ČASOVÉ ŘADY
(SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY)

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

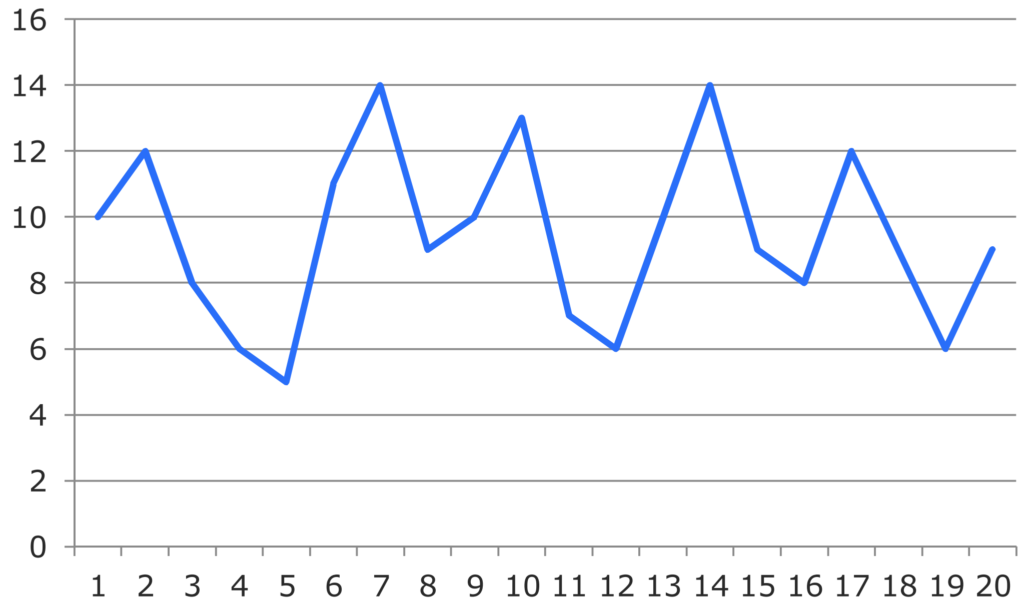
UKB, A29 – RECETOX, dv.č.112
holcik@iba.muni.cz

III. ČASOVÉ ŘADY

PŘÍKLAD TAK TROCHU NA VYSVĚTLENOU

ZADÁNÍ

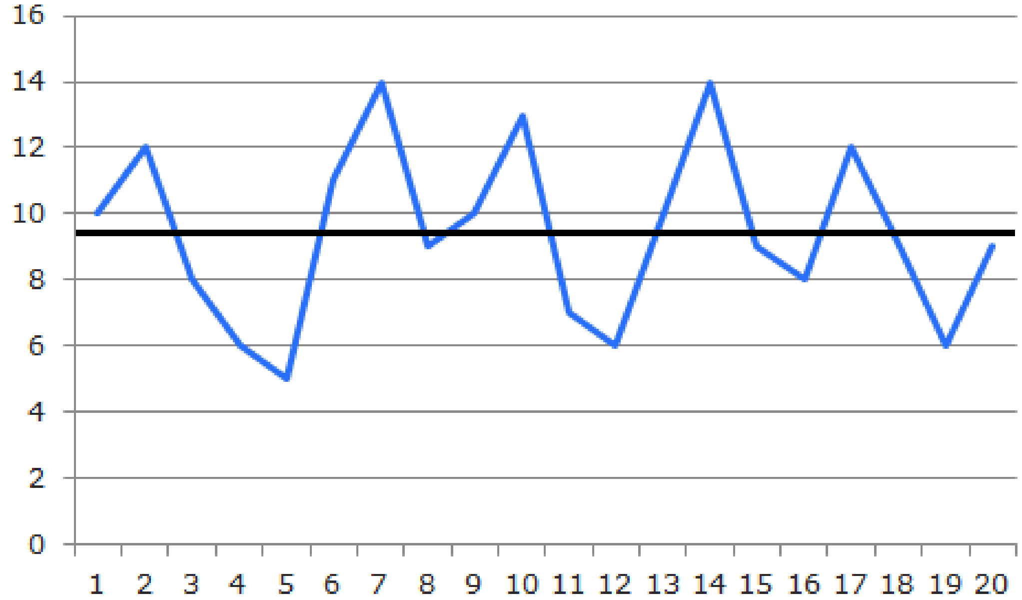
10 12 8 6 5 11 14 9 10 13 7 6 10 14 9 8 12 9 6 9



ZADÁNÍ

☑ průměrná hodnota:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(k) = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}\cdot x(k) = \sum_{k=1}^{N} a_n \cdot x(k)$$



ZADÁNÍ

- ☑ průměrná hodnota:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} \cdot x(k) = \sum_{k=1}^{N} a_n \cdot x(k)$$

- ☑ klouzavý průměr:

pro m liché

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{m}\sum_{i=k-(m-1)\,\mathrm{div}\,2}^{k+(m-1)\,\mathrm{div}\,2} x(k) = \sum_{i=k-(m-1)\,\mathrm{div}\,2}^{k+(m-1)\,\mathrm{div}\,2} \frac{1}{m} \cdot x(k) = \sum_{i=k-(m-1)\,\mathrm{div}\,2}^{k+(m-1)\,\mathrm{div}\,2} a_m \cdot x(k)$$

