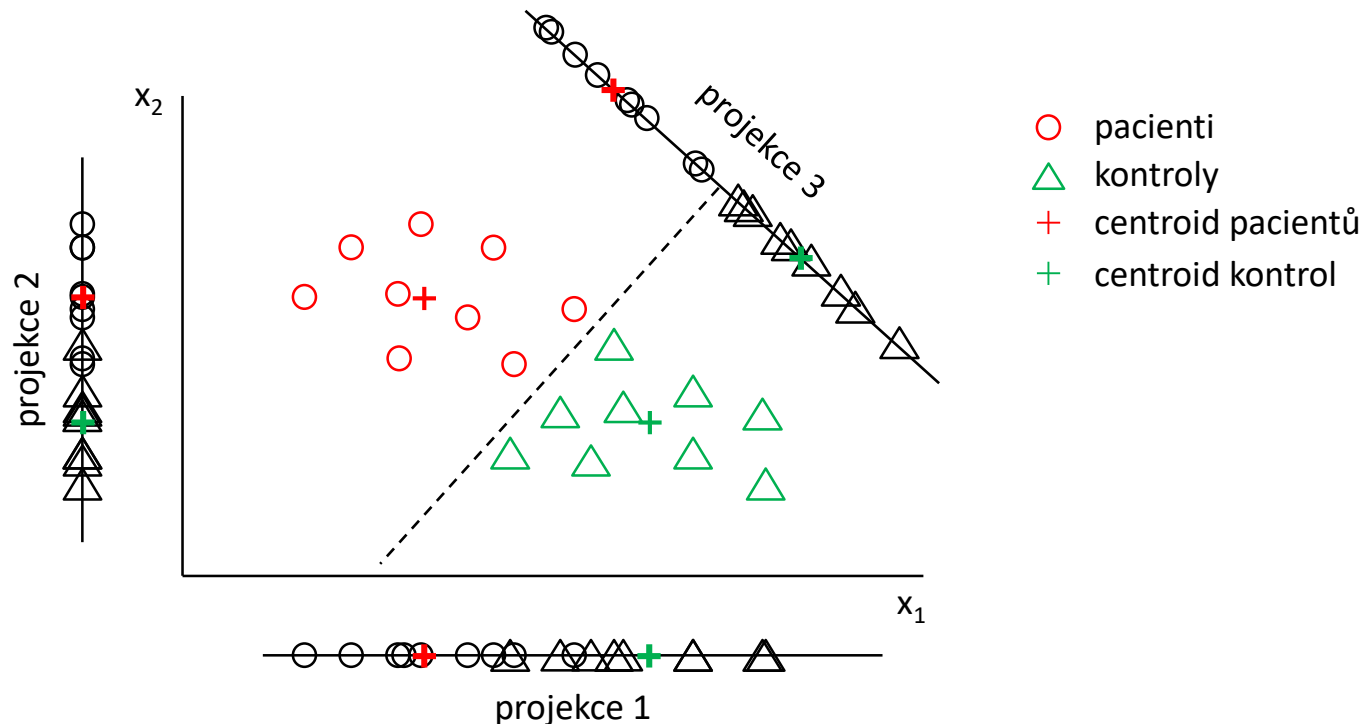
# Metody stanovení klasifikačních hranic

---

- Fisherova lineární diskriminace (FLDA)
- Algoritmus podpůrných vektorů
- Metoda nejmenších čtverců
- Perceptron

