



ČASOVÉ ŘADY

(SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY)



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

© Institut biostatistiky a analýz

VI. ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI MODELY VELIČIN POKRAČOVÁNÍ

BINÁRNÍ OPERACE

∞ KONVOLUCE ∞

FUNKCE SPOJITÉ V ČASE

DEFINICE

Konvoluce je matematická operace mezi dvěma funkcemi $x_1(t)$ a $x_2(t)$ téhož argumentu definovaný (v případě spojitých funkcí) integrálem

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau,$$

kde funkce $x_2(t)$ se často nazývá ***konvoluční jádro***.

VLASTNOSTI

Komutativní zákon:

$$\begin{aligned}x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau).x_2(t - \tau).d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau).x_2(\tau).d\tau = x_2(t) * x_1(t) \quad \approx X_1(\omega).X_2(\omega)\end{aligned}$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau).x_2(t - \tau).d\tau = \begin{array}{l} | u = t - \tau \\ | \tau = t - u \\ | d\tau = -du \end{array} = \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} x_2(u).x_1(t - u).du = x_2(t) * x_1(t)\end{aligned}$$

VLASTNOSTI

Distributivní zákon:

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

Asociativní zákon:

$$x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$$

VLASTNOSTI

Zákon o posunu v čase

Je – li

$$x_1(t) * x_2(t) = c(t),$$

pak

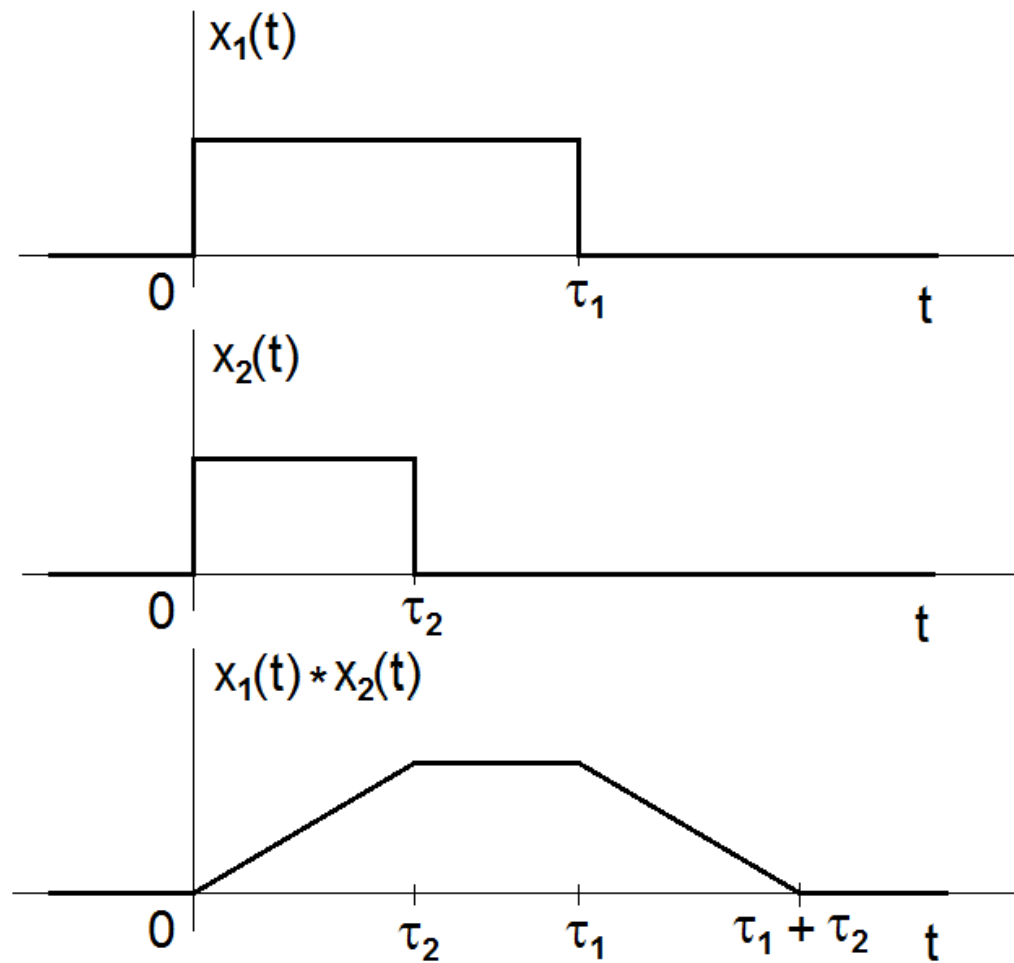
$$x_1(t) * x_2(t - T) = c(t - T),$$

$$x_1(t - T) * x_2(t) = c(t - T)$$

a

$$x_1(t - T_1) * x_2(t - T_2) = c(t - T_1 - T_2)$$

ŠÍŘKOVÁ VLASTNOST KONVOLUCE



KONVOLUCE

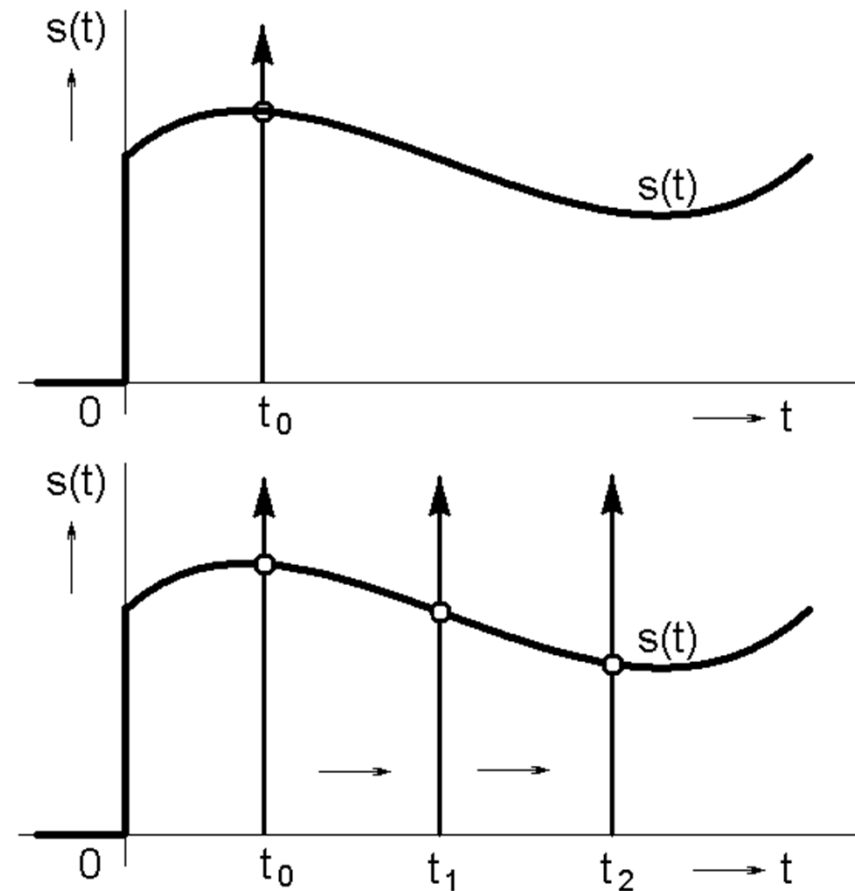
funkce s jednotkovým impulsem

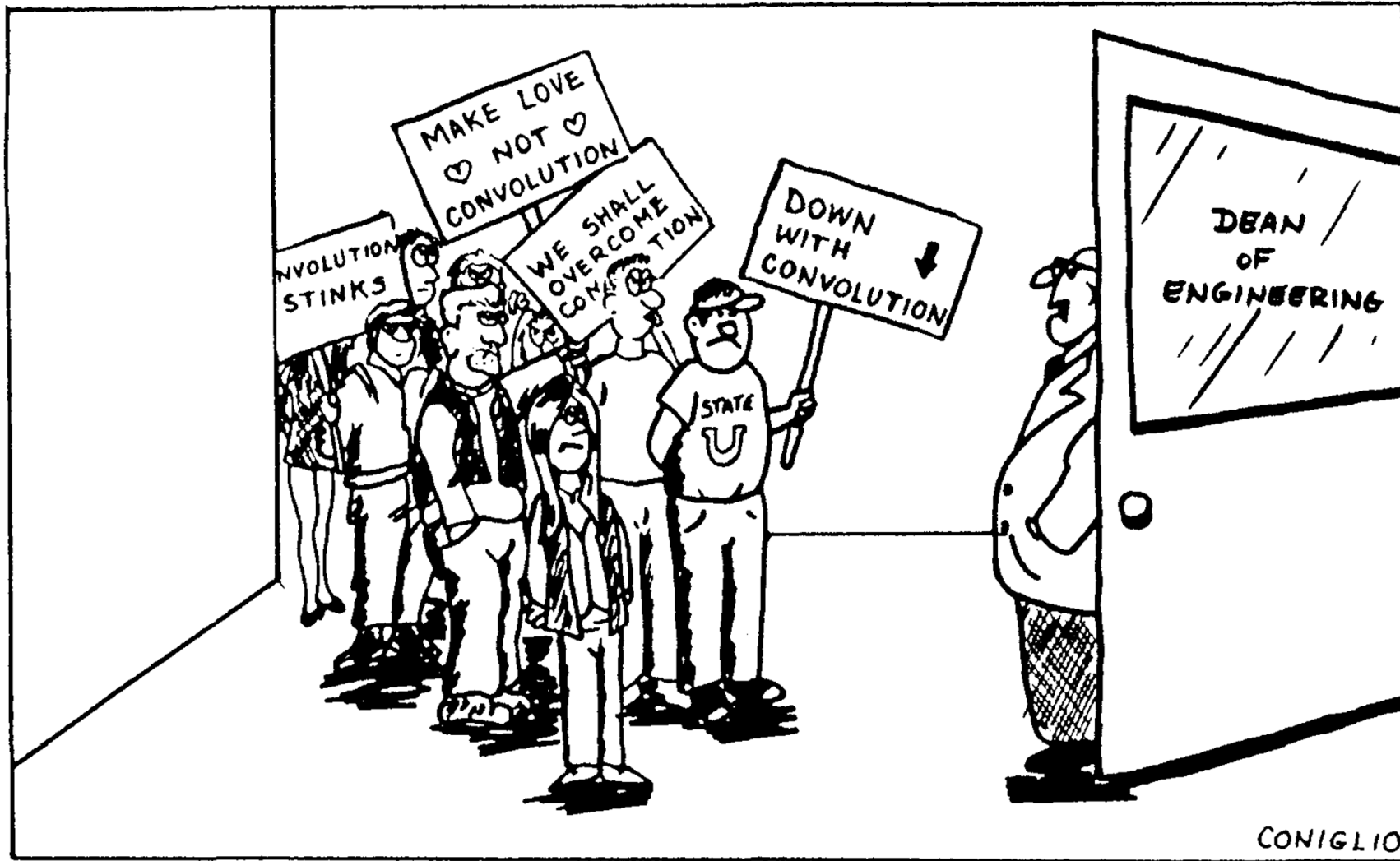
definice:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = s(t_0)$$

konvoluce:

$$s(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = s(t)$$

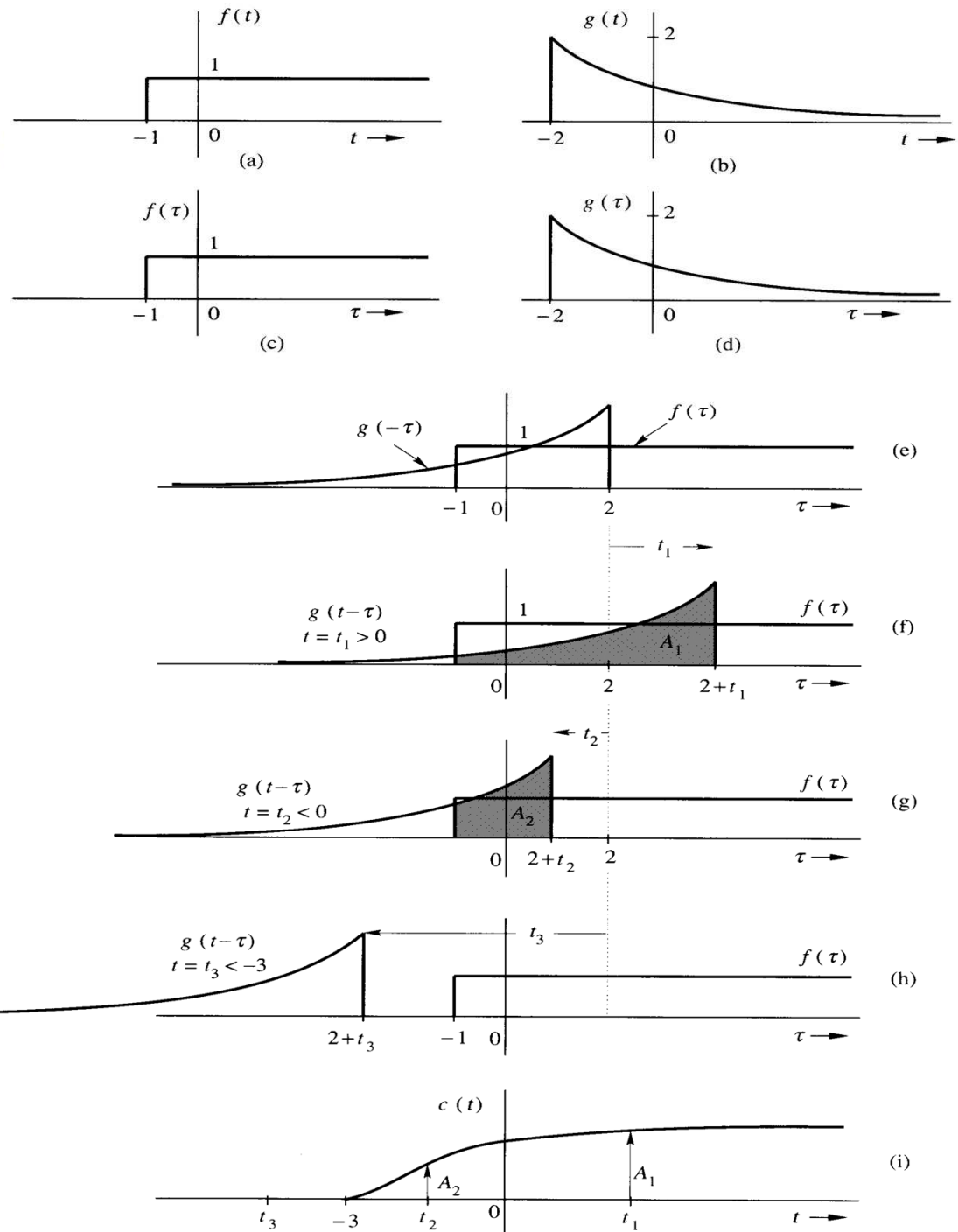




Convolution: its bark is worse than its bite!