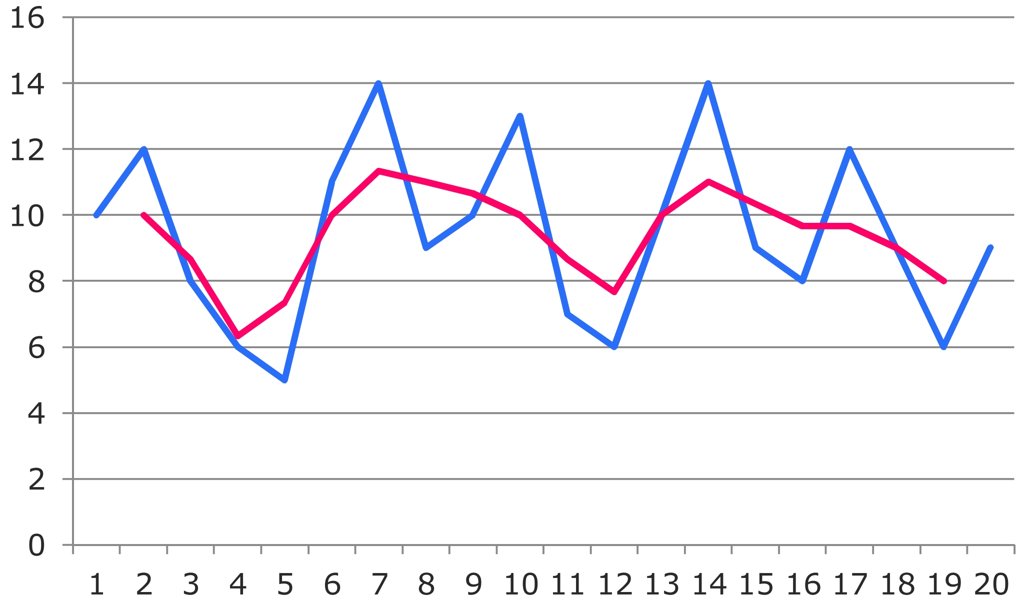
pro m sudé třeba

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{m}\sum_{i=-m\,\mathrm{div}\,2+1}^{(m\,\mathrm{div}\,2)} x(k-i) = \sum_{i=-m\,\mathrm{div}\,2+1}^{(m\,\mathrm{div}\,2)} \frac{1}{m} \cdot x(k-i) = \sum_{i=-m\,\mathrm{div}\,2+1}^{(m\,\mathrm{div}\,2)} a_i \cdot x(k-i)$$

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

1	10	
2	12	10,0
3	8	8,7
4	6	6,3
5	5	7,3
6	11	10,0
7	14	11,3
8	9	11,0
9	10	10,7
10	13	10,0
11	7	8,7
12	6	7,7
13	10	10,0
14	14	11,0
15	9	10,3
16	8	9,7
17	12	9,7
18	9	9,0
19	6	8,0
20	9	

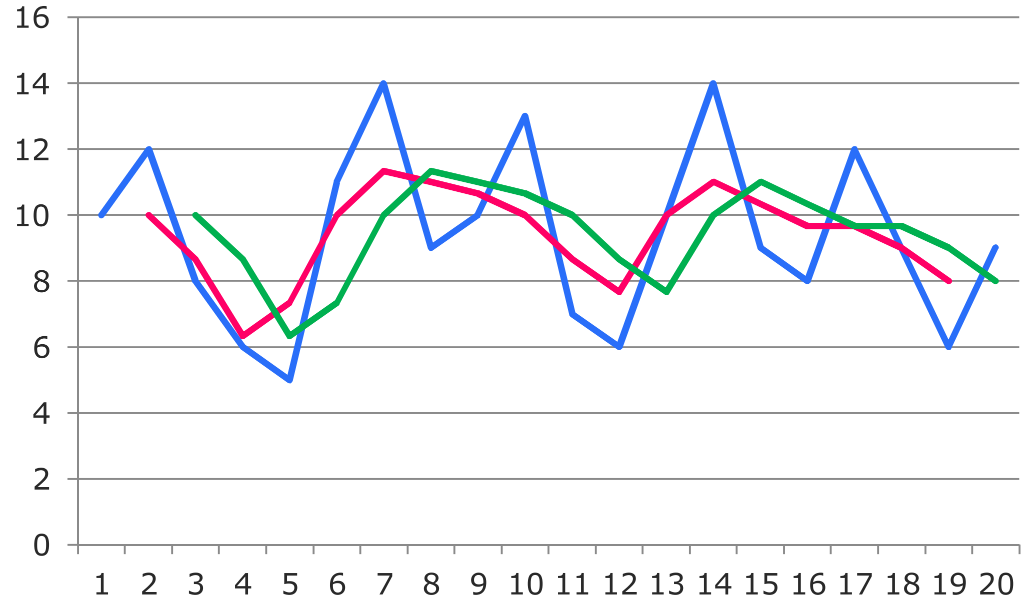


KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

1	10	?	?
2	12	10,0	?
3	8	8,7	10,0
4	6	6,3	8,7
5	5	7,3	6,3
6	11	10,0	7,3
7	14	11,3	10,0
8	9	11,0	11,3
9	10	10,7	11,0
10	13	10,0	10,7
11	7	8,7	10,0
12	6	7,7	8,7
13	10	10,0	7,7
14	14	11,0	10,0
15	9	10,3	11,0
16	8	9,7	10,3
17	12	9,7	9,7
18	9	9,0	9,7
19	6	8,0	9,0
20	9	?	8,0