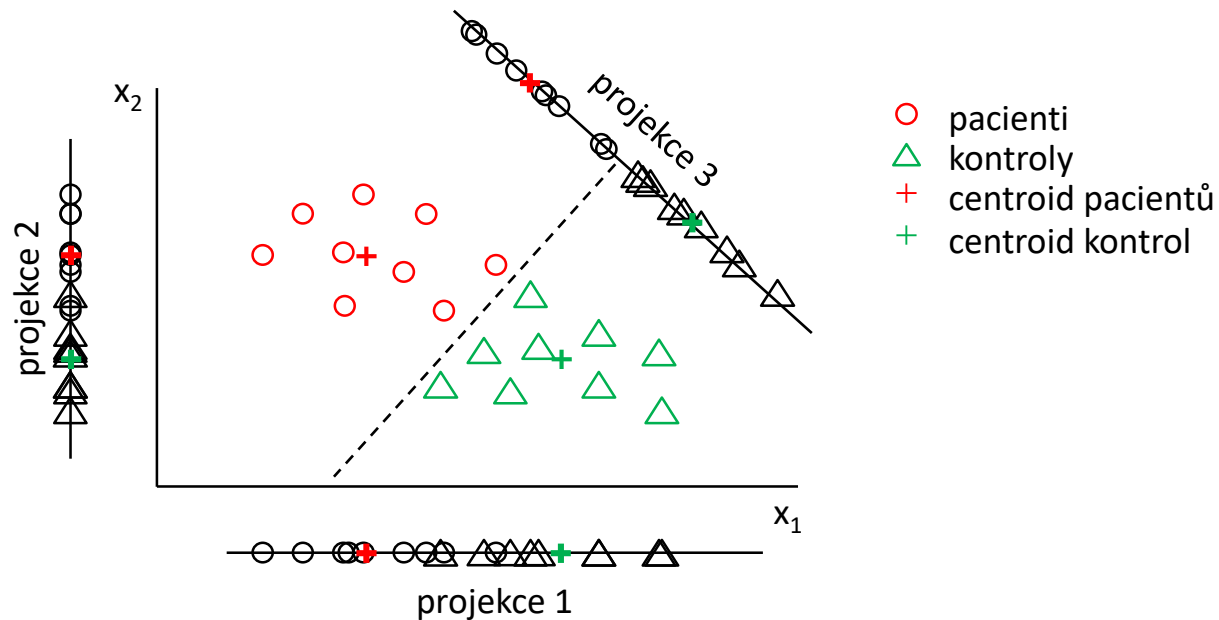
# Fisherova lineární diskriminace

- jiný název: Fisherova lineární diskriminační analýza (FLDA)
- použití pro lineární klasifikaci
- princip: transformace do jednorozměrného prostoru tak, aby se třídy od sebe maximálně oddělily



- předpoklad: vícerozměrné normální rozdělení u jednotlivých skupin

# Fisherova lineární diskriminace – princip



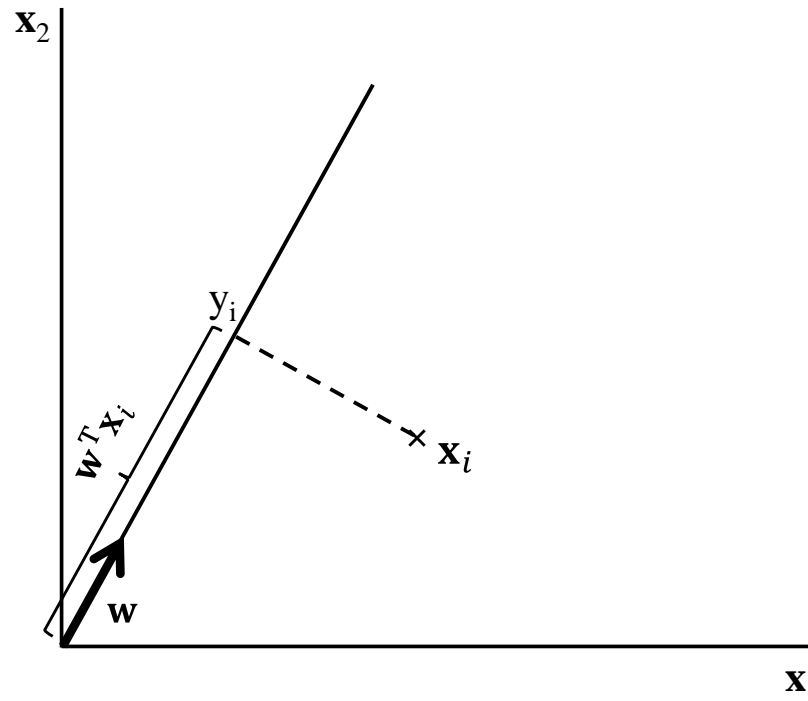
- podstatou FLDA tedy projekce do 1-D prostoru tak, že chceme:

- maximalizovat vzdálenost skupin
- minimalizovat variabilitu uvnitř skupin

- Fisherovo diskriminační kritérium je tedy ve tvaru:  $J(\mathbf{w}) = \frac{(\bar{y}_D - \bar{y}_H)^2}{s_D^2 + s_H^2}$

kde  $s_D^2$  a  $s_H^2$  jsou rozptyly uvnitř třídy pacientů resp. kontrol po projekci do 1-D prostoru a  $\bar{y}_D$  a  $\bar{y}_H$  jsou projekce centroidu třídy pacientů resp. kontrol

# Projekce do 1-D prostoru



$$y_i = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i$$

- bod  $\mathbf{x}_i$  reprezentuje  $i$ -tý subjekt
- $y_i$  je projekce bodu  $\mathbf{x}_i$
- $w$  je váhový vektor udávající směr 1-D prostoru