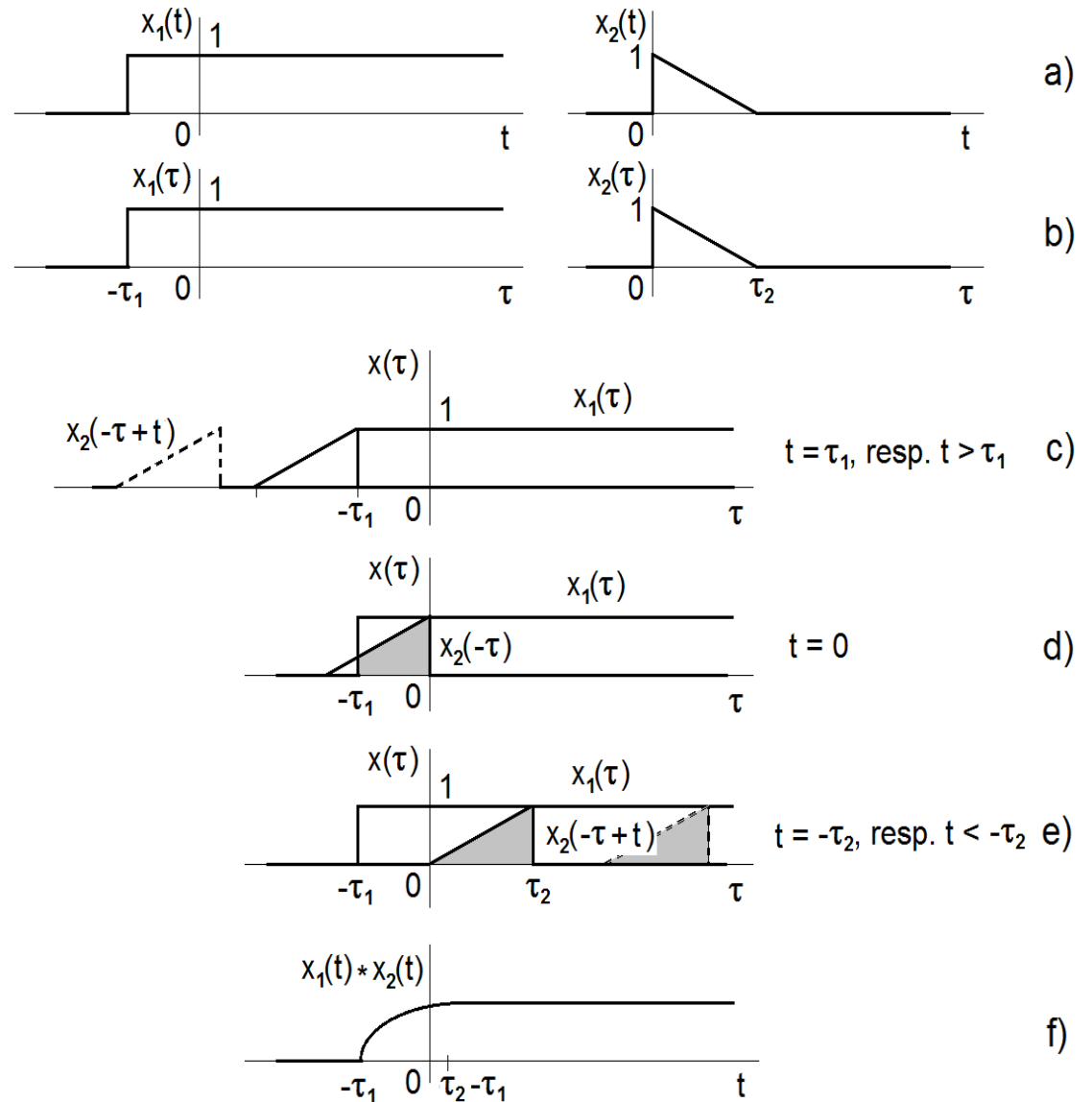
KONVOLUCE

GEOMETRICKÝ VÝZNAM

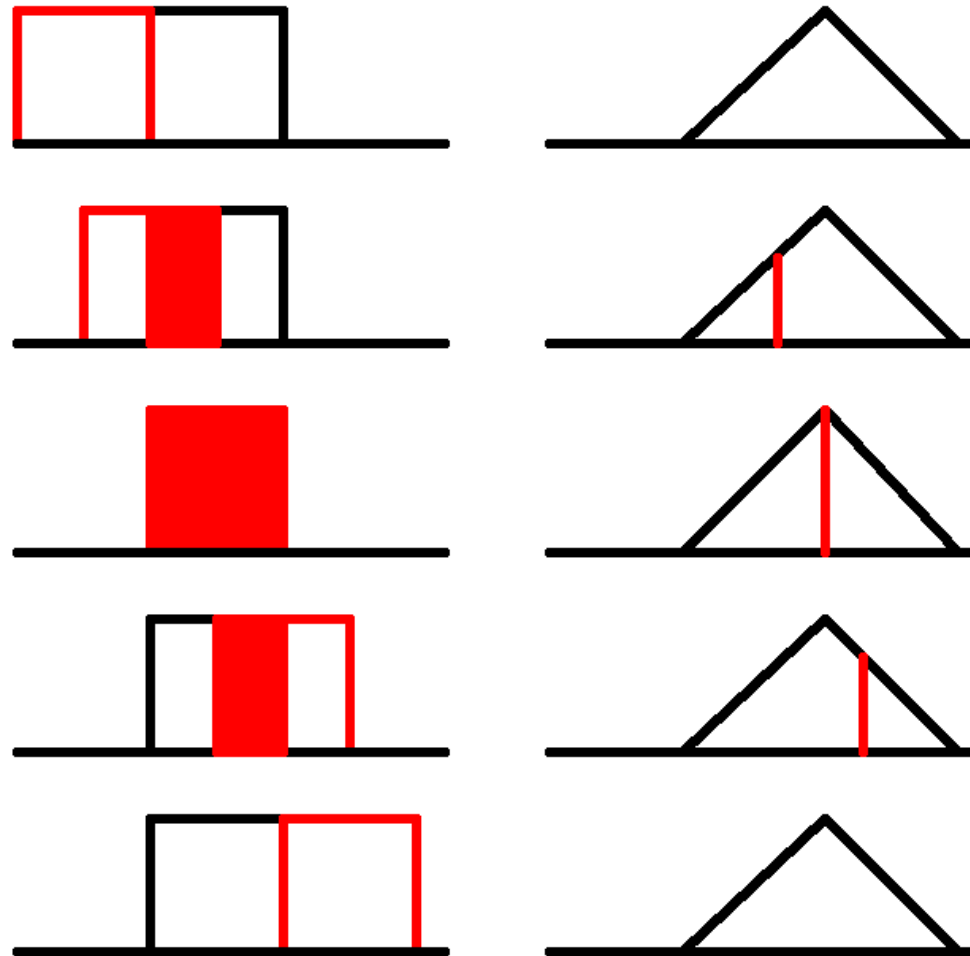


KONVOLUCE

GEOMETRICKÝ VÝZNAM

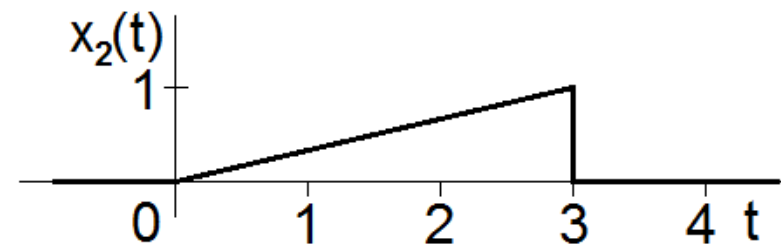
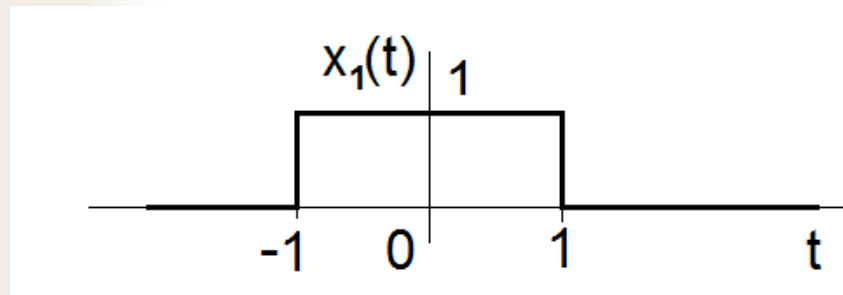


KONVOLUCE

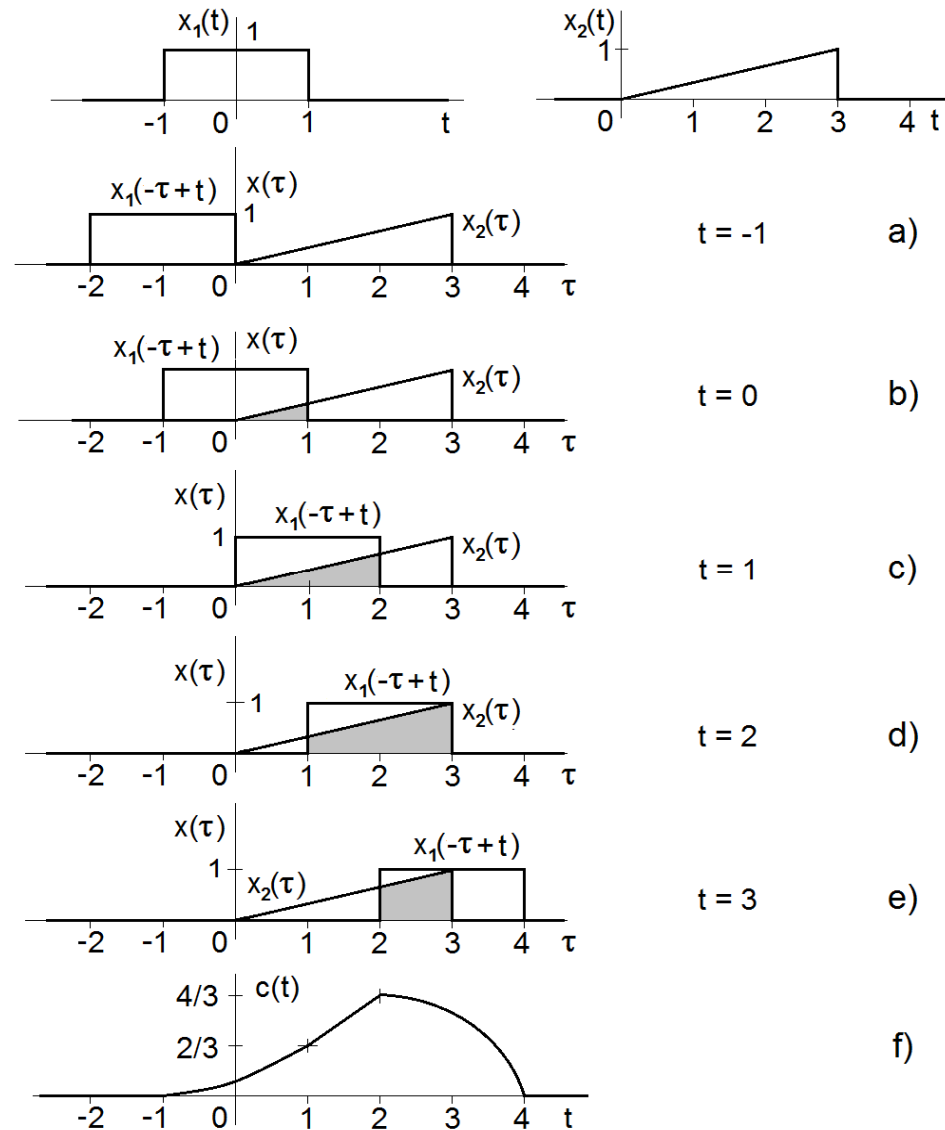


PŘÍKLAD

Určete konvoluci $c(t)$ funkcí $x_1(t)$ a $x_2(t)$ podle obrázku.



