Číselné soustavy

<u>Polyadické</u> **-** zobrazené mnohočlenem

Př. **desítková soustava**

$$5321 = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

Číslice tvořící zápis čísla jsou vlastně koeficienty polynomu obsahujícího mocniny základu - v tomto případě je základ 10 => desítková soustava.

Obecně: základem soustavy může být libovolné přirozené číslo větší než 1.

Zápis celého a desetinného čísla v soustavě o základu Z, obecné poznatky o číselných soustavách

Pro zápis celého čísla platí:

$$N = a_{m-1}Z^{m-1} + a_{m-2}Z^{m-2} + ... + a_1 Z^1 + a_0 Z^0$$

$N = \sum_{i=0}^{m-1} a_i Z^i$ pro $Z \geq 2$, kde: **Z** … základ, **m** … počet řádových míst , $\mathbf{a_i}$ … koeficient

Př.: $4863 = 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$, kde m = 4 a z = 10

Pro zápis desetinného čísla platí:

$N = a_{m-1}Z^{m-1} + a_{m-2}Z^{m-2} + ... + a_1 Z^1 + a_0 Z^0 + a_{-1}Z^{-1} + a_{-2}Z^{-2} + ...a_{-n}Z^{-n}$ pro $Z \geq 2$

kde: **Z** … základ, **m** … počet řádových míst , $\mathbf{a_i}$ … koeficient, **n** … počet desetinných míst

Př.: $25.52 = 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$, kde m = 2 ; z = 10 a n=2

Obecný zápis čísla:

$(a_{m-1} \quad a_{m-2} \ldots\ldots.. \; a_1 \quad a_0 \, \mathbf{,} \;\; a_{-1} \quad a_{-2} \ldots\ldots\ldots \; a_{-n} \,)_Z$

Př. $(10)_2$, $(135)_7$, $(455)_6$, $(1247,637)_8$

<u>Kapacita soustavy:</u> $K = Z^m$

Př. Z=10, m=3 **K=1000** možných čísel (0..999)

<u>Největší hodnota soustavy:</u> $N_{MAX} = Z^m - 1$

Př. Z=10, m=3 $\boldsymbol{N_{MAX}}$ **= 999** – největší číslo desítkové soustavy na 3 řádová místa.

Významné soustavy:

základ	soustava
2	binární
8	oktalová
16	hexadecimální
10	dekadická

Zobrazení čísel v různých číselných soustavách

Z=10	Z=2	Z=8	Z=16
1	1	1	1
5	101	5	5
10	1010	12	A
15	1111	17	F
20	10100	24	14

V soustavách kde **Z >10** je problém s jednoznačným zápisem čísel např.

$(12)_{16}$ nevíme zda je tím myšleno $(1)_{16}$ a $(2)_{16}$, nebo $(12)_{16}$, tím pádem, může mít jeden zápis 2 různé významy, a to je **nepřípustné**.

$(12)_{16} = 1 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 = (18)_{10}$ nebo $(12)_{16} = 12 \cdot 16^0 = (12)_{10}$. **????????**

V takových případech zavádíme (u soustav kde Z >10) pro zajištění jednoznačnosti zápisu další formy číslic- nejčastěji **písmena**.

V případě hexadecimální soustavy (Z=16) zavedeme písmena A,B,C,D,E,F. Kde:

$(\mathbf{A})_{16}=(10)_{10}$ $(\mathbf{D})_{16}=(13)_{10}$
$(\mathbf{B})_{16}=(11)_{10}$ $(\mathbf{E})_{16}=(14)_{10}$
$(\mathbf{C})_{16}=(12)_{10}$ $(\mathbf{F})_{16}=(15)_{10}$

Převody v soustavách

Typy převodů:

$(N)_X \longrightarrow (N)_{10}$
$(N)_{10} \longrightarrow (N)_X$
$(N)_X \longrightarrow (N)_{10} \longrightarrow (N)_Y$

a) $(N)_X \longrightarrow (N)_{10}$

- vyčíslením polynomu v desítkové soustavě

Př.