# Projekce do 1-D prostoru

- projekce centroidů skupiny pacientů a kontrolních subjektů:

$$\bar{\mathbf{x}}_D = \left[ \frac{1}{n_D} \sum_{i=1}^{n_D} x_{i1} \quad \frac{1}{n_D} \sum_{i=1}^{n_D} x_{i2} \quad \cdots \quad \frac{1}{n_D} \sum_{i=1}^{n_D} x_{ip} \right] \rightarrow \bar{y}_D = \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{x}}_D$$

$$\bar{\mathbf{x}}_H = \left[ \frac{1}{n_H} \sum_{i=1}^{n_H} x_{i1} \quad \frac{1}{n_H} \sum_{i=1}^{n_H} x_{i2} \quad \cdots \quad \frac{1}{n_H} \sum_{i=1}^{n_H} x_{ip} \right] \rightarrow \bar{y}_H = \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{x}}_H$$

- výpočet rozptylu uvnitř třídy pacientů po projekci do 1-D prostoru:

$$\begin{aligned} s_D^2 &= \frac{1}{n_D-1} \sum_{i=1}^{n_D} (y_i - \bar{y}_D)^2 = \frac{1}{n_D-1} \sum_{i=1}^{n_D} (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{x}}_D)^2 = \frac{1}{n_D-1} \sum_{i=1}^{n_D} \left( \mathbf{w}^T (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_D) \right)^2 \\ &= \mathbf{w}^T \left( \frac{1}{n_D-1} \sum_{i=1}^{n_D} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_D)(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_D)^T \right) \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{S}_D \mathbf{w} \end{aligned}$$

- analogicky výpočet rozptylu uvnitř třídy kontrol po projekci do 1-D prostoru:

$$s_H^2 = \cdots = \mathbf{w}^T \mathbf{S}_H \mathbf{w}$$

# Fisherovo diskriminační kritérium – rozepsání

- Fisherovo diskriminační kritérium:  $J(\mathbf{w}) = \frac{(\bar{y}_D - \bar{y}_H)^2}{s_D^2 + s_H^2}$
- rozepsání součtu rozptylů uvnitř jednotlivých tříd po transformaci do 1-D prostoru (tzn. rozepsání jmenovatele Fisherova diskř. kritéria):  
 $s_D^2 + s_H^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{S}_D \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbf{S}_H \mathbf{w} = \mathbf{w}^T (\mathbf{S}_D + \mathbf{S}_H) \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w}$ ,  
kde  $\mathbf{S}_W$  je suma čtverců variability uvnitř skupin a lze ji vypočítat jako:  $\mathbf{S}_W = \mathbf{S}_D + \mathbf{S}_H$   
v obecném případě (při nevyvážených počtech subjektů ve skupinách) –  
vážená suma čtverců variability uvnitř skupin:  $\mathbf{S}_W = \frac{(n_D - 1)\mathbf{S}_D + (n_H - 1)\mathbf{S}_H}{(n_D + n_H - 2)}$
- rozepsání rozdílu centroidů promítnutých do 1-D prostoru (tzn. rozepsání čitatele Fisherova diskř. kritéria):  
 $(\bar{y}_D - \bar{y}_H)^2 = (\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{x}}_D - \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{x}}_H)^2 = (\mathbf{w}^T (\bar{\mathbf{x}}_D - \bar{\mathbf{x}}_H))^2 = \mathbf{w}^T (\bar{\mathbf{x}}_D - \bar{\mathbf{x}}_H) (\bar{\mathbf{x}}_D - \bar{\mathbf{x}}_H)^T \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w}$ ,  
kde  $\mathbf{S}_B$  je suma čtverců variability mezi skupinami
- Fisherovo diskř. kritérium lze tedy vyjádřit jako:  $J(\mathbf{w}) = \frac{(\bar{y}_D - \bar{y}_H)^2}{s_D^2 + s_H^2} = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w}}$

# Fisherovo diskriminační kritérium – maximalizace

- Fisherovo diskriminační kritérium:  $J(\mathbf{w}) = \frac{(\bar{y}_D - \bar{y}_H)^2}{s_D^2 + s_H^2} = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w}}$
- Chceme maximalizovat  $J(\mathbf{w})$ , proto  $J(\mathbf{w})$  zderivujeme a položíme výraz roven 0:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} J(\mathbf{w}) = 0$$

$$\frac{\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w} \right) \mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w} - \mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w} \right)}{(\mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w})^2} = 0$$

$$\frac{(2\mathbf{S}_B \mathbf{w}) \mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w} - \mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w} (2\mathbf{S}_W \mathbf{w})}{(\mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w})^2} = 0$$

$$(\mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w}) \mathbf{S}_W \mathbf{w} = (\mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w}) \mathbf{S}_B \mathbf{w}$$