PŘÍKLAD



PŘÍKLAD

- ☑ $t < -1$ – součin obou funkcí je v tomto případě nulový, tedy i plocha vymezená tímto součinem a konvoluce je rovna nule (obr. a);
- ☑ $t \in \langle -1, 1 \rangle$ – plocha součinu je vymezena průběhem funkce $x_2(\tau)$ v intervalu od $\tau = 0$ a polohou horní, tj. sestupné hrany funkce $x_1(-\tau + t)$, určené hodnotou $t + 1$ (obr. b,c); hodnota konvolučního integrálu je

$$c(t)_{-1,1} = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau) \cdot d\tau = \int_0^{t+1} \frac{1 \cdot \tau}{3} \cdot d\tau = \frac{1}{3} \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_0^{t+1} = \frac{(t+1)^2}{6};$$

- ☑ $t \in \langle 1, 2 \rangle$ – v tomto intervalu je plocha součinu ohraničená opět funkcí $x_2(\tau)$, tentokrát a v daném konkrétním případě v intervalu od $t - 1$ do $t + 1$ (obr. c,d)

$$c(t)_{1,2} = x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-1}^{t+1} \frac{1 \cdot \tau}{3} \cdot d\tau = \frac{1}{3} \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{t-1}^{t+1} = \frac{(t+1)^2 - (t-1)^2}{6} = \frac{2t}{3};$$

PŘÍKLAD

- ☑ $t \in \langle 2, 4 \rangle$ – plocha součinu je nenulová v intervalu od vzestupné hrany funkce $x_1(-\tau+t)$, která je na pozici $t - 1$, do sestupné hrany funkce $x_2(\tau)$, tj. $\tau = 3$ (obr.2.15e), tedy platí

$$c(t)_{2,4} = x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-1}^3 \frac{1 \cdot \tau}{3} \cdot d\tau = \frac{1}{3} \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{t-1}^3 = \frac{3^2 - (t-1)^2}{6} = \frac{-(t^2 - 2t - 8)}{6};$$

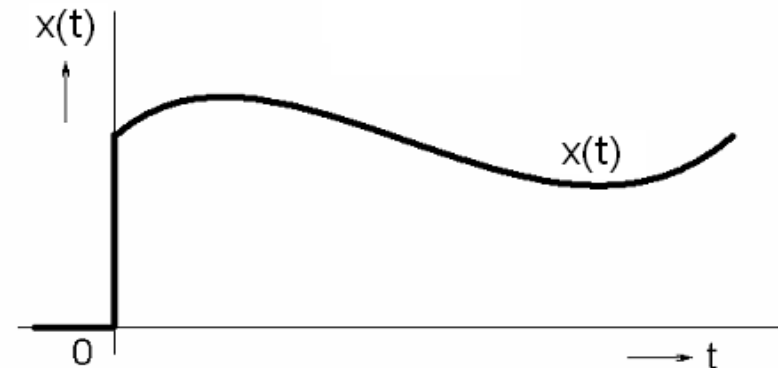
- ☑ $t > 4$ – součin obou funkcí je opět nulový, proto i konvoluční integrál.

KAUZALITA

Kauzální je takový systém, jehož výstup v každém časovém okamžiku t_0 závisí pouze na průběhu vstupního signálu $x(t)$ pro $t \leq t_0$. Jinými slovy, hodnota výstupu systému v každém okamžiku závisí pouze na vstupu v daném okamžiku a jeho průběhu v minulosti, nikoliv na budoucích hodnotách vstupního signálu. Systém, který tento požadavek nesplňuje, nazýváme **nekauzální**, příp. **anticipativní**.

Zprostředkovaně:

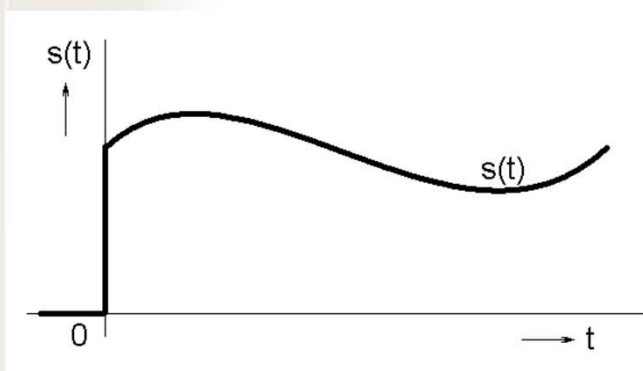
jako kauzální funkce označujeme takové funkce, pro které platí $x(t) = 0$ pro $t < 0$.



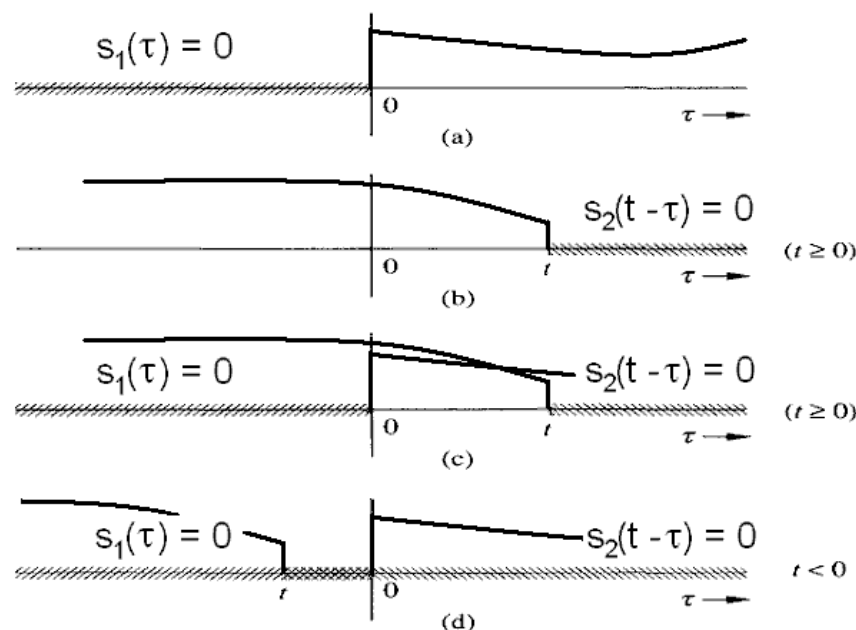
KAUZALITA + KONVOLUCE

Konvoluce kauzálních funkcí:

Pro kauzální funkce platí $s(t) = 0$ pro $t < 0$



$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau) \cdot s_2(t - \tau) \cdot d\tau$$



BINÁRNÍ OPERACE

∞ KONVOLUCE ∞

POSLOUPNOSTI DISKRÉTNÍ V ČASE

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

☑ spojité funkce

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau$$

☑ diskrétní posloupnosti

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \cdot x_2(n - m).$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(n - m) \cdot x_2(m).$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

- ☑ pro kauzální posloupnosti, tj. takové pro které platí $x(n) = 0$ pro $n < 0$ se konvoluční vztah mění na

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^n x_1(m) \cdot x_2(n-m).$$

- ☑ V reálných podmínkách při zpracování reálných dat samozřejmě nejsou posloupnosti $x_1(n)$ a $x_2(n)$ nekonečné, nýbrž mají konečnou délku. Předpokládejme obecně N_1 vzorků v případě posloupnosti $x_1(n)$ a N_2 vzorků v případě posloupnosti $x_2(n)$. Dále položme $x_1(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_1-1 \rangle$ a analogicky $x_2(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_2-1 \rangle$.

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{\min(N_1-1, N_2-1)} x_1(m) \cdot x_2(n-m).$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

$$x_1(m) \quad \boxed{x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15}}$$

$$x_2(m) \quad \boxed{x_{20} \quad x_{21} \quad x_{22}}$$

$$\begin{array}{r}
 x_1(m) \quad \boxed{x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15}} \\
 \quad \quad \quad \Sigma \quad \times \\
 x_2(-m) \quad \boxed{x_{22} \quad x_{21} \quad x_{20}} \quad \Rightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x_1(m) \quad \boxed{x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15}} \\
 \quad \quad \quad \Sigma \quad \times \quad \times \quad \times \\
 x_2(2-m) \quad \boxed{x_{22} \quad x_{21} \quad x_{20}} \quad \Rightarrow
 \end{array}$$

DISKRÉTNÍ KRUHOVÁ KONVOLUCE

SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

$$x_1(m) \quad \boxed{x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15}}$$

$$x_2(m) \quad \boxed{x_{20} \quad x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23} \quad x_{24} \quad x_{25}}$$

$$\begin{array}{l} x_1(m) \\ \Sigma \\ x_2(-m) \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15}} \\ \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \\ \boxed{x_{20} \quad x_{25} \quad x_{24} \quad x_{23} \quad x_{22} \quad x_{21}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1(m) \\ \Sigma \\ x_2(2-m) \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15}} \\ \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \\ \boxed{x_{22} \quad x_{21} \quad x_{20} \quad x_{25} \quad x_{24} \quad x_{23}} \end{array}$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

PŘÍKLAD

Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1 = \{x_{10}, x_{11}, \dots, x_{13}\}$ a $x_2 = \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\}$.

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$$\begin{aligned} & \{x_{10}, x_{11}, \dots, x_{13}\} * \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\} = \\ & = (x_{10} \cdot x_{20})(x_{10} \cdot x_{21})(x_{10} \cdot x_{22}) \\ & \quad (x_{11} \cdot x_{20})(x_{11} \cdot x_{21})(x_{11} \cdot x_{22}) \\ & \quad \quad (x_{12} \cdot x_{20})(x_{12} \cdot x_{21})(x_{12} \cdot x_{22}) \\ & \quad \quad \quad (x_{13} \cdot x_{20})(x_{13} \cdot x_{21})(x_{13} \cdot x_{22}) \end{aligned}$$

součet dílčích součinů v jednotlivých sloupcích

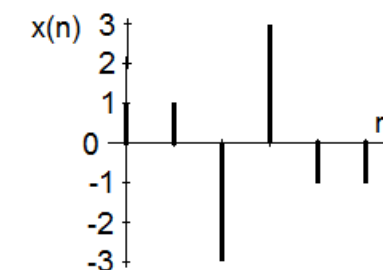
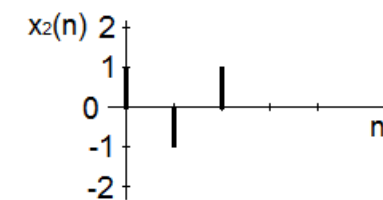
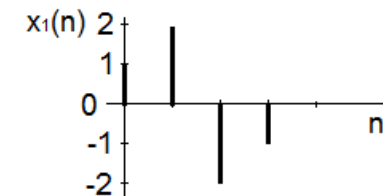
DISKRÉTNÍ KONVOLUCE PŘÍKLAD

Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$ a $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$.

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$$\begin{array}{r} \{1, 2, -2, -1\} * \{1, -1, 1\} = \\ = \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 1 & & & \\ & 2 & -2 & 2 & & \\ & & -2 & 2 & -2 & \\ & & & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -3 & 3 & -1 & -1 \end{array} \end{array}$$



BINÁRNÍ OPERACE

∞ KORELACE ∞

FUNKCE SPOJITÉ V ČASE

DEFINICE

**ABZ slovník
cizích slov**

Korelace = vzájemný vztah, souvztažnost mezi znaky, veličinami, ději

DEFINICE



Korelace (z [lat.](#)) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

DEFINICE



Korelace (z [lat.](#)) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

lātiō - nesení, poskytování

relātiō – nesení zpět, odnášení, opakování;
zpráva; vztah, poměr

correlātiō – vzájemný vztah, souvislost

DEFINICE



Korelace (z [lat.](#)) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

Pokud se jedna z nich mění, mění se **korelativně** i druhá a naopak.

Pokud se mezi dvěma procesy ukáže korelace, je pravděpodobné, že na sobě závisejí, nelze z toho však ještě usoudit, že by jeden z nich musel být [příčinou](#) a druhý [následkem](#). To samotná korelace nedovoluje rozhodnout.

DEFINICE



Korelace (z [lat.](#)) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

Pokud se jedna z nich mění, mění se **korelativně** i druhá a naopak.

Kauzalita - příčinná souvislost či závislost.

Jeden jev vyvolává druhý, popřípadě se oba vzájemně podporují (synergie)

DEFINICE



WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia

Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami **x** a **y** .

DEFINICE



Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný lineární vztah mezi znaky či veličinami **x** a **y**.

JAKÁ MÁME DATA?



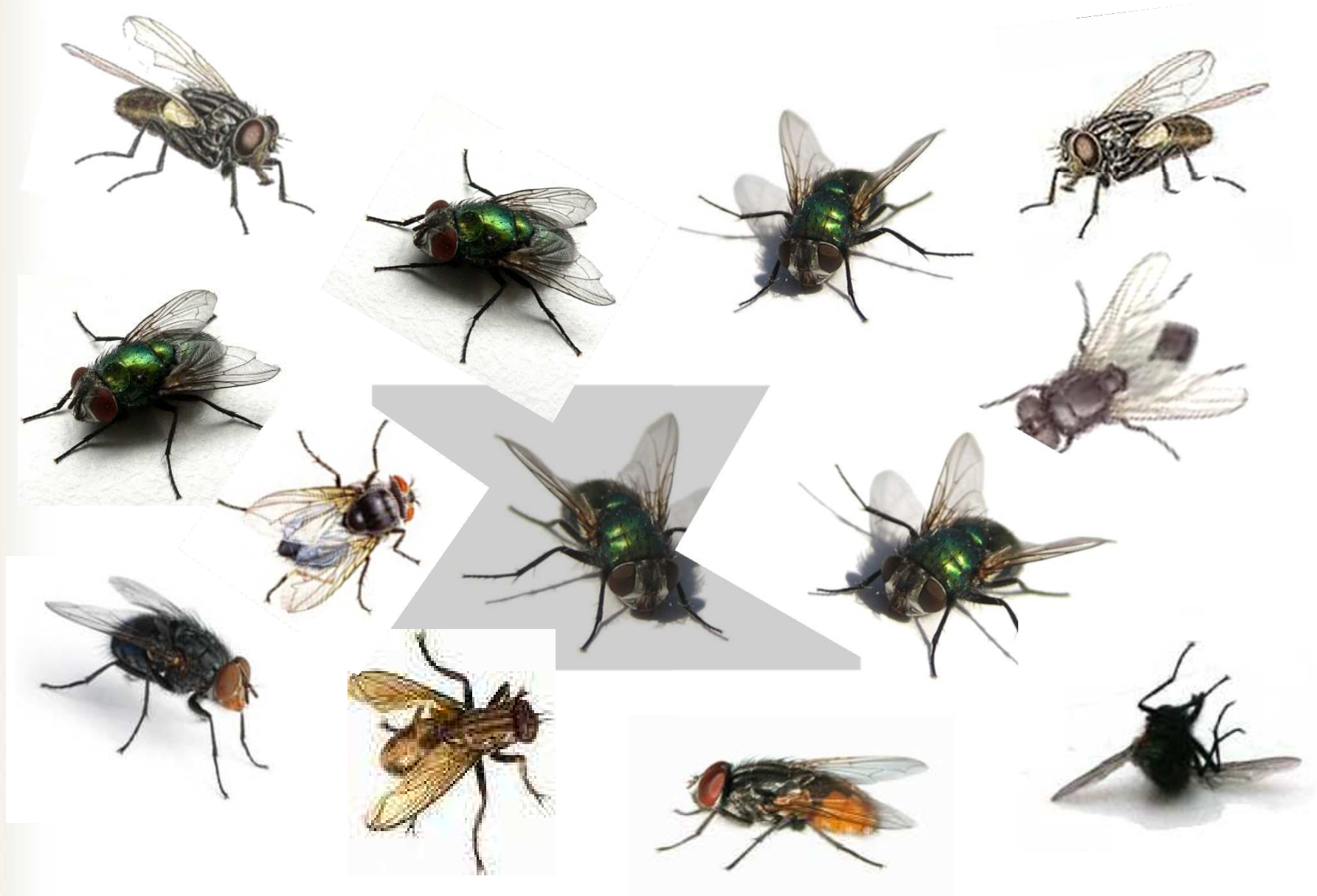
JAKÁ MÁME DATA?