přechodný děj

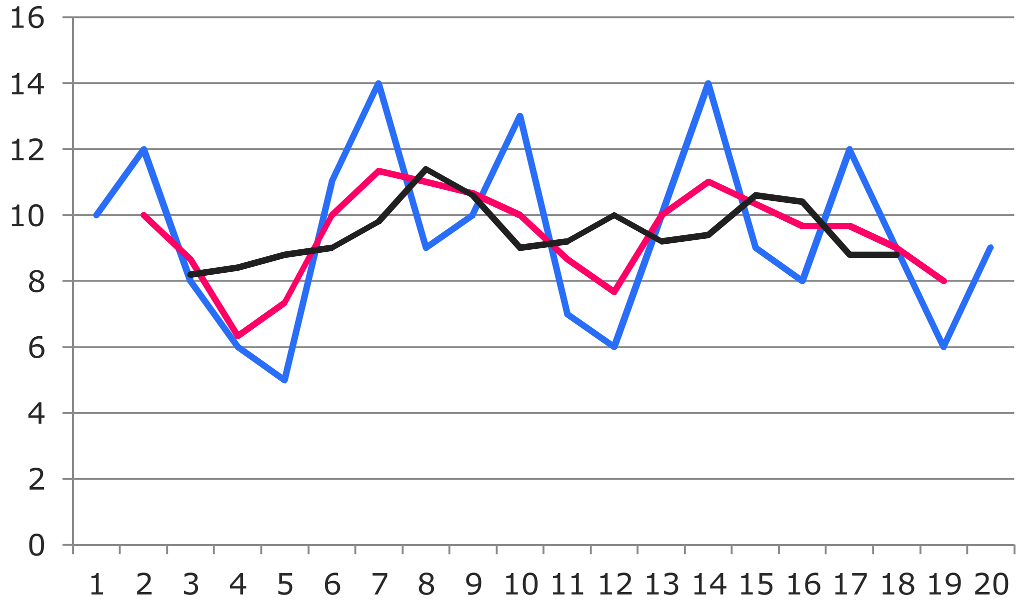


$$\bar{x}(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot x(k-i)$$

KAUZALITA ≡
≡ PŘÍČINNOST

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

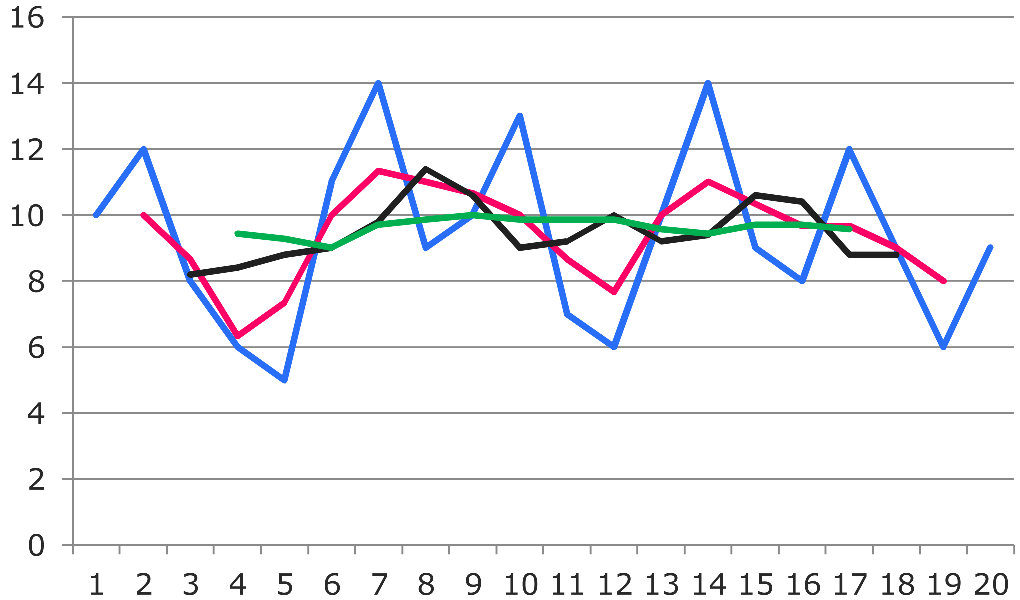
		m = 3	m = 5
1	10		
2	12	10,0	
3	8	8,7	8,2
4	6	6,3	8,4
5	5	7,3	8,8
6	11	10,0	9,0
7	14	11,3	9,8
8	9	11,0	11,4
9	10	10,7	10,6
10	13	10,0	9,0
11	7	8,7	9,2
12	6	7,7	10,0
13	10	10,0	9,2
14	14	11,0	9,4
15	9	10,3	10,6
16	8	9,7	10,4
17	12	9,7	8,8
18	9	9,0	8,8
19	6	8,0	
20	9		



a = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

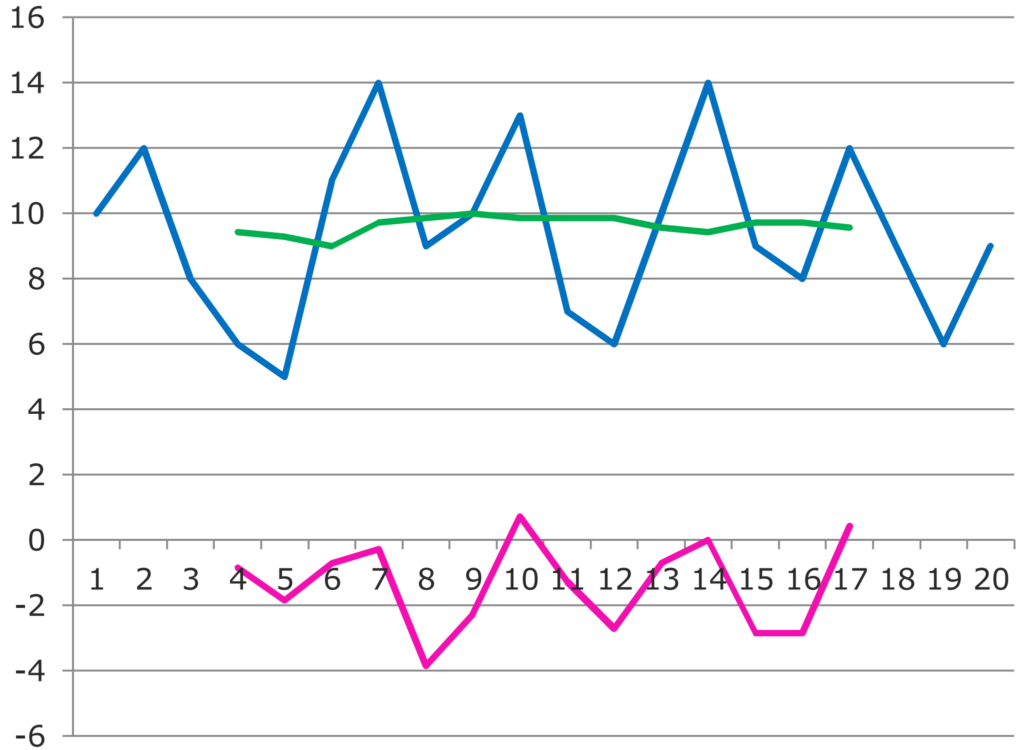
		m = 3	m = 5	m = 7
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7	8,2	
4	6	6,3	8,4	9,4
5	5	7,3	8,8	9,3
6	11	10,0	9,0	9,0
7	14	11,3	9,8	9,7
8	9	11,0	11,4	9,9
9	10	10,7	10,6	10,0
10	13	10,0	9,0	9,9
11	7	8,7	9,2	9,9
12	6	7,7	10,0	9,9
13	10	10,0	9,2	9,6
14	14	11,0	9,4	9,4
15	9	10,3	10,6	9,7
16	8	9,7	10,4	9,7
17	12	9,7	8,8	9,6
18	9	9,0	8,8	
19	6	8,0		
20	9			



a = (1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7 , 1/7, 1/7)

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

		m = 3	m = 7	
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7		
4	6	6,3	9,4	-0,9
5	5	7,3	9,3	-1,9
6	11	10,0	9,0	-0,7
7	14	11,3	9,7	-0,3
8	9	11,0	9,9	-3,9
9	10	10,7	10,0	-2,3
10	13	10,0	9,9	0,7
11	7	8,7	9,9	-1,3
12	6	7,7	9,9	-2,7
13	10	10,0	9,6	-0,7
14	14	11,0	9,4	0,0
15	9	10,3	9,7	-2,9
16	8	9,7	9,7	-2,9
17	12	9,7	9,6	0,4
18	9	9,0		
19	6	8,0		
20	9			



a = (1/7, -1/7, -1/7, 1/7, -1/7 , -1/7, 1/7)

ZPŮSOB VÝPOČTU

uvažujme třeba kauzální výpočet (tj. pouze ze zpožděných známých hodnot):

1. $$\bar{x}(k) = y(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot x(k-i) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \cdot x(k-i)$$

2. $$\bar{x}(k) = y(k) = \frac{1}{m}\left(m \cdot y(k-1) + x(k) - x(k-m)\right)$$

rekurze – používá staré hodnoty výstupních vzorků

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot y(k-j) + \sum_{i=0}^{m} a_i x(k-i)$$

NOVÉ POJMY

- ☑ koeficienty odpovídající žádanému průběhu časové řady (model);
- ☑ přechodný děj (odezva na počáteční podmínky);
- ☑ kauzalita;
- ☑ rekurze.

IV. ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

ZÁKLADNÍ POJMY

VELIČINY ☼ MATEMATICKÉ MODELY

- abychom mohli úspěšně řešit praktické problémy (analýza, syntéza), potřebujeme reálné veličiny vyjádřit matematicky jejich (abstraktními) **modely**;
- model veličiny by měl splňovat dva základní požadavky:
  - výstižnost, přesnost;
  - jednoduchost, snadná manipulace;

KLASIFIKACE VELIČIN
(A JEJICH MATEMATICKÝCH MODELŮ)

A) spojité a diskrétní

B) reálné a komplexní

C) deterministické a nedeterministické (náhodné?)