- u vektoru  $\mathbf{w}$  nás nezajímá jeho modul (tzn. velikost), jen jeho směr, proto můžeme pominout skalární členy  $\mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w}$  a  $\mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w}$ , čímž dostáváme:

$$\mathbf{S}_W \mathbf{w} \sim \mathbf{S}_B \mathbf{w}$$

# Fisherovo diskriminační kritérium – maximalizace

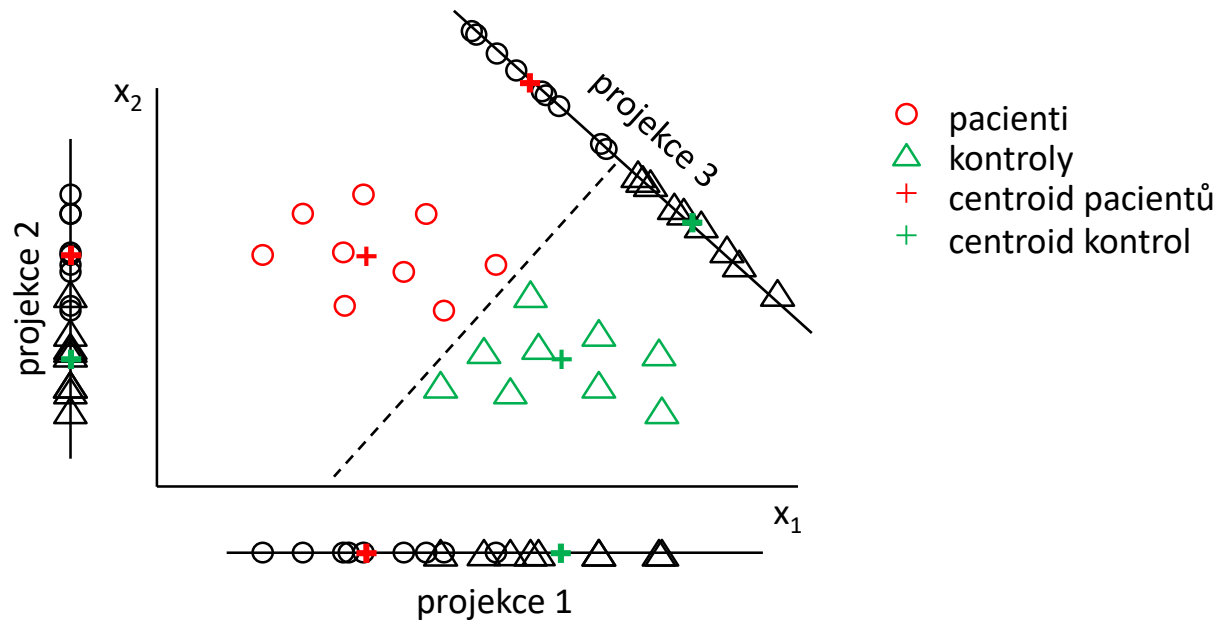
$$\mathbf{S}_W \mathbf{w} \sim \mathbf{S}_B \mathbf{w}$$

- protože  $\mathbf{S}_B \mathbf{w} = (\bar{\mathbf{x}}_D - \bar{\mathbf{x}}_H)(\bar{\mathbf{x}}_D - \bar{\mathbf{x}}_H)^T \mathbf{w} = (\bar{\mathbf{x}}_D - \bar{\mathbf{x}}_H) \cdot \alpha$ , kde  $\alpha$  je nějaký skalár  $\rightarrow \mathbf{S}_B \mathbf{w}$  má tedy směr  $(\bar{\mathbf{x}}_D - \bar{\mathbf{x}}_H)$  a jeho modul  $\alpha$  nás nezajímá, proto:

$$\mathbf{S}_W \mathbf{w} \sim (\bar{\mathbf{x}}_D - \bar{\mathbf{x}}_H)$$

- z čehož vypočteme váhový vektor  $\mathbf{w}$  jako:  $\mathbf{w} \sim \mathbf{S}_W^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_D - \bar{\mathbf{x}}_H)$