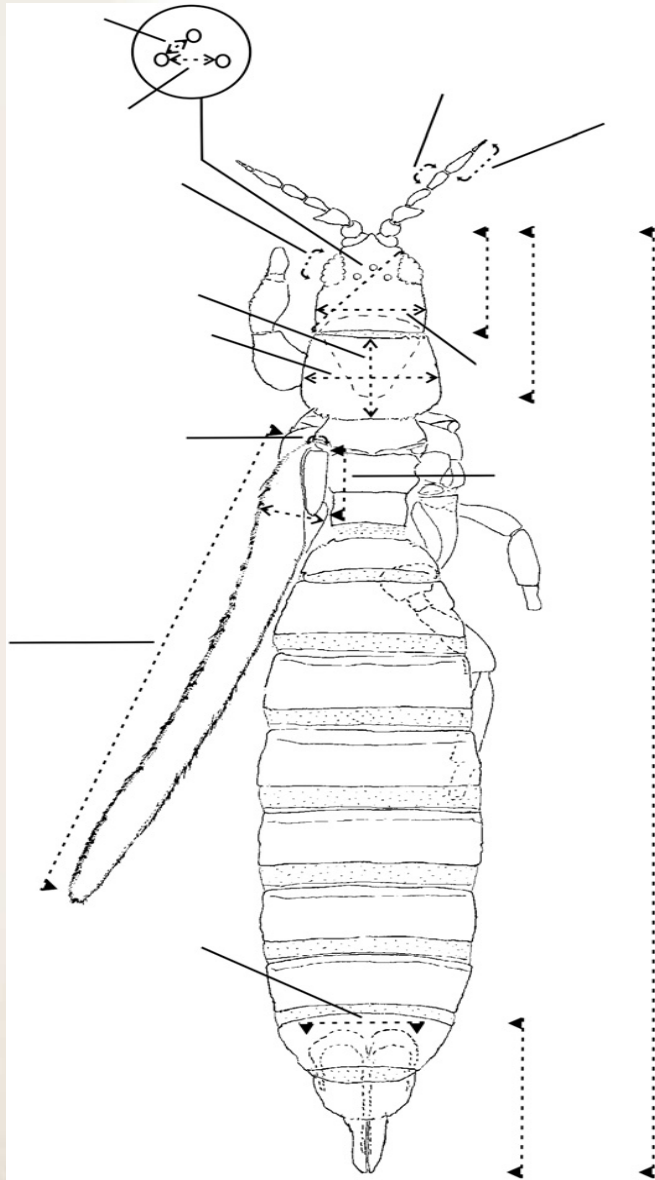
JAKÁ MÁME DATA?



JAKÁ MÁME DATA?



JAKÁ MÁME DATA?



1. šířka hlavy
2. délka hlavy (dorsální strana)
3. délka hlavy(ventrální strana)
4. délka klavů
5. šířka klavů
6. délka předního křídla
7. basální šířka předního křídla
8. celková délka těla (vyjma tykadel a penisu)
9. šířka pronota
10. délka pronota
11. šířka oka
12. délka kladélka
13. šířka kladélka
14. délka tykadlového článku V
15. délka tykadlového článku VI
16. vzdálenost mezi zadním párem ocelli
17. vzdálenost mezi přední a zadní ocellou

JAKÁ MÁME DATA?



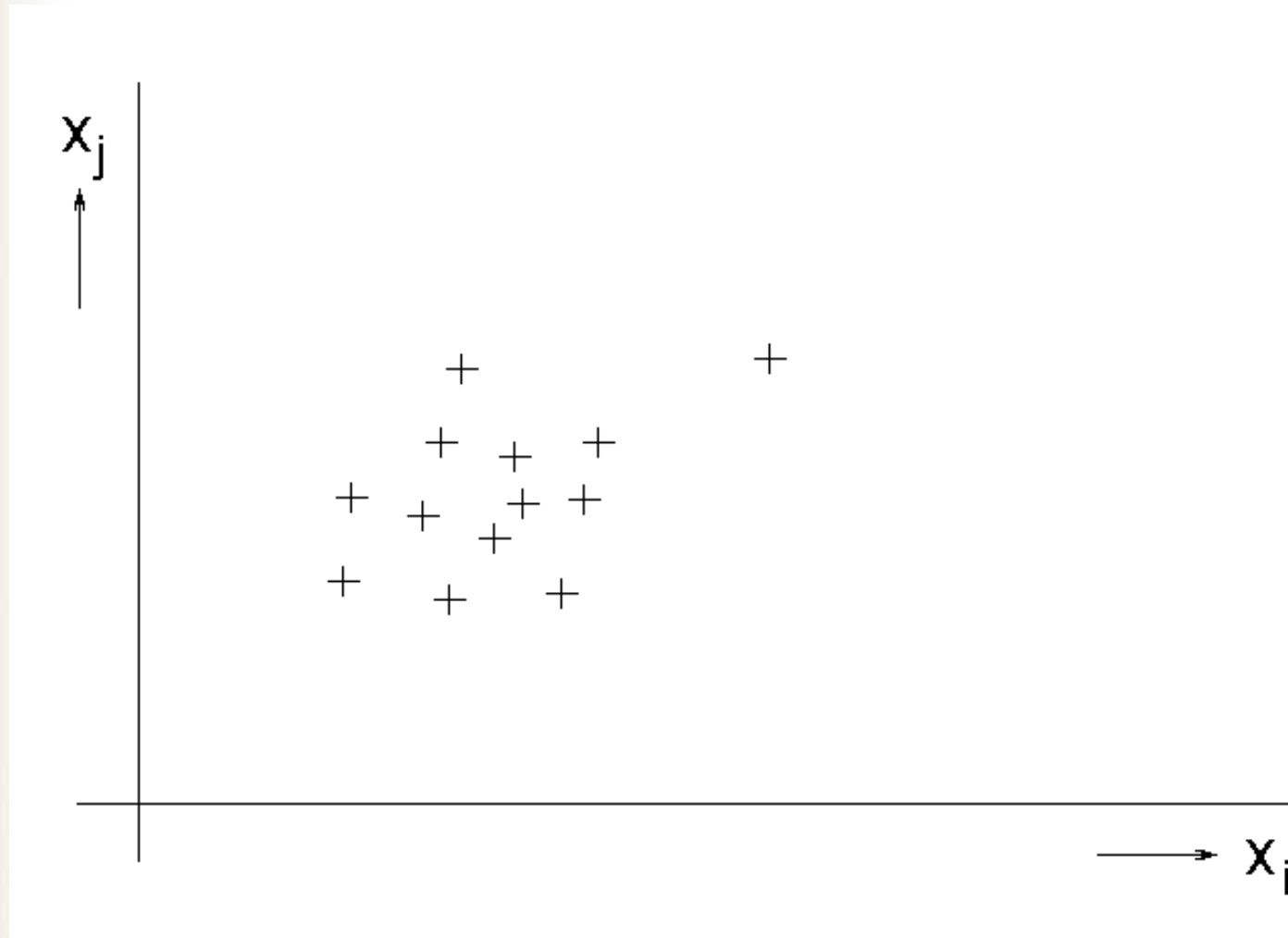
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	126,33	120,50	223,50	128,27	44,70	927,20	122,44	1702,40	255,87	196,83	61,02	255,87	127,94	28,18	60,25	29,15	14,58
2	136,43	130,75	221,70	142,12	47,37	933,66	113,69	1630,20	268,67	218,77	84,44	230,29	115,14	28,42	64,43	31,27	18,95
3	123,80	118,09	219,03	125,71	43,81	908,66	119,99	1668,35	250,76	192,89	59,49	250,76	125,38	27,62	59,04	28,57	14,28
4	138,96	132,55	245,85	141,10	49,17	1019,92	134,68	1872,64	281,46	216,51	67,12	281,46	140,73	31,00	66,27	32,07	16,03
5	128,85	117,48	217,91	125,06	43,58	941,11	119,38	1659,84	249,48	191,90	59,80	249,48	124,74	27,48	58,74	28,42	14,21
6	137,13	131,42	222,84	142,85	47,62	938,45	114,28	1638,56	270,04	219,89	84,87	231,47	115,73	28,57	64,76	31,43	19,05
7	127,59	121,70	225,74	129,55	45,15	936,47	123,66	1719,42	258,43	198,79	61,63	258,43	129,22	28,46	60,85	29,44	14,72
8	142,59	135,44	229,66	147,22	49,07	967,18	117,78	1688,72	278,31	226,62	87,47	238,55	119,28	29,44	66,74	32,39	19,63
9	128,22	122,30	226,86	130,20	45,37	904,02	124,28	1727,94	259,71	199,78	61,93	259,71	129,86	28,60	61,15	29,59	14,79
10	139,93	132,76	227,39	145,76	48,59	957,60	116,61	1672,00	275,56	224,38	87,90	236,19	118,10	29,15	66,08	32,07	19,44
11	125,06	119,29	221,27	126,99	44,25	917,93	121,22	1685,38	253,31	194,86	60,41	253,31	126,66	27,90	59,65	28,86	14,43
12	138,53	134,10	225,12	144,30	48,10	948,02	115,44	1655,28	272,80	222,14	85,74	233,83	116,91	28,86	65,42	31,75	19,24
13	128,73	122,79	227,75	130,71	45,55	944,82	124,77	1734,75	260,73	200,56	62,18	260,73	130,37	28,72	61,39	29,71	14,85
14	141,33	136,65	231,71	148,53	49,51	975,79	118,83	1703,77	280,79	228,64	88,25	240,68	120,34	29,71	67,33	32,68	19,80
15	142,03	136,11	230,80	147,95	49,32	971,96	118,36	1697,08	279,69	227,75	86,60	239,73	119,87	29,59	67,07	32,55	19,73
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

JAKÁ MÁME DATA?



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	126,33	120,50	223,50	128,27	44,70	927,20	122,44	1702,40	255,87	196,83	61,02	255,87	127,94	28,18	60,25	29,15	14,58
2	136,43	130,75	221,70	142,12	47,37	933,66	113,69	1630,20	268,67	218,77	84,44	230,29	115,14	28,42	64,43	31,27	18,95
3	123,80	118,09	219,03	125,71	43,81	908,66	119,99	1668,35	250,76	192,89	59,49	250,76	125,38	27,62	59,04	28,57	14,28
4	138,96	132,55	245,85	141,10	49,17	1019,92	134,68	1872,64	281,46	216,51	67,12	281,46	140,73	31,00	66,27	32,07	16,03
5	128,85	117,48	217,91	125,06	43,58	941,11	119,38	1659,84	249,48	191,90	59,80	249,48	124,74	27,48	58,74	28,42	14,21
6	137,13	131,42	222,84	142,85	47,62	938,45	114,28	1638,56	270,04	219,89	84,87	231,47	115,73	28,57	64,76	31,43	19,05
7	127,59	121,70	225,74	129,55	45,15	936,47	123,66	1719,42	258,43	198,79	61,63	258,43	129,22	28,46	60,85	29,44	14,72
8	142,59	135,44	229,66	147,22	49,07	967,18	117,78	1688,72	278,31	226,62	87,47	238,55	119,28	29,44	66,74	32,39	19,63
9	128,22	122,30	226,86	130,20	45,37	904,02	124,28	1727,94	259,71	199,78	61,93	259,71	129,86	28,60	61,15	29,59	14,79
10	139,93	132,76	227,39	145,76	48,59	957,60	116,61	1672,00	275,56	224,38	87,90	236,19	118,10	29,15	66,08	32,07	19,44
11	125,06	119,29	221,27	126,99	44,25	917,93	121,22	1685,38	253,31	194,86	60,41	253,31	126,66	27,90	59,65	28,86	14,43
12	138,53	134,10	225,12	144,30	48,10	948,02	115,44	1655,28	272,80	222,14	85,74	233,83	116,91	28,86	65,42	31,75	19,24
13	128,73	122,79	227,75	130,71	45,55	944,82	124,77	1734,75	260,73	200,56	62,18	260,73	130,37	28,72	61,39	29,71	14,85
14	141,33	136,65	231,71	148,53	49,51	975,79	118,83	1703,77	280,79	228,64	88,25	240,68	120,34	29,71	67,33	32,68	19,80
15	142,03	136,11	230,80	147,95	49,32	971,96	118,36	1697,08	279,69	227,75	86,60	239,73	119,87	29,59	67,07	32,55	19,73
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

JAKÁ MÁME DATA?