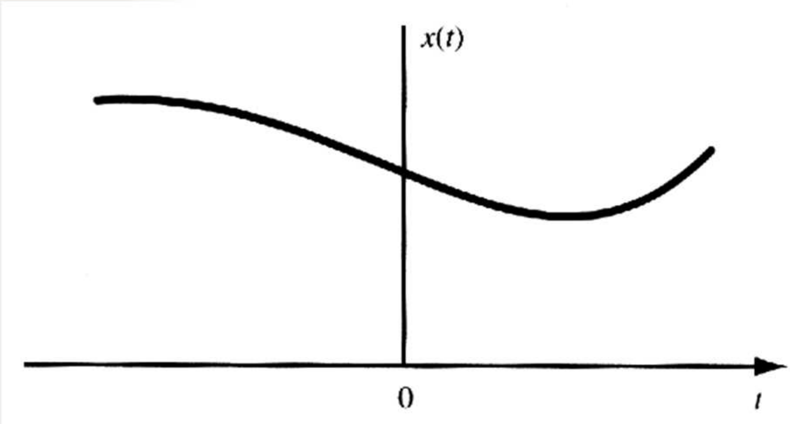
D) periodické a neperiodické

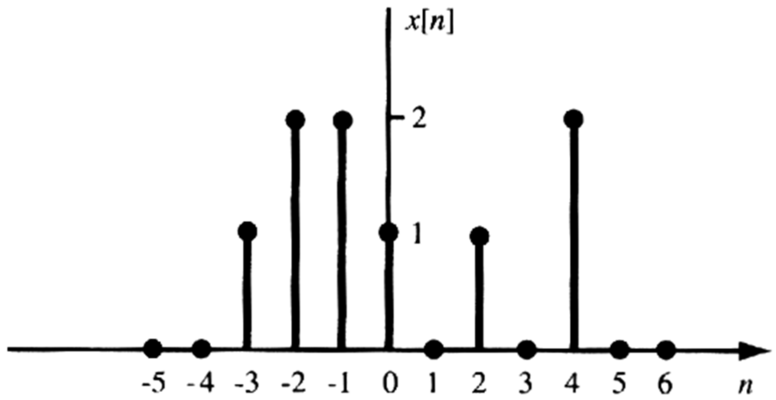
E) sudé a liché

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

- **Spojitá veličina**(přesněji **veličina se spojitým časem**) je taková veličina $x(t)$, kde čas t je spojitá proměnná.
- **Diskrétní veličina** (přesněji **veličina s diskrétním časem**) je taková veličina $x(t)$, kde čas t je definován v diskrétních časových okamžicích. Diskrétní veličinu proto často zapisujeme jako **posloupnost** $\{x_n\}$, kde n je celé číslo, resp. x(nT).

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY





A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu reálná nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

- kvalitativní:
  - nominální – kategorie nelze seřadit;
  - ordinální – kategorie je možné seřadit;
  - binární
- kvantitativní:
  - spojitá;
  - diskrétní;

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu reálná nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

- kvalitativní:
  - nominální – kategorie nelze seřadit;
  - ordinální – kategorie je možné seřadit;
  - binární
- kvantitativní:
  - spojitá
  - diskrétní

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu reálná nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

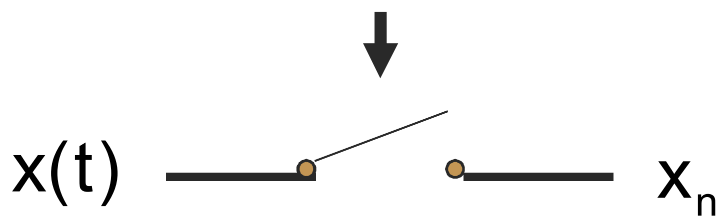
- kvalitativní:
  - nominální – kategorie nelze seřadit;
  - ordinální – kategorie je možné seřadit;
  - binární
- kvantitativní:
  - spojitá
  - diskrétní

Délka dat

budeme se zabývat posloupnostmi s desítkami vzorků

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

- U diskrétní veličiny není její hodnota mezi jednotlivými diskrétními časovými okamžiky definována.
- Diskrétní veličinu lze také získat **vzorkováním** spojité veličiny: $x(t_0)$, $x(t_1)$, $x(t_2)$, ..., $x(t_n)$, ... (též značení x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...). Hodnoty $x_i = x_i(t)$ se nazývají **vzorky**.



A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

- ☑ diskrétní veličinu můžeme zapsat
  - ➔ funkčním předpisem, např.

$$x_n = \begin{cases} 2^n & \text{pro} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad n < 0 \end{cases}$$

  - ➔ explicitně seznamem hodnot, např.

$$x_n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(zde se implicitně předpokládá, že pořadí prvků je číslováno od nuly a pro záporné indexy n jsou hodnoty nulové)

B) REÁLNÉ A KOMPLEXNÍ VELIČINY

- **Reálná veličina (model)** je taková, která nabývá reálných hodnot. (V praxi skutečně měřitelný.)
- **Komplexní veličina (model)** je taková, která nabývá komplexních hodnot. (Hypotetická, v praxi neměřitelná.)

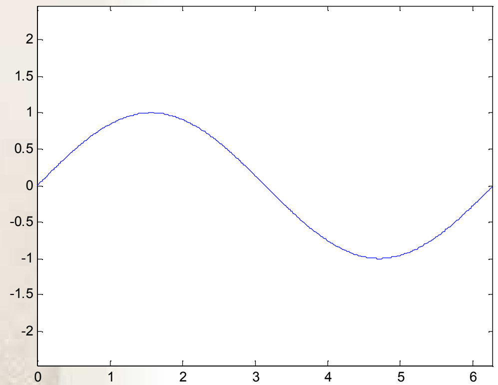
$$x(t) = x_1(t)+ix_2(t), \text{ resp. } x(t) = x_1(t)+jx_2(t)$$

Čas *t* je spojitý nebo diskrétní.

C) DETERMINISTICKÉ A NEDETERMINISTICKÉ (NÁHODNÉ) VELIČINY

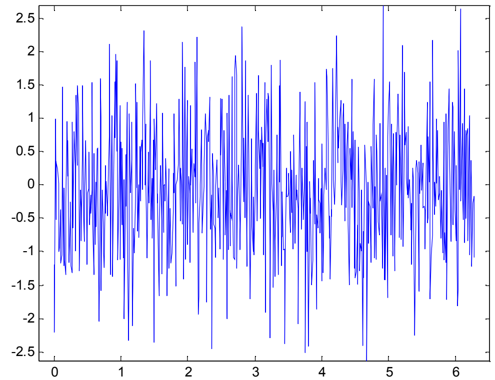
- ☑ **Deterministická veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou v daném čase jednoznačně určeny. Taková veličina může být popsán analytickou funkcí času *t*.