$(324)_8 = 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 192 + 16 + 4 = (212)_{10}$

$(110101)_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 4 + 1 = (53)_{10}$

$(AC)_{16} = 10 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 160 + 12 = (172)_{10}$

Příklady k samostatnému procvičení:

	Výsledky:
a) $(561)_8$	a) $(369)_{10}$
b) $(ABBA)_{16}$	b) $(43962)_{10}$
c) $(10011001)_2$	c) $(153)_{10}$
d) $(30424)_8$	d) $(12564)_{10}$
e) $(AB12C4)_{16}$	e) $(11211460)_{10}$
f) $(1100110001)_2$	f) $(817)_{10}$

b) $(N)_{10} \longrightarrow (N)_X$

- postupným dělením základem, zbytky sepisujeme v opačném pořadí.

<u>Př.:</u> $(25)_{10} \longrightarrow (N)_2$

25 : 2 = 12 1
12 : 2 = 6 0
6 : 2 = 3 0
3 : 2 = 1 1
1 : 2 = 0 1 ↑ = $\overset{16\ 8\ 4\ 2\ 1}{\mathbf{(1\,1\,0\,0\,1)_2}}$

$(25)_{10} \longrightarrow (N)_8$

25 : 8 = 3 1
3 : 8 = 0 3 ↑ = $\overset{8\ 1}{\mathbf{(3\,1)_8}}$

$(187)_{10} \longrightarrow (N)_{16}$

187 : 16 = 11 11
11 : 16 = 0 11 ↑ = $\overset{16\ 1}{\mathbf{(B\,B)_{16}}}$

U každého převodu z desítkové soustavy provádějte zkoušku výpočtu zpětným vyčíslením výsledku v desítkové soustavě. (postup viz ***a)***)

Příklady k samostatnému procvičení:

	Výsledky:
a) $(67)_{10} \longrightarrow (N)_2$	a) $(1000011)_2$
b) $(67)_{10} \longrightarrow (N)_8$	b) $(103)_8$
c) $(36)_{10} \longrightarrow (N)_{16}$	c) $(24)_{16}$

c) $(N)_X \longrightarrow (N)_{10} \longrightarrow (N)_Y$

$(1000)_5 = (N)_{10} = (N)_7$

$(1000)_5 = 1 \cdot 5^3 = (125)_{10}$

$(125)_{10} = (236)_7$

125 : 7 = 17 6
17 : 7 = 2 3
2 : 7 = 0 2 ↑ = $\mathbf{(236)_7}$

$(2122)_3 = (N)_{10} = (N)_6$

$(2122)_3 = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 27 + 9 + 6 + 2 = (71)_{10}$

$(71)_{10} = (155)_6$

71 : 6 = 11 5
11 : 6 = 1 5
1 : 6 = 0 1 ↑ = $\mathbf{(155)_6}$

Příklady k samostatnému procvičení:

	Výsledek:
a) $(314)_6 \longrightarrow (N)_{10} \longrightarrow (N)_8$	a) $(118)_{10} = (166)_8$

Binární soustava
počítače pracují na bázi binární soustavy. Ale pro svůj rozsáhlý zápis je binární soustava nepřehledná. Proto někdy pracujeme se soustavami odvozenými od binární. Např. Oktalová, Hexadecimální. (Připomenutí : $8=2^3$ $16=2^4$)

Pro rychlejší převod z binární do oktalové soustavy :
- seskupíme v zápisu číslice do skupin po třech (začínáme zprava) a každou takto získanou trojici vyjádříme jako číslici v oktalové soustavě.

Př.
$(1011001100)_2=(N)_8$ $\quad\quad (\underset{1}{\underline{1}}\ \underset{3}{\underline{011}}\ \underset{1}{\underline{001}}\ \underset{4}{\underline{100}})_2= \mathbf{(1314)_8}$

Tím, že oddělujeme trojice čísel, max. možná výsledná číslice v oktalové soustavě je 7, což vyhovuje definici této soustavy. Pokud nám při dělení binárního čísla na trojice číslic vlevo v poslední skupině zbývá méně než 3 číslice, můžeme skupinu beztrestně doplnit nulami **vlevo** do počtu 3 číslic.