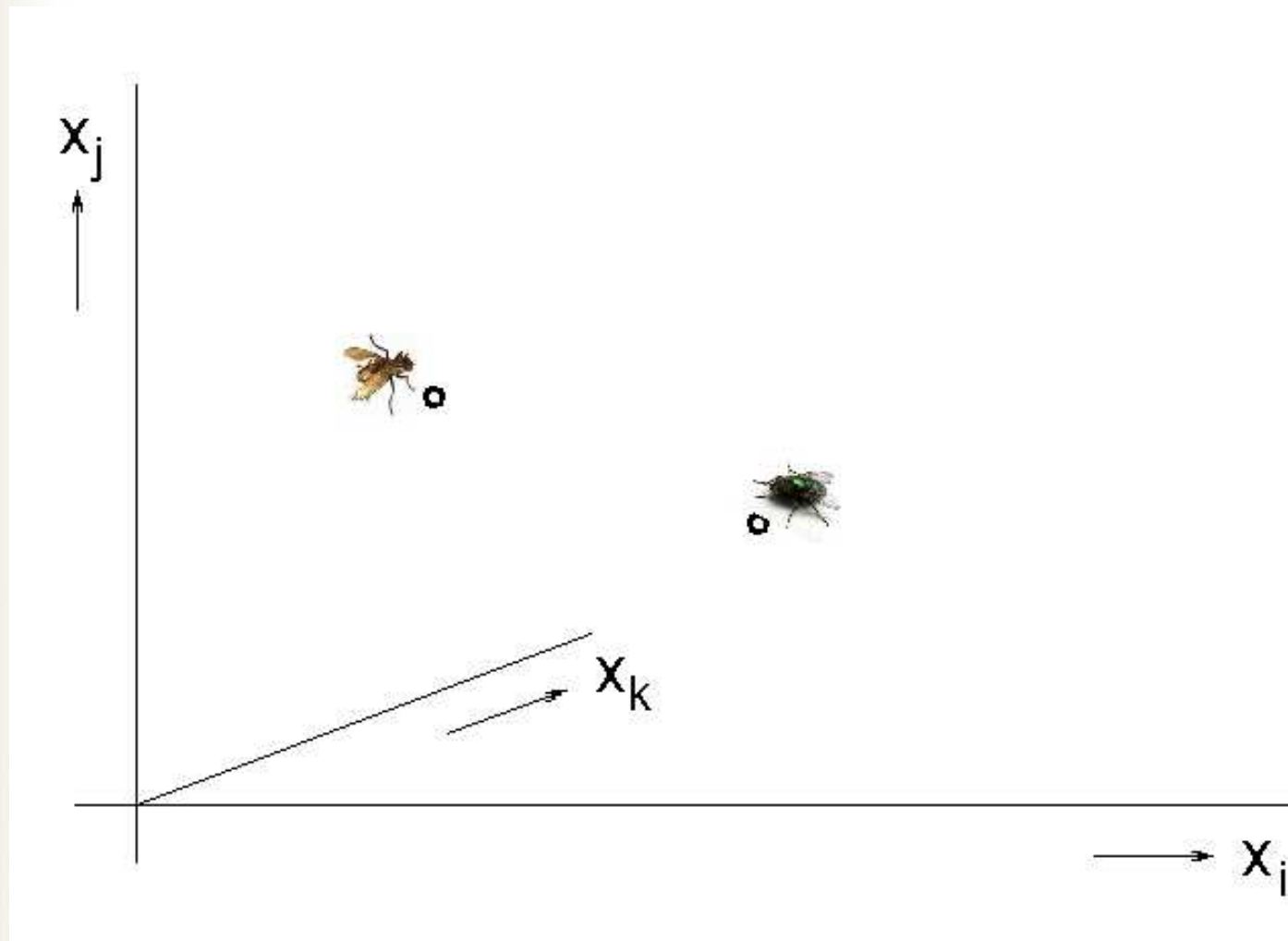


JAKÁ MÁME DATA?



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	126,33	120,50	223,50	128,27	44,70	927,20	122,44	1702,40	255,87	196,83	61,02	255,87	127,94	28,18	60,25	29,15	14,58
2	136,43	130,75	221,70	142,12	47,37	933,66	113,69	1630,20	268,67	218,77	84,44	230,29	115,14	28,42	64,43	31,27	18,95
3	123,80	118,09	219,03	125,71	43,81	908,66	119,99	1668,35	250,76	192,89	59,49	250,76	125,38	27,62	59,04	28,57	14,28
4	138,96	132,55	245,85	141,10	49,17	1019,92	134,68	1872,64	281,46	216,51	67,12	281,46	140,73	31,00	66,27	32,07	16,03
5	128,85	117,48	217,91	125,06	43,58	941,11	119,38	1659,84	249,48	191,90	59,80	249,48	124,74	27,48	58,74	28,42	14,21
6	137,13	131,42	222,84	142,85	47,62	938,45	114,28	1638,56	270,04	219,89	84,87	231,47	115,73	28,57	64,76	31,43	19,05
7	127,59	121,70	225,74	129,55	45,15	936,47	123,66	1719,42	258,43	198,79	61,63	258,43	129,22	28,46	60,85	29,44	14,72
8	142,59	135,44	229,66	147,22	49,07	967,18	117,78	1688,72	278,31	226,62	87,47	238,55	119,28	29,44	66,74	32,39	19,63
9	128,22	122,30	226,86	130,20	45,37	904,02	124,28	1727,94	259,71	199,78	61,93	259,71	129,86	28,60	61,15	29,59	14,79
10	139,93	132,76	227,39	145,76	48,59	957,60	116,61	1672,00	275,56	224,38	87,90	236,19	118,10	29,15	66,08	32,07	19,44
11	125,06	119,29	221,27	126,99	44,25	917,93	121,22	1685,38	253,31	194,86	60,41	253,31	126,66	27,90	59,65	28,86	14,43
12	138,53	134,10	225,12	144,30	48,10	948,02	115,44	1655,28	272,80	222,14	85,74	233,83	116,91	28,86	65,42	31,75	19,24
13	128,73	122,79	227,75	130,71	45,55	944,82	124,77	1734,75	260,73	200,56	62,18	260,73	130,37	28,72	61,39	29,71	14,85
14	141,33	136,65	231,71	148,53	49,51	975,79	118,83	1703,77	280,79	228,64	88,25	240,68	120,34	29,71	67,33	32,68	19,80
15	142,03	136,11	230,80	147,95	49,32	971,96	118,36	1697,08	279,69	227,75	86,60	239,73	119,87	29,59	67,07	32,55	19,73
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

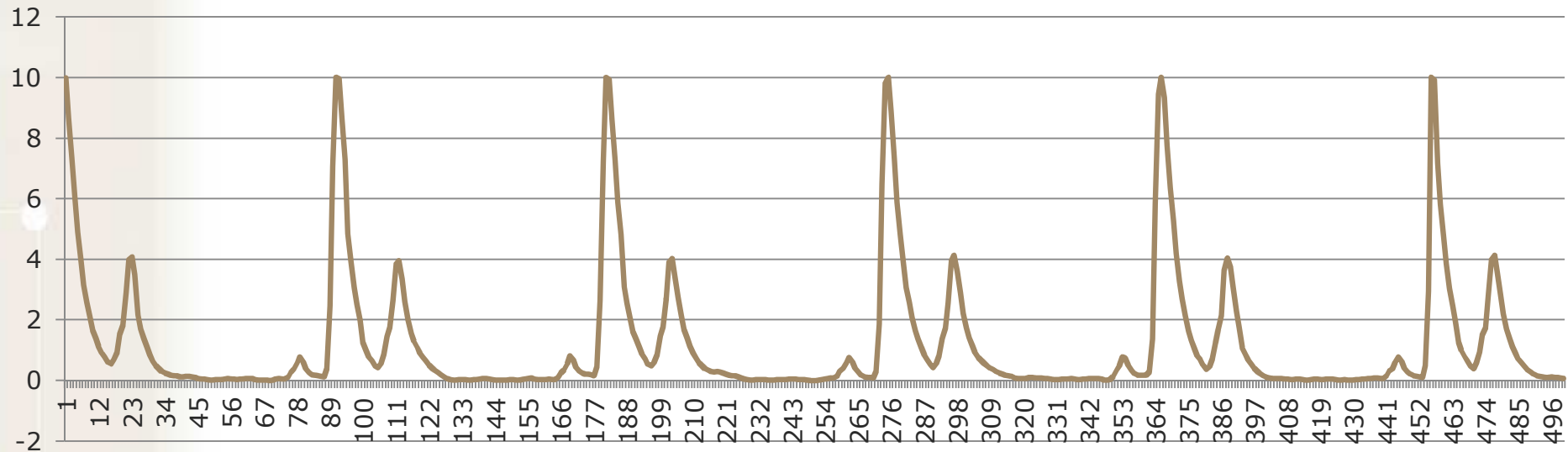
JAKÁ MÁME DATA?



JAKÁ MÁME DATA?

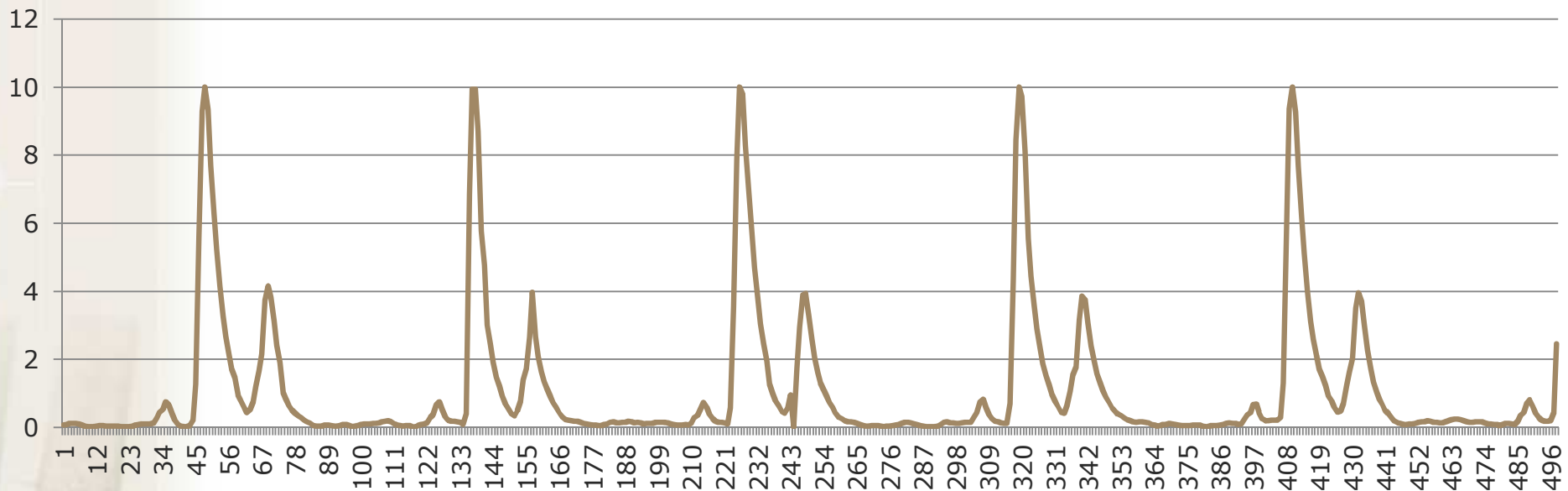
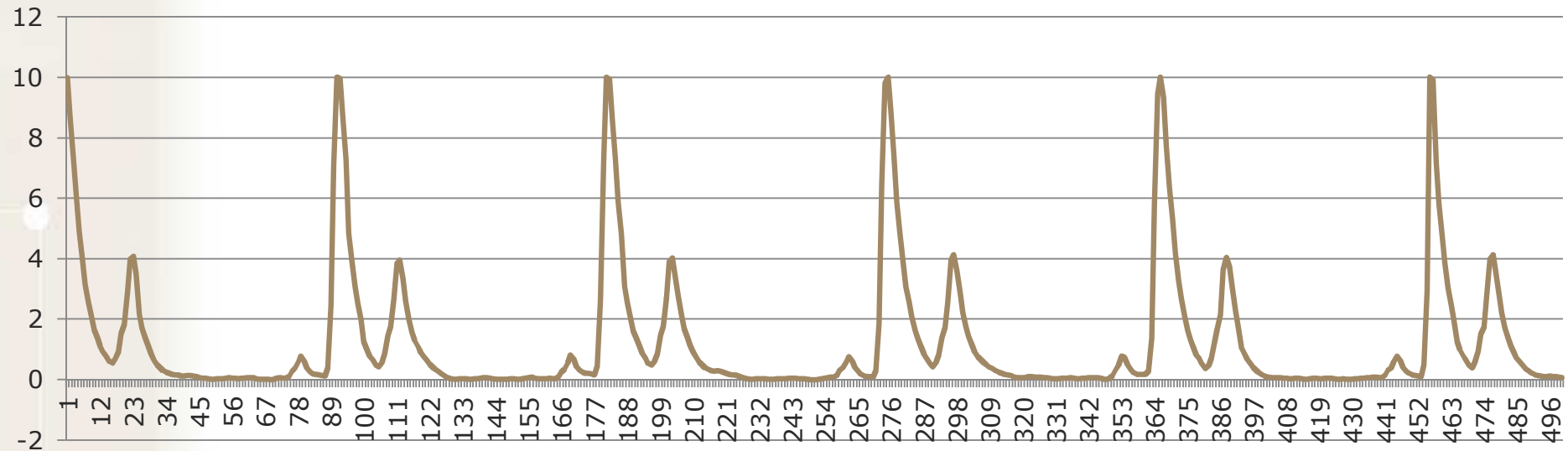
- ☑ data jsou **statická**, nezávisí na čase, ani na žádné jiné veličině - nezávisejí na pořadí, nejsou uspořádaná, ...;

JAKÁ MÁME DATA?



9.99512 8.68195 7.35687 5.98145 4.88892 3.96118 3.14331 2.57416
2.0697 1.64459 1.37085 1.10779 0.895691 0.767517 0.596313
0.546875 0.689392 0.912476 1.52466 1.81915 2.88361 3.99567
4.08142 3.48328 2.7713 2.16492 1.68976 1.37268 1.0968 0.837708
0.635376 0.487366 0.379028 0.286255 0.238647 0.209656 0.171204
0.157166 0.145264 0.122375 0.121155 0.1297 0.128479 0.116577
0.101624 0.0704956 0.0476074 0.0439453 0.0259399 0.00793457
0.0131226 0.0228882 0.0244141 0.0265503 0.0476074 0.055542
0.0488281 0.0442505

JAKÁ MÁME DATA?



JAKÁ MÁME DATA?