# Fisherova LDA – výpočet hranice

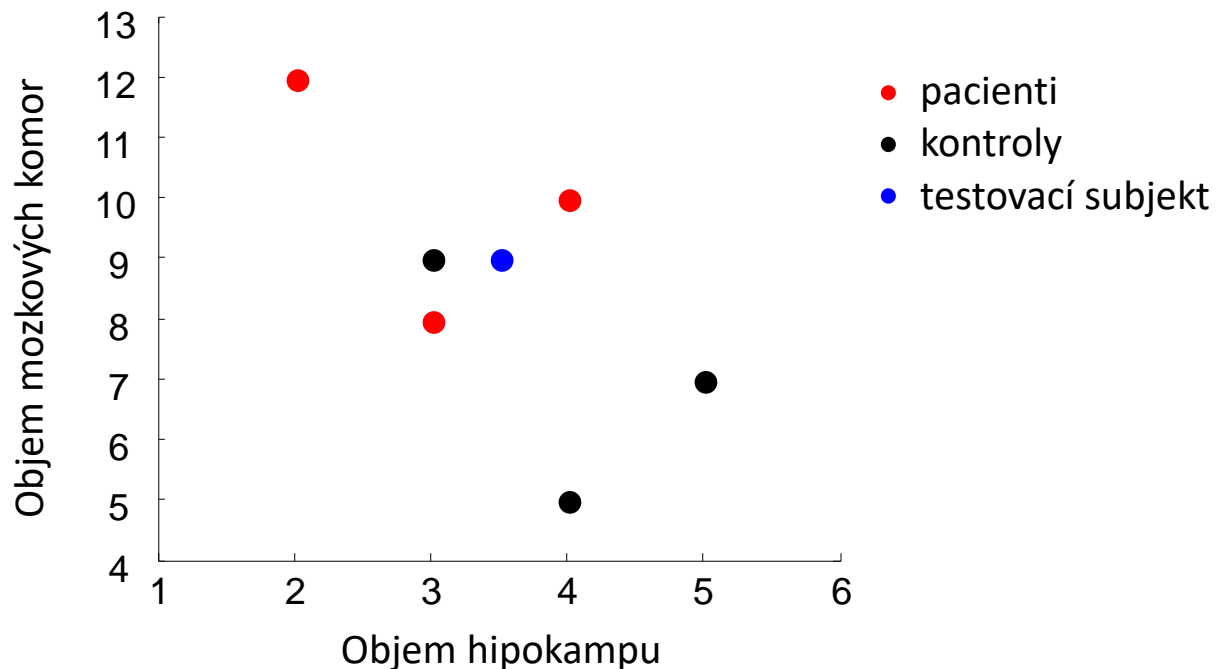


- hranice je dána:  $\mathbf{w}^T \mathbf{x} - \tilde{y} = 0$ , kde  $\tilde{y}$  je průmět hraničního bodu v 1-D prostoru a lze ho vypočítat jako:  $\tilde{y} = \frac{\bar{y}_D + \bar{y}_H}{2}$
- pokud chceme zařadit nový subjekt  $\mathbf{x}_0$  do jedné z daných tříd, jeho průmět do 1-D prostoru ( $y_0 = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_0$ ) srovnáme s průmětem hraničního bodu  $\tilde{y}$ :
  - Pokud  $y_0 < \tilde{y}$  (příčemž  $\bar{y}_H < \tilde{y}$ ), subjekt zařadíme do skupiny kontrolních subjektů
  - Pokud  $y_0 > \tilde{y}$  (příčemž  $\bar{y}_H < \tilde{y}$ ), subjekt zařadíme do skupiny pacientů

# Příklad

**Příklad:** Bylo provedeno měření objemu hipokampu a mozkových komor (v  $\text{cm}^3$ ) u 3 pacientů se schizofrenií a 3 kontrol:  $\mathbf{X}_D = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 10 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X}_H = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ .

Určete, zda testovací subjekt  $\mathbf{x}_0 = [3,5 \quad 9]$  patří do skupiny pacientů či kontrolních subjektů pomocí Fisherovy lineární diskriminace.



# Příklad – řešení

$$\mathbf{X}_D = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 10 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_H = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{x}}_D = [3 \quad 10] \quad \bar{\mathbf{x}}_H = [4 \quad 7] \quad \mathbf{S}_D = \mathbf{S}_H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = [3,5 \quad 9]$$

# Příprava nových učebních materiálů pro obor Matematická biologie

je podporována projektem OPVK

č. CZ.1.07/2.2.00/28.0043

„Interdisciplinární rozvoj studijního  
oboru Matematická biologie“



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