Při převodu z binární do hexadecimální soustavy postupujeme obdobně s tím rozdílem, že seskupujeme číslice po čtyřech.(začínáme opět zprava).

Př.
$(1011001100)_2=(N)_{16}$ $\quad\quad (\underset{2}{\underline{10}}\ \underset{C}{\underline{1100}}\ \underset{C}{\underline{1100}})_2= \mathbf{(2CC)_{16}}$

Opačně převádíme analogicky, ale musíme dát pozor na to, že:

- při převodu z oktalové do binární soustavy každá oktalová číslice odpovídá právě **třem** binárním
- při převodu z hexadecimální do binární soustavy každá hexad. číslice odpovídá právě **čtyřem** binárním

Př. $(EF6)_{16}= (N)_2$ $\quad\quad (EF6)_{16}= \mathbf{(\ \underset{E}{\underline{1110}}\ \underset{F}{\underline{1111}}\ \underset{6}{\underline{0110}}\ )_2}$!!! Každá hexadecimální číslice !!!!! představuje **právě 4** binární číslice

- číslo 6 se dá v binární soustavě vyjádřit jako $(110)_2$, ale v tomto příkladě při převodu z hexad. soustavy je nutné ho vyjádřit jako $(0110)_2$, abychom dodrželi 4 platné binární číslice pro jednu hexadecimální!!!

Příklady k samostatnému procvičení:

$(10110011101)_2 \longrightarrow (N)_8$
$(10110011101)_2 \longrightarrow (N)_{16}$
$(2137)_8 \longrightarrow (N)_2$
$(DCA2)_{16} \longrightarrow (N)_2$

<u>Převody desetinných čísel</u>

- převádíme celé číslo(viz nahoře) a zlomek.
<u>Zlomek</u> - postupným násobením řádem základu a sepisujeme ve stejném pořadí
- Ukončení násobení - výsledkem násobení základem je celé číslo
  - naleznu periodu ve výpočtu

Př. $(25{,}75)_{10} \longrightarrow (N)_2$

$(25)_{10} = (11001)_2$

$(0{,}75)_{10} =$ zbytek

$0{,}75 \cdot 2 = 1{,}5$ 1

$0{,}5 \cdot 2 = 1$ 1 $= (0{,}11)_2$

$(25{,}75)_{10} = \mathbf{(11001{,}11)_2}$

Př. $(25{,}75)_{10} \longrightarrow \mathbf{(N)_8}$

$(25)_{10} = (31)_2$

$(0{,}75)_{10} =$ zbytek

$0{,}75 \cdot 8 = 6$ 6 $= (0{,}6)_8$

$(25{,}75)_{10} = \mathbf{(31{,}6)_8}$

Př. $(31{,}6)_8 \longrightarrow \mathbf{(N)_{10}}$

$(31{,}6)_8 = 3 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 + 6 \cdot 8^{-1} = 25{,}75$

Př. $(\ 11001{,}11\ )_2 \longrightarrow \mathbf{(N)_8}$

$(\underbrace{011}_{3}\ \underbrace{001}_{1},\ \underbrace{110}_{6})_2 = (31{,}6)_8$ …..trik se seskupováním číslic do skupin, v celé části čísla na levou stranu zapíšu 0, aby nejlevější seskupení byla trojice, totéž udělám v desetinné části čísla na **pravé** straně - nuly připisuji do nejpravější skupiny -nezměním tak hodnotu čísla.

Pozor !

Připisování nul na **pravou** stranu bez změny hodnoty čísla je možné jen za desetinnou čárkou, před ní to nefunguje! Před desetinnou čárkou lze připisovat nuly na **levou** stranu.

opět analogicky z binární do hexadecimální soustavy

Příklady k samostatnému procvičení:

a) $(12{,}126)_{16} \longrightarrow (N)_{10}$
b) $(110111001{,}10110)_2 \longrightarrow (N)_{16}$
c) $(110111001{,}10110)_2 \longrightarrow (N)_8$

Výsledky:

a) $(18{,}071044921875)_{10}$
b) $(1B9{,}B)_{16}$
c) $(671{,}54)_8$

Pozn.