- ☑ data jsou **statická**, nezávisí na čase, ani na žádné jiné veličině - nezávisí na pořadí, nejsou uspořádaná, ...;
- ☑ data jsou **dynamická**, časově závislá nebo závislá na nějaké jiné veličině, např. délkové míře, jsou uspořádaná, ...;

DEFINICE



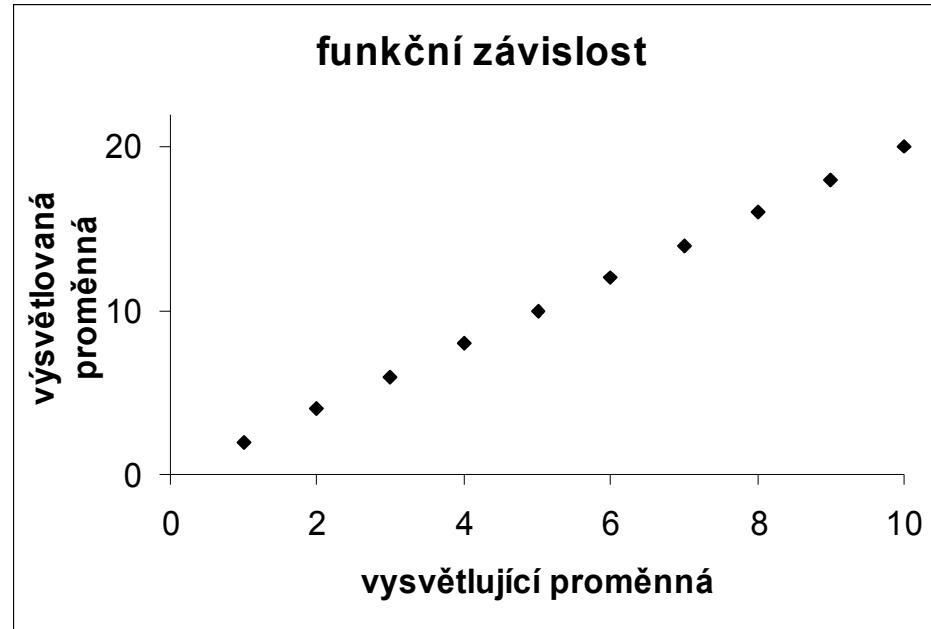
Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný lineární vztah mezi znaky či veličinami **x** a **y** .

ZÁVISLOST

- ☑ funkční, deterministická

$$y = f(x)$$

(dané hodnotě x odpovídá jen určitá hodnota y)



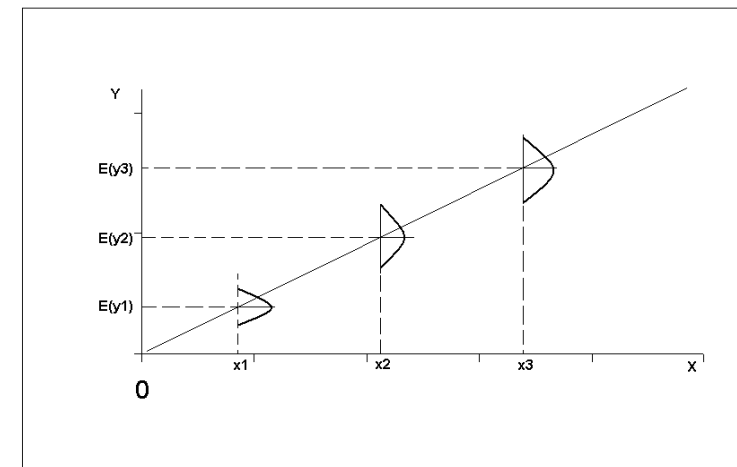
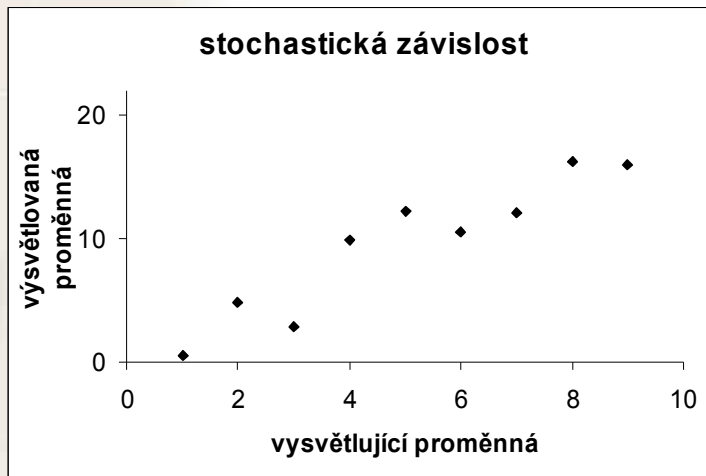
ZÁVISLOST

☑ stochastická, nedeterministická, volná

- závisle proměnná, případně i nezávisle proměnná jsou náhodné veličiny (?) – jsou úplně náhodné?
- určité hodnotě x přísluší možné hodnoty y vybrané z určitého rozdělení;
- střední hodnota rozdělení y je funkcí x

$$E(y) = f(x)$$

- střední hodnota náhodné veličiny y je funkcí střední hodnoty náhodné veličiny x $E(y) = f[E(x)]$

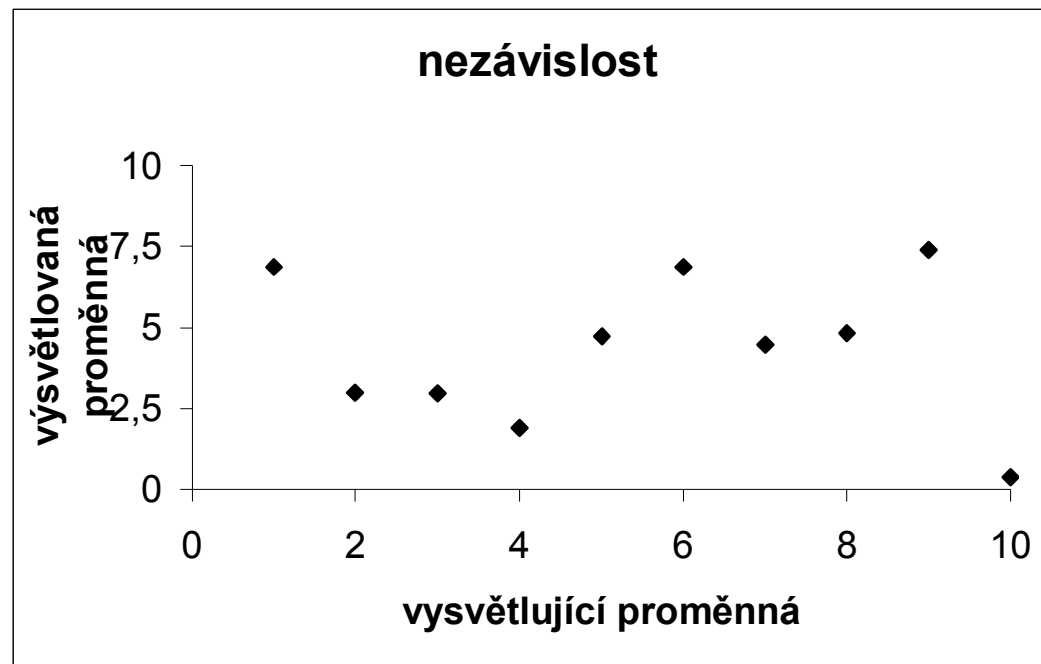


ZÁVISLOST

☑ nezávislost

střední hodnota y nezávisí na x $E(y) \neq f(x)$

(**přísně** funkční závislost (úplná) v reálném světě neexistuje)



DEFINICE



Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný lineární vztah mezi znaky či veličinami **x** a **y** .

Tento vztah může být kladný, pokud (přibližně) platí $y = kx$, nebo záporný ($y = -kx$).

DEFINICE



Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný lineární vztah mezi znaky či veličinami **x** a **y** .

Tento vztah může být kladný, pokud (přibližně) platí $y = kx$, nebo záporný ($y = -kx$).

Míru korelace v tom případě vyjadřujeme **korelačním koeficientem**.

DEFINICE



Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami X a Y .

Tento vztah může být kladný, pokud (přibližně) platí $y = kx$, nebo záporný ($y = -kx$).

Míru korelace v tom případě vyjadřujeme **korelačním koeficientem**.

Hledáme, zda existuje či neexistuje **lineární** vztah mezi veličinami X a Y , reprezentované hodnotami x_i, y_i , příp. hledáme míru těsnosti tohoto vztahu

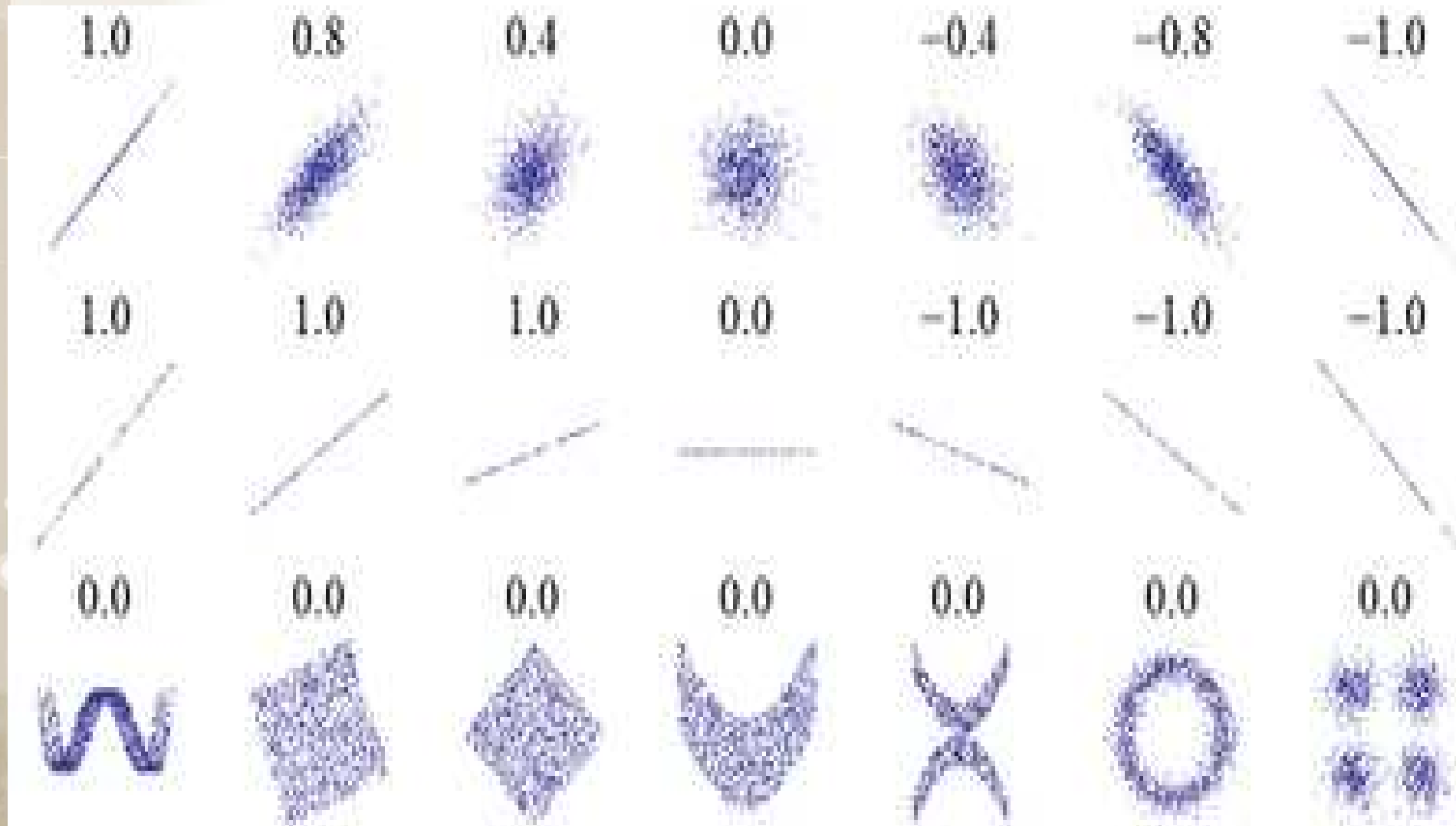
PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))}{\sigma_X \sigma_Y},$$

protože $\mu_X = E(X)$, $\sigma_X^2 = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E^2(X)$ a podobně i pro Y a protože $E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$, je také

$$\rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E^2(X)} \sqrt{E(Y^2) - E^2(Y)}}.$$

PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT



PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

- ☑ nabývá hodnot od -1 do $+1$, které značí perfektní lineární vztah (záporný nebo kladný)
 - v případě kladné korelace hodnoty obou proměnných zároveň stoupají;
 - v případě záporné korelace hodnota jedné proměnné stoupá a druhé klesá;
 - v případě neexistence lineárního vztahu $r = 0$;
- ☑ je nezávislý na jednotkách původních proměnných, je bezrozměrný;
- ☑ při změně pořadí proměnných se výše korelačního koeficientu nemění;
- ☑ korelační koeficient je platný pouze v rozmezí daném použitými daty;
- ☑ korelační koeficient výrazně odlišný od nuly není důkazem funkčního vztahu proměnných, jiného než lineárního;
- ☑ malá hodnota korelačního koeficientu není známkou nefunkčního vztahu proměnných.

PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

Správná interpretace Pearsonova korelačního koeficientu předpokládá, že obě proměnné jsou náhodné veličiny a mají **společné dvourozměrné normální rozdělení**.