- ☑ **Náhodná (stochastická) veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné (?!) (tj. tak deterministicky složité, že jim nerozumíme). Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum, definované rozložení, momenty.



$$x(t) = \sin t$$

$$N(0,1)$$



C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ VELIČINY

- ☑ **Náhodná (stochastická) veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné (?!) (tj. tak deterministicky složité, že jim nerozumíme). Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

!!! POZOR POZOR !!!

Náhodnost není generickou vlastností dané veličiny, tuto vlastnost jí přisuzuje předpokládaný matematický nástroj.

! POHOV !

C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ VELIČINY

Náhodná (stochastická) veličina je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné (?!) (tj. tak deterministicky složité, že jim nerozumíme). Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

Náhodný proces

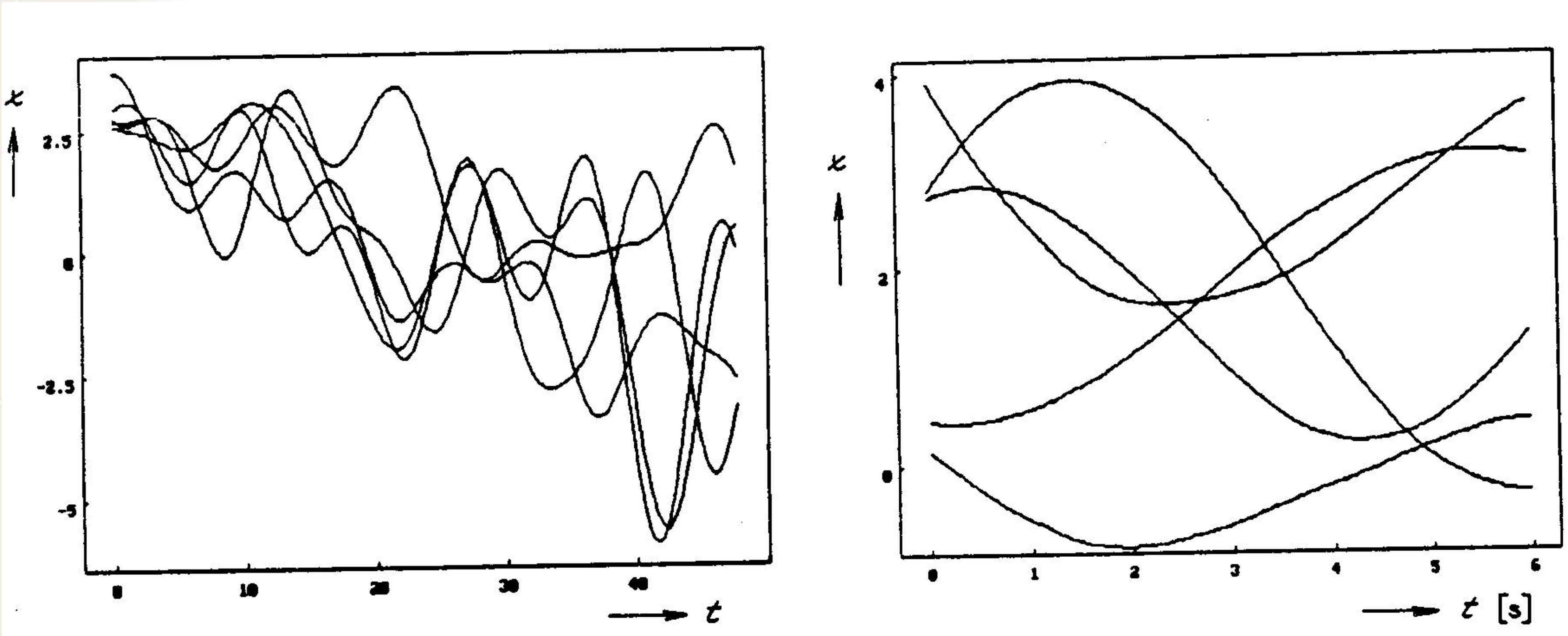
Systém $\{\xi_i\}$ náhodných veličin ξ_i, definovaných pro všechna $t \in R$ se nazývá náhodný proces (*random process*) a označuje se $\xi(t)$. Nezávislá veličina t je zpravidla čas.

- stacionarita;
- ergodicita

STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

zhruba:

- ☑ **stacionární náhodný proces** (*stationary random process*) je proces se stálým chováním



STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

přesněji:

- **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky t_1 a t_2)

Z praktického hlediska často vnímáme pojem stacionarity v tzv. širším slova smyslu, kdy stačí, aby se s nezávisle proměnnou neměnily pouze statistické momenty 1. a 2. řádu, střední hodnota, rozptyl a autokorelační, resp. autokovarianční funkce.

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

Ergodický náhodný proces (*ergodic random process*) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejné chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace.

Zpravidla požadujeme (je to z hlediska analýzy pohodlnější), aby byl analyzovaný proces jak stacionární, tak i ergodický, ale obecně ergodický proces nemusí být nezbytně i stacionární a samozřejmě i naopak (záleží na definici a přístupu).

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

- ☑ Spojitá veličina $x(t)$ je **periodická s periodou** $\boldsymbol{T}$, jestliže existuje hodnota T taková, že pro všechna t platí

$$x(t+T) = x(t)$$

- Nejmenší kladná hodnota T, pro kterou platí uvedený vztah se nazývá základní perioda.
- Obecně lze psát

$$x(t+kT) = x(t),$$

kde k je celé číslo.

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

Pozor!