Narozdíl od matematiky musíme v programování každé číslo vyjadřovat pomocí konečného (omezeného) počtu číslic. Nelze tedy všechny hodnoty vyjádřit zcela přesně ale jen s konečnou přesností.

Např. $(0{,}4)_{10} \longrightarrow \mathbf{(N)_2}$

$0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$ 0
$0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6$ 1
$0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2$ 1 $(0{,}4)_{10} = \mathbf{(0{,}0110)_2}$
$0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$ 0
$0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$ 0 $(0{,}0110)_2 = (0{,}375)_{10}$ tj. Chyba při převodu je $(0{,}025)_{10}$
$0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6$ 1 $(0{,}01100110)_2 = (0{,}3984)_{10}$ tj. Chyba při převodu je $(0{,}0016)_{10}$

……..atd. výpočet vede na periodické číslo binární číslo by mělo nekonečně mnoho číslic za desetinnou čárkou- opakující se perioda „0110“ (toto je příklad, kdy vyjádření téhož čísla v jedné soustavě pomocí konečného počtu číslic může převodem do jiné soustavy nabýt nekonečně mnoha číslic).

Základní aritmetické operace

a) sčítání (vždy v dané soustavě: dekadické, oktalové, …)

sestavujeme tabulky přenosů např. pro binární soustavu:

+	0	1
0	**0**	**1**
1	**1**	**!!!10!!!**

Při sčítání 1 a 1 v binární soustavě je výsledkem 10 !!! – jednička se přenáší do vyššího levějšího řádu – stejný systém jako přenášení v desítkové soustavě při sčítání.

Př.

$(36)_{10}$	$(100100)_2$	$(44)_8$	$(24)_{16}$	$(1011,110)_2$
$(28)_{10}$	$(11100)_2$	$(34)_8$	$(1C)_{16}$	$(1010,101)_2$
$(64)_{10}$	**$(1000000)_2$**	**$(100)_8$**	**$(40)_{16}$**	**$(10110,011)_2$**

pozor na přenosy do vyšších(levějších) řádů.

Příklady k samostatnému procvičení:

a) $(10110110)_2 + (11011101)_2$
b) $(11011011)_2+(10001101)_2$
c) $(74321)_8+(625)_8$
d) $(A1B2)_{16}+(F3E4)_{16}$

Výsledky

a) $(110010011)_2$
b) $(101101000)_2$
c) $(75146)_8$
d) $(19596)_{16}$

b) odečítání - převádíme na sčítání s doplňkem (tj. k menšenci přičítáme doplněk menšitele do N_{max})

Pro doplněk platí: $D = (Z^m - 1) - X$

Kde: **m** **…** počet míst menšence
X **…** menšitel
Z **…** základ soustavy

Př. $(385)_{10}$......menšenec
$-(68)_{10}$......menšitel
$(N)_{10}$

Doplněk $(68)_{10}$ do $(999)_{10}$ = **$(931)_{10}$**

$(931)_{10}$ **doplněk**
$+(385)_{10}$ **menšenec**

$\boxed{1}316$
+1 kruhový přenos

$(317)_{10}$

Př. $(34)_8$ Doplněk $(16)_8$ do $(77)_8$ = **$(61)_8$**

$$\begin{array}{r} (34)_8 \\ -(16)_8 \\ \hline (N)_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (61)_8 & \textbf{doplněk} \\ +(34)_8 & \textbf{menšenec} \\ \hline \boxed{1}15 & \\ +1 & \textbf{kruhový přenos} \\ \hline (16)_8 & \end{array}$$

Př. $(24)_{16}$ Doplněk $(1C)_{16}$ do $(FF)_{16}$ = **$(E3)_{16}$**

$$\begin{array}{r} (24)_{16} \\ -(1C)_{16} \\ \hline (N)_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (E3)_{16} & \textbf{doplněk} \\ +(24)_{16} & \textbf{menšenec} \\ \hline \boxed{1}07 & \\ +1 & \textbf{kruhový přenos} \\ \hline (8)_{16} & \end{array}$$

Příklady k samostatnému procvičení:

Výsledky

a) $(364)_8$ - $(172)_8$ a) $(172)_8$

b) $(C6)_{16}$ - $(A3)_{16}$ b) $(23)_{16}$