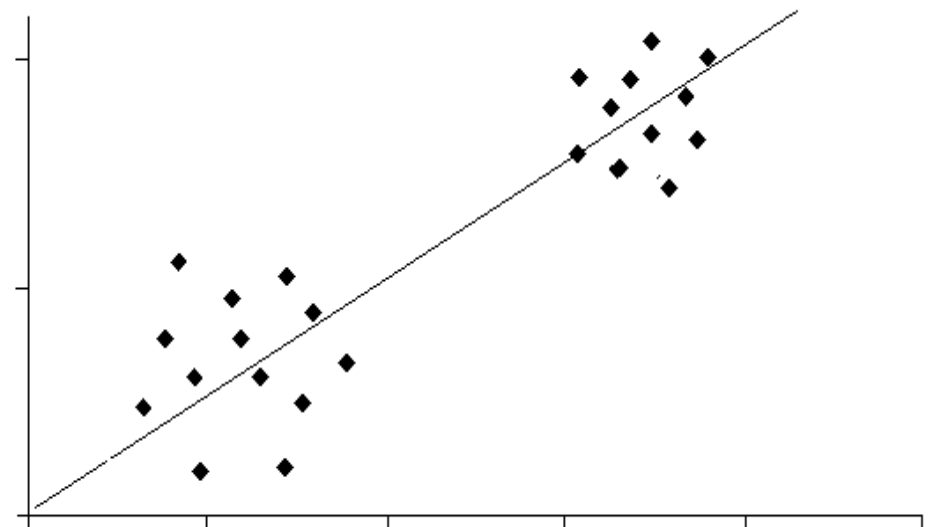
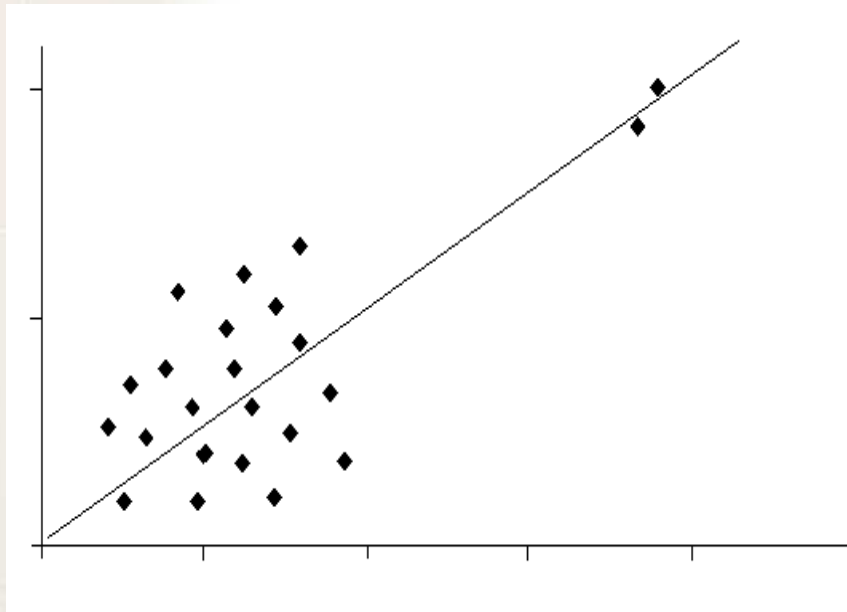
Potom nulový korelační koeficient znamená, že veličiny jsou nezávislé.

Pokud není splněn předpoklad dvourozměrné normality, z nulové hodnoty korelačního koeficientu nelze usuzovat na nic víc, než že veličiny jsou nekorelované.

PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

může být nadhodnocen:

- ☑ vlivem třetí skryté proměnné
- ☑ přítomností odlehlých hodnot
- ☑ data jsou složena z různých podskupin (tříd)



JINÉ KORELAČNÍ KOEFICIENTY

V případě ordinálních dat nebo odchylek od předpokladů rozložení dat (odlehlá pozorování, jiné než normální rozložení proměnných, nelinearita vztahu) je vhodnější použít neparametrický koeficient korelace

$$r = 1 - \frac{6 \sum (Rx_i - Ry_i)^2}{n(n^2 - 1)}$$

Spearmanův koeficient korelace,

kde Rx_i a Ry_i jsou pořadí hodnot x_i a y_i .

Kromě Spearmanova korelačního koeficientu existují i další neparametrické korelační koeficienty jako např. Kendelovo τ .

KORELAČNÍ KOEFICIENT JAKO MÍRA PODOBNOSTI

Metrický prostor je neprázdňá množina X spolu s funkcí $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

- 1. totožnost: $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X$;
- 2. symetrie: $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X$;
- 3. trojúhelníková nerovnost:

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \forall x, y, z \in X.$$

ρ je nezáporná funkce.

(pozitivita, symetrie, Δ nerovnost)

Funkci ρ nazýváme **metrika** na X .

Vzdálenost je hodnota určená podle metriky.

KORELAČNÍ KOEFICIENT JAKO MÍRA PODOBNOSTI

Míry podobnosti

- 1. totožnost: $\sigma(x, y) = \max R \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X;$
- 2. symetrie: $\sigma(x, y) = \sigma(y, x), \forall x, y \in X;$
- 3. Δ nerovnost

σ je nezáporná funkce.

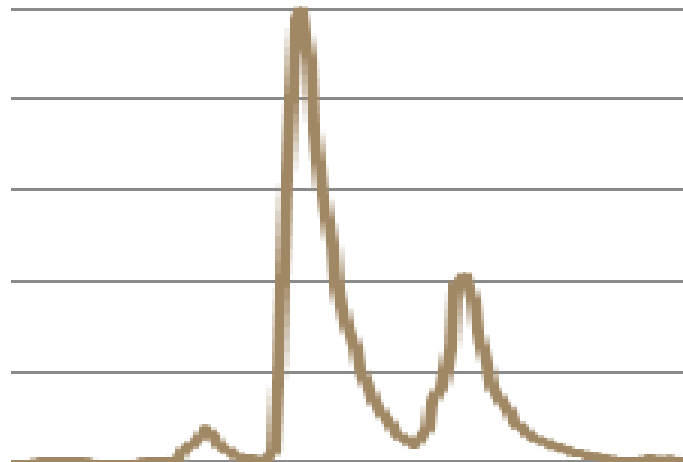
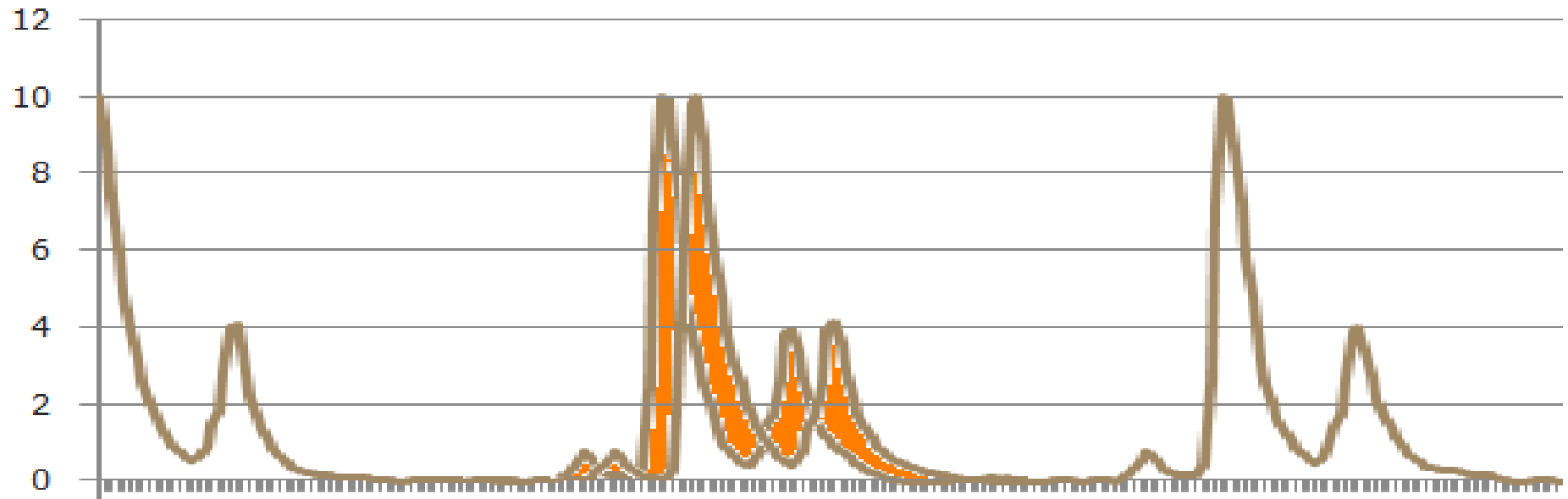
Funkci σ nazýváme **mírou podobnosti** na X .

Podobnost je hodnota určená podle míry podobnosti.

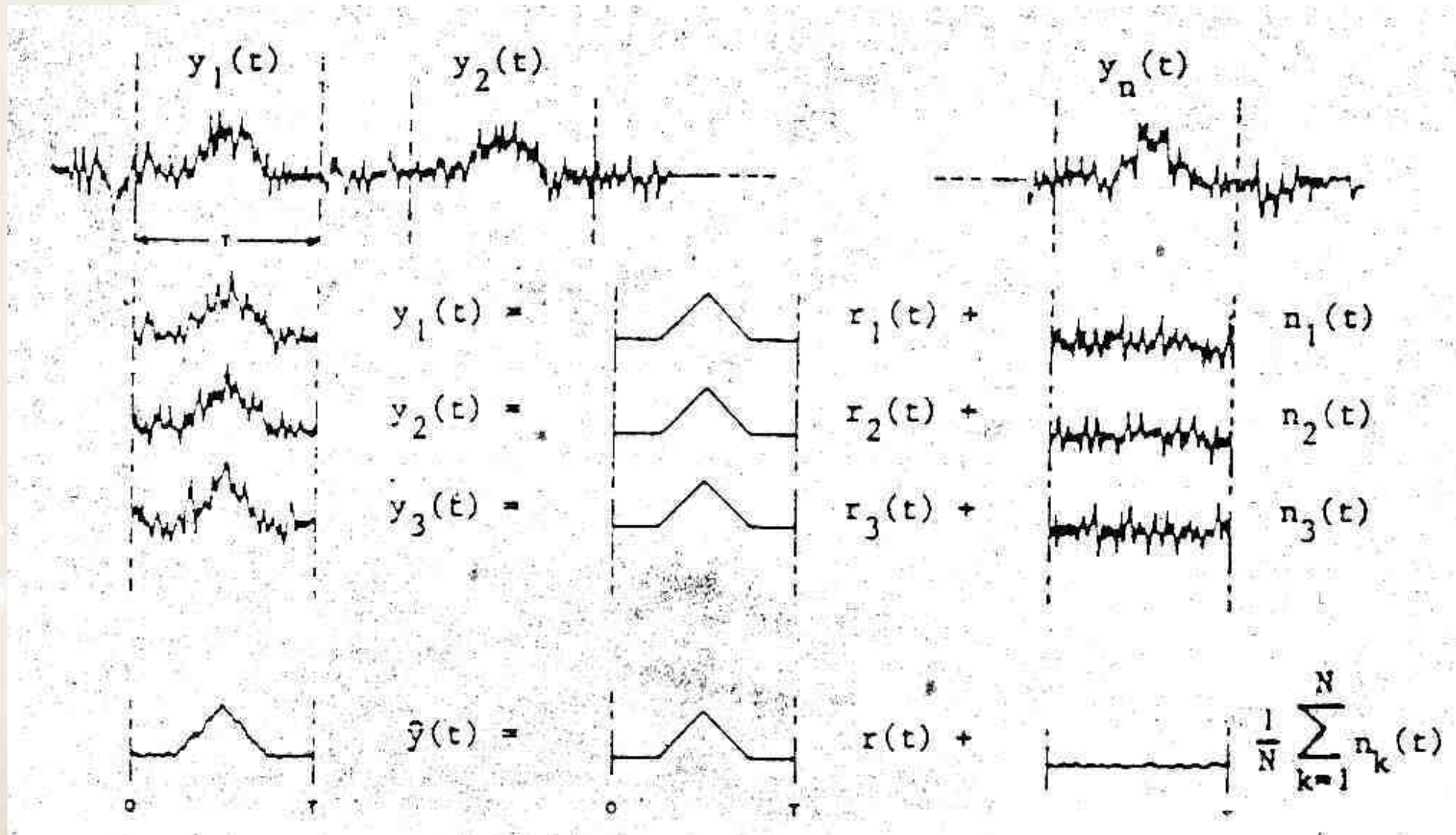
INTERPRETACE VELIKOSTI KORELACE

korelace	negativní	pozitivní
malá	-0.3 až -0.1	0.1 až 0.3
střední	-0.5 až -0.3	0.3 až 0.5
velká	-1.0 až -0.5	0.5 až 1.0

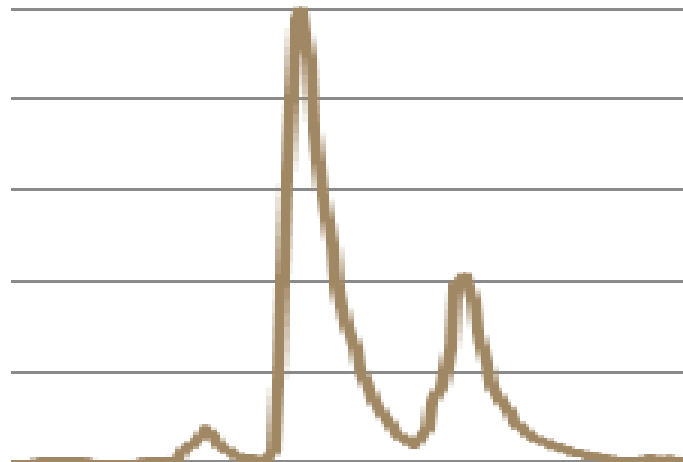
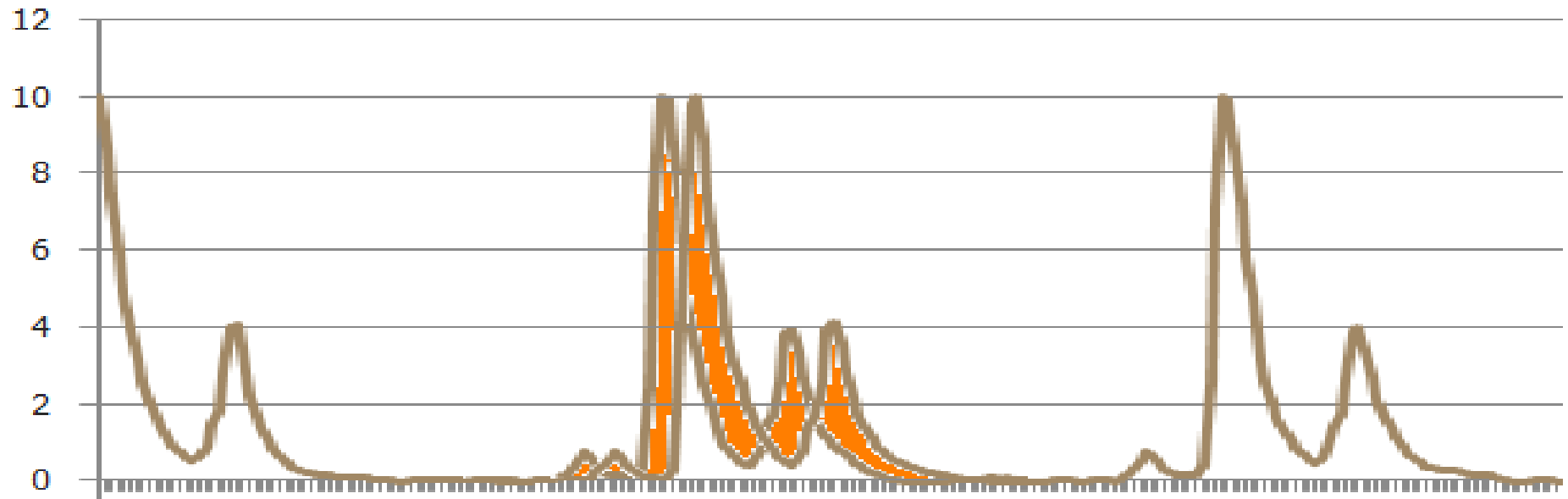
KORELACE PŘI ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU EKG