- ☑ Pro konstantní veličinu není definována základní perioda. Konstantní veličina je periodická pro každou hodnotu *T*.
- ☑ Spojitá veličina, který není periodická se nazývá **neperiodická** nebo **aperiodická**.
- ☑ Reálné veličiny, např. biosignály nejsou zcela periodické – hovoříme o **repetičních veličinách**.

Pohov!

řečový signál – samohláska „e"

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

- Pro diskrétní veličinu (časovou řadu) definujeme periodicitu s periodou N obdobně

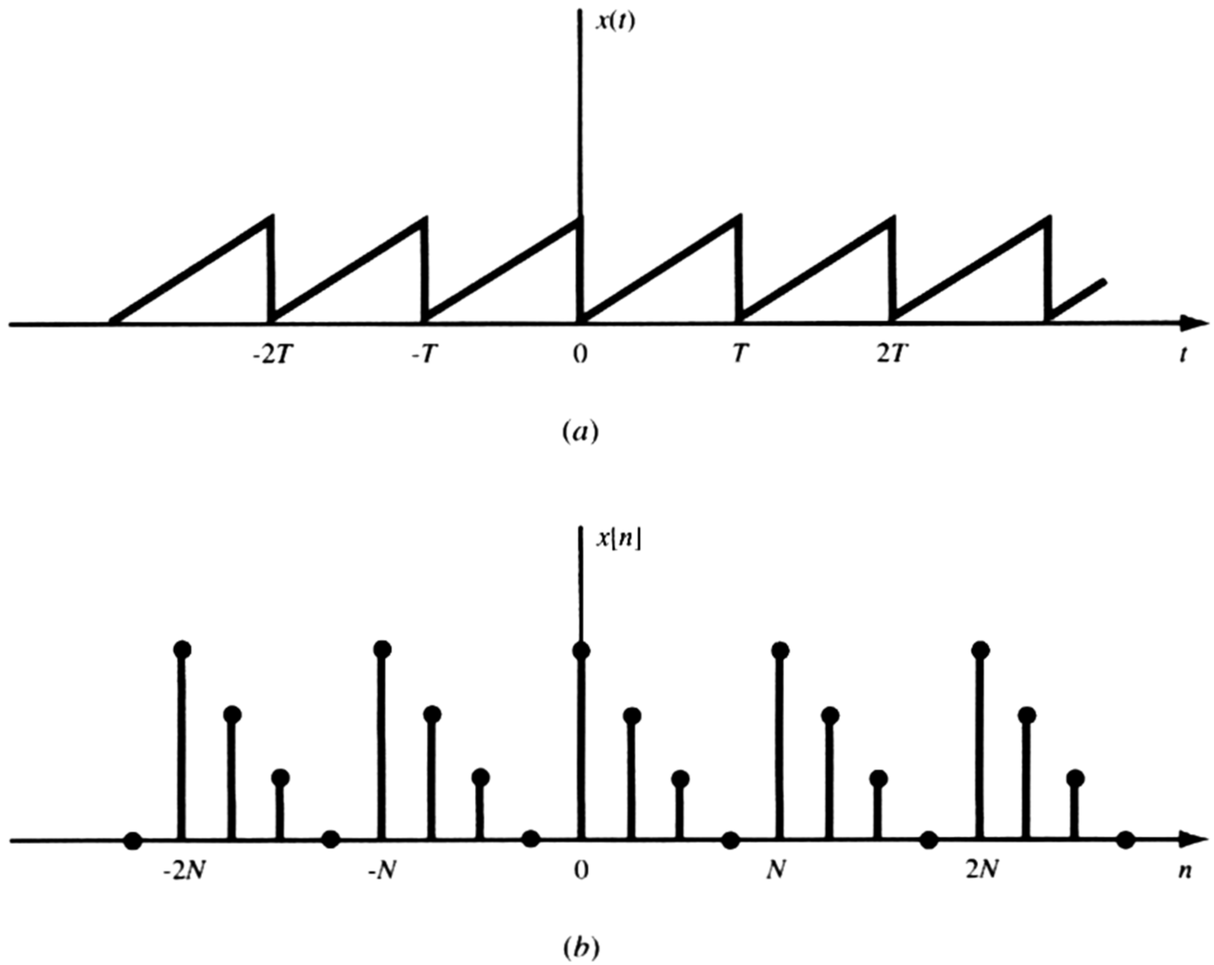
$$x_{n+N} = x_n \qquad \text{a} \qquad x_{n+kN} = x_n$$

Pozor!

- ☑ Diskrétní veličina (časová řada) získaná rovnoměrným vzorkováním periodické spojité veličiny **nemusí** být periodická.
- ☑ Součet dvou spojitých periodických veličin **nemusí** být periodický veličina.
- ☑ Součet dvou diskrétních periodických veličin s tímtéž vzorkováním **je vždy** periodická veličina.

Pohov!

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY



E) SUDÉ A LICHÉ VELIČINY

- **Sudá veličina** je taková, pro níž platí

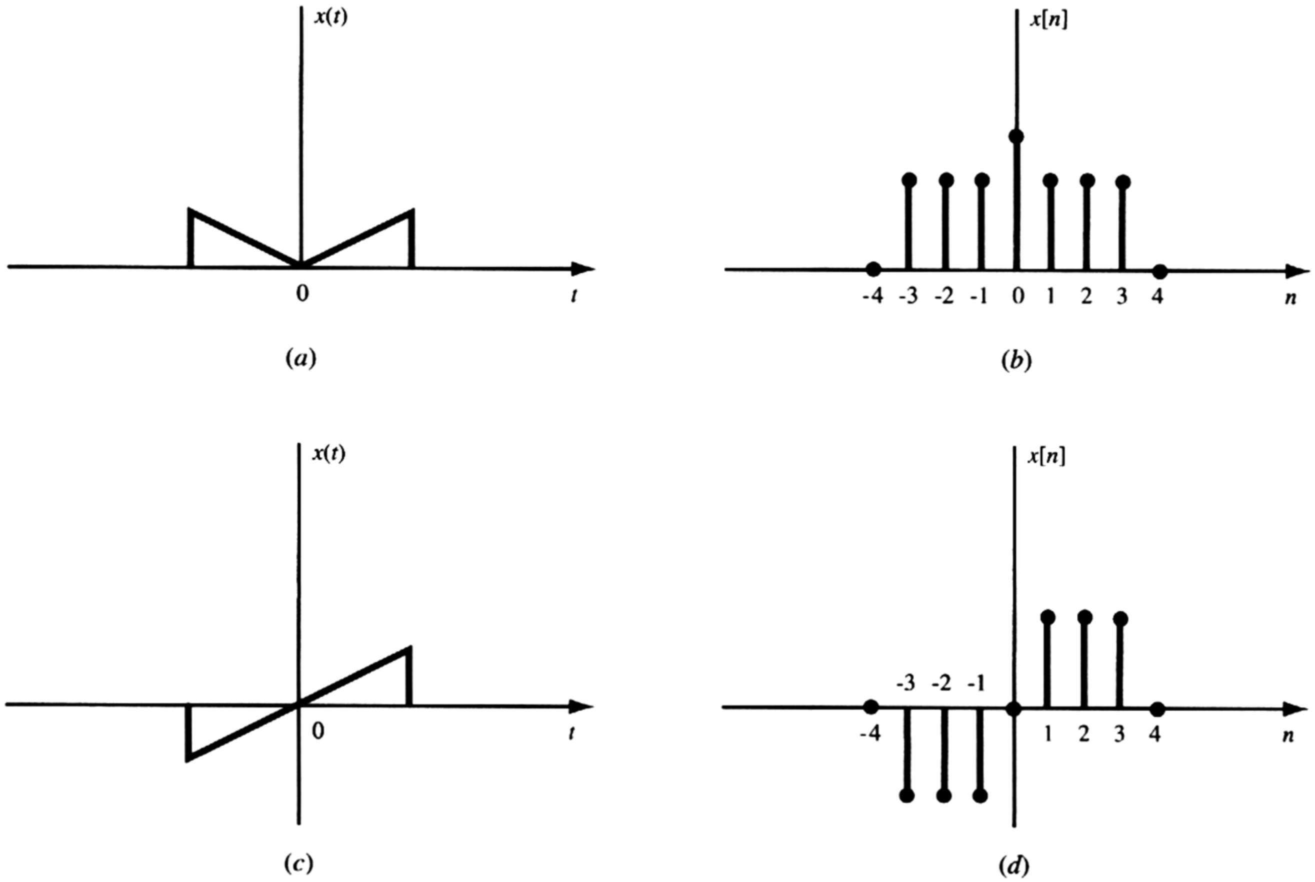
$$x(-t) = x(t), \quad x_{-n} = x_n$$

- **Lichá veličina** je taková, pro níž platí

$$x(-t) = -x(t), \quad x_{-n} = -x_n$$

- Součin sudé a liché veličiny je lichá veličina.
- Součin dvou sudých nebo dvou lichých veličin je sudá veličina.

E) SUDÉ A LICHÉ VELIČINY

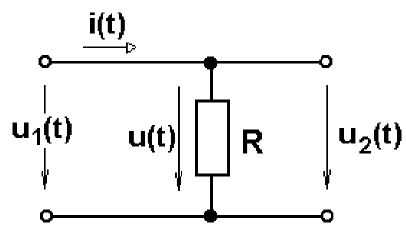


NĚCO MÁLO NAVÍC

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON VELIČINY

jsou odvozeny z primární představy signálu, reprezentovaného elektrickými veličinami, elektrickým napětím, příp. proudem. Na základě fyzikálních zákonitostí platí, že výkon p(t) v čase t na reálném odporu R je roven součinu okamžitého napětí na odporu a proudu, jím protékajícím, tedy

$$p(t) = u(t).i(t)$$



Podle Ohmova zákona je

$$u(t) = R.i(t)$$

a po dosazení můžeme psát, že

$$p(t) = R.i(t).i(t) = R.i^2(t) = u(t).u(t)/R = u^2(t)/R.$$

Když je R = 1 Ω, se vztah zjednoduší na

$$p_{R=1}(t) = i^2(t) = u^2(t)$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON VELIČINY

celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

$$A = \int_T p(t)dt = \int_T i^2(t)dt = \int_T u^2(t)dt.$$

Na základě této rozvahy definujeme obecně energii spojité funkce x(t) vztahem

$$E_s = \int_T x^2(t)dt$$

a pro diskrétní posloupnost $x(nT_{vz})$

$$E_d = \sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

Výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P = \frac{E}{T}$$

a z toho $P_s = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt$ a $P_d = \frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N x^2(nT_{vz})$

Nebo v normalizovaném diskrétním tvaru

$$P_{dn} = \frac{1}{N}\sum_n^N x^2(n)$$

Pokud se energie kumuluje v nekonečně dlouhém časovém intervalu, pak se vztahy modifikují do tvaru

$$P_{s\infty} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt \quad \text{a} \quad P_{d\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

příp.

$$P_{dn\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_n^N x^2(n)$$

SHRNUTÍ

- ☑ jaké typy veličin známe (dle vlastností)?
- ☑ stacionarita, ergodicita;
- ☑ energie, výkon

ZA TÝDEN NASHLEDANOU