PRINCIP ZPRŮMĚROVÁNÍ



KORELACE PŘI ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU EKG



KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ✓ **korelační funkce** $R(t_1, t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi hodnotami náhodného procesu v okamžiku t_1 a hodnotami náhodného procesu v okamžiku t_2 .
Může být spočítána pomocí vztahu

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

- ✓ **kovarianční funkce** (*covariance function*) $K(t_1, t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi odchylkami náhodného procesu v okamžiku t_1 od $m(t_1)$ a odchylkami náhodného procesu v okamžiku t_2 od $m(t_2)$. Může být spočítána pomocí vztahu

$$K(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m(t_1)] [x_2 - m(t_2)] p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ☑ tyto poměrně obecné vztahy se mohou zjednodušit, pokud se zjednoduší vlastnosti náhodných procesů



stacionarita

ergodicita

KORELAČNÍ FUNKCE ERGODICKÉHO PROCESU

- ☑ křížová korelační funkce mezi dvěma vzájemně ergodickými procesy $\xi(t)$ a $\eta(t)$ s realizacemi $x(t)$ a $y(t)$ za čas T

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

- ☑ obecně pro $T \rightarrow \infty$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

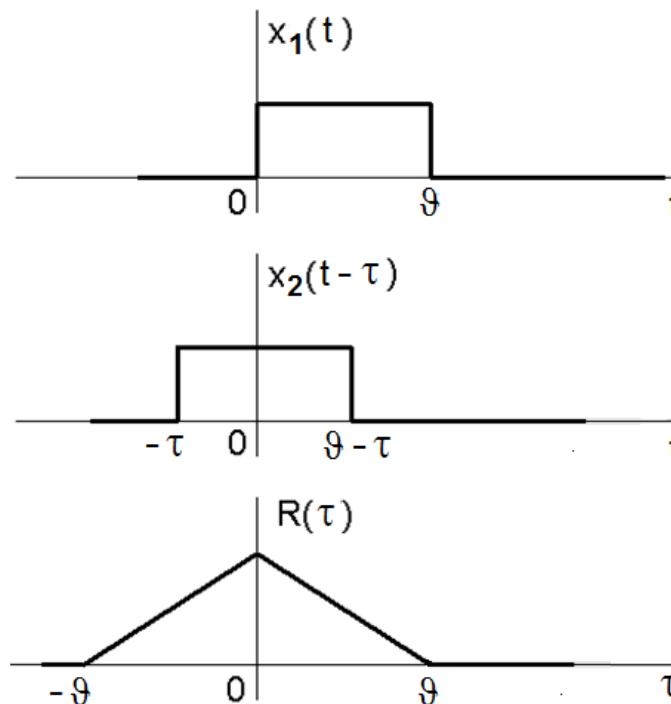
$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$

AUTOKORELAČNÍ FUNKCE ERGODICKÉHO PROCESU

- ☑ autokorelační funkce ergodického procesu $\xi(t)$ s realizací $x(t)$ za čas T

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$



KORELAČNÍ FUNKCE PERIODICKÉ FUNKCE

- ✓ vzájemná či křížová korelační funkce (*cross-correlation function*) dvou periodických veličin (funkcí) o téže periodě T je definována

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x_1(t)x_2(t + \tau)dt$$

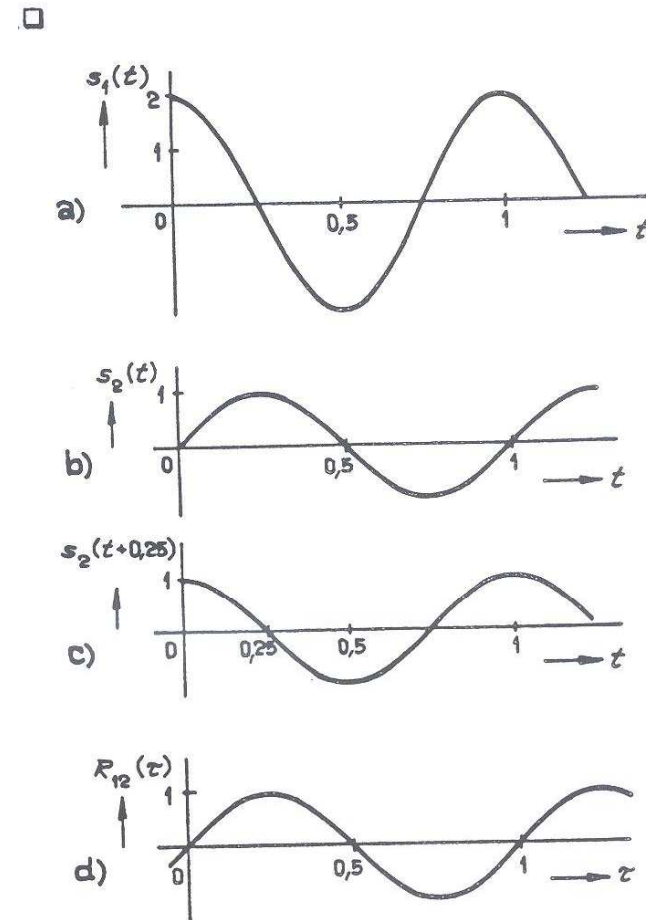
- ✓ popisuje podobnost průběhů obou signálů v závislosti na jejich posunutí
- ✓ je periodická s periodou T

KORELAČNÍ FUNKCE PERIODICKÉ FUNKCE

- ☑ Vypočtěte vzájemnou korelační funkci harmonických funkcí $x_1(t) = 2\cos 2\pi t$ a $x_2(t) = \sin 2\pi t$.

Obě funkce mají tutéž periodu $T=1$, takže

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t)x_2(t+\tau)dt = \\ &= \frac{1}{1} \int_0^1 2\cos(2\pi t) \cdot \sin(2\pi(t+\tau))dt = \\ &= \int_0^1 [\sin(4\pi t + 2\pi\tau) + \sin(2\pi\tau)]dt = \\ &= 0 + \sin(2\pi\tau) \end{aligned}$$



Obr. 1-34. Korelační funkce.
a) Signál $s_1(t)$,
b) signál $s_2(t)$,
c) signál $s_2(t+0,25)$,
d) korelační funkce $R_{12}(\tau)$.

AUTOKORELAČNÍ FUNKCE PERIODICKÉ FUNKCE

- ☑ autokorelační funkce periodické funkce

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_{\tau} x(t)x(t + \tau)dt$$

- ☑ autokorelační funkce veličiny $x(t) = C \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T C \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot C \cdot \cos[\omega(t + \tau) + \varphi] \cdot dt = \\ &= \frac{C^2}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + 2\varphi + \omega\tau) + \cos(\omega\tau)] \cdot dt = \\ &= C_{ef}^2 \cos \omega\tau \end{aligned}$$

VLASTNOSTI AUTOKORELAČNÍ FUNKCE

autokorelační funkce je:

- ✓ sudá;
- ✓ $\forall \tau \in \mathbb{R}: R(0) \geq R(\tau)$;
- ✓ $R(0)$ je rovno výkonu signálu;

V případě, že je funkce periodická, je autokorelační funkce rovněž periodická se stejnou periodou.

BINÁRNÍ OPERACE

↻ KORELACE ↻

POSLOUPNOSTI DISKRÉTNÍ V ČASE

DISKRÉTNÍ KORELACE

pro spojitý případ obecně platí

$$R_{x_1, x_2}(t_1, t_2) = E[x_1(t_1) \cdot x_2(t_2)]$$

za předpokladu stacionarity a ergodicity pro funkce s definičním oborem $t \in (-\infty, \infty)$

$$R_{x_1, x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt$$

a abychom se vyhnuli limitním komplikacím i v podstatě nulovým hodnotám takto určené korelační funkce využívá se pouze integrální částí vztahu

$$R'_{x_1, x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt.$$

DISKRÉTNÍ KORELACE

na konečném intervalu

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x_1(t)x_2(t + \tau)dt.$$

pro diskrétní posloupnost

$$R_{x_1x_2}(mT_{vz}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(nT_{vz})x_2(nT_{vz} + mT_{vz}).$$

KORELAČNÍ FUNKCE DISKRÉTNÍHO ERGODICKÉHO PROCESU

$$\hat{R}_{x_1x_2}(kT_{vz}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x_1(nT_{vz}) x_2(nT_{vz} + kT_{vz})$$

$$\hat{R}_{x_1x_2}(0) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x_1(nT_{vz}) x_2(nT_{vz} + 0)$$

☑ korelační funkce pro standardizovaná data

$$\hat{R}_{x_1x_2}(0) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{[x_1(nT_{vz}) - m_x]}{\sigma_x} \cdot \frac{[x_2(nT_{vz}) - m_y]}{\sigma_y}$$

DISKRÉTNÍ KORELACE

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$

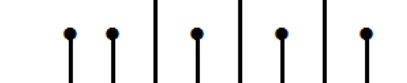
$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$

$x_1(n)$



$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$

$x_2(n+m)$



n

a)

$N = 8; \quad m = 1; \quad N - |m| = 7$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$

$x_1(n)$



$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$

$x_2(n+m)$

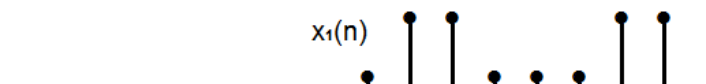


n

b)

$N = 8; \quad m = N-1; \quad N - |m| = 1$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



$\Sigma \quad x \quad n$

$x_2(n+m)$



n

c)

$${}^1R_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

$${}^2R_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

DISKRÉTNÍ KORELACE

odhad s konstantní vahou

$${}^1\mathbb{R}_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

každá hodnota korelační sumy se považuje za hodnotu autokorelační funkce se stejnou vahou, která se rovná převrácené hodnotě celkového počtu vzorků vstupních posloupností $x_1(n)$ a $x_2(n)$, N je délka posloupnosti. Střední hodnota tohoto odhadu je (bez důkazu)

$$E[{}^1\mathbb{R}_{x_1x_2}] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-|m|} E[x_1(n)x_2(n+m)] = \frac{N-|m|}{N} R_{x_1x_2}(m),$$

kde $R_{x_1x_2}(m)$ je skutečná hodnota korelační funkce. To znamená, že střední hodnota odhadu se nerovná správné hodnotě, ale blíží se jí, když $N \rightarrow \infty$ a $|m| \ll N$. Platí tedy, že

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E({}^1\mathbb{R}_{x_1x_2}) = R_{x_1x_2}(m),$$

odhad je asymptoticky nevychýlený.

DISKRÉTNÍ KORELACE

odhad s konstantní vahou

$$\hat{R}_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

Odhad rozptylu pro posloupnosti reálných čísel je přibližně

$$\text{var}[\hat{R}_{x_1x_2}] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R_{x_1x_2}(n)]^2 + R_{x_1x_2}(n-m)R_{x_1x_2}(n+m).$$

Protože odhad rozptylu konverguje pro $N \rightarrow \infty$ k nule, je odhad korelační funkce konzistentním odhadem $R_{x_1x_2}(m)$. Z praktického hlediska to všechno znamená, že se snižujícím se počtem součinů v korelační sumě se relativně zvyšuje váha, kterou je hodnota součtu násobena a tedy i v případě periodických posloupností není průběh jejich korelační funkce periodický, nýbrž se její kmity tlumí.

DISKRÉTNÍ KORELACE

odhad s proměnnou vahou

$${}^2R_{x_1x_2}^{\square}(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0,1,\dots,N-1.$$

střední hodnota tohoto odhadu je

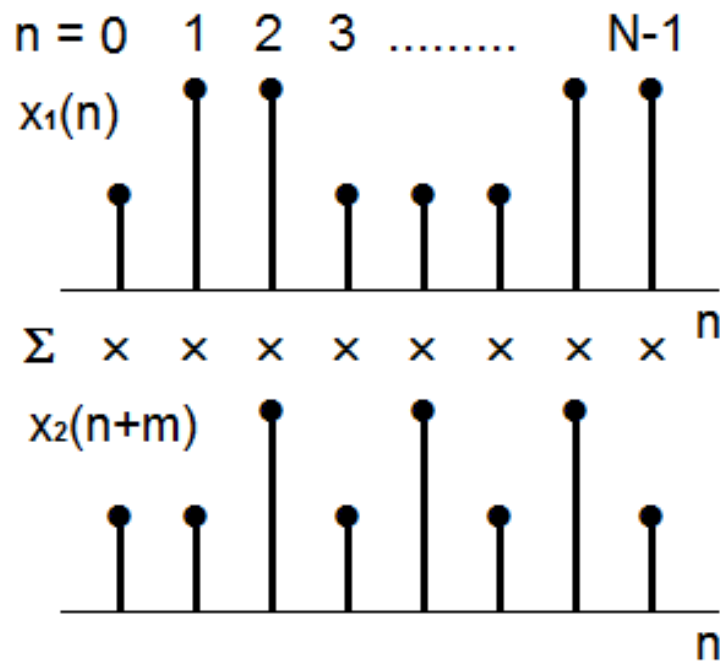
$$E[{}^2R_{x_1x_2}^{\square}(m)] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=1}^{N-|m|} E[x_1(n)x_2(n+m)] = R_{x_1x_2}(m),$$

což znamená, že je rovna, pro libovolné N a m , skutečné hodnotě korelační funkce. Rozptyl tohoto odhadu

$$\text{var}[{}^2R_{x_1x_2}^{\square}] \approx \frac{N}{(N-|m|)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[|R_{x_1x_2}(n)|^2 + R_{x_1x_2}(n-m)R_{x_1x_2}(n+m) \right]$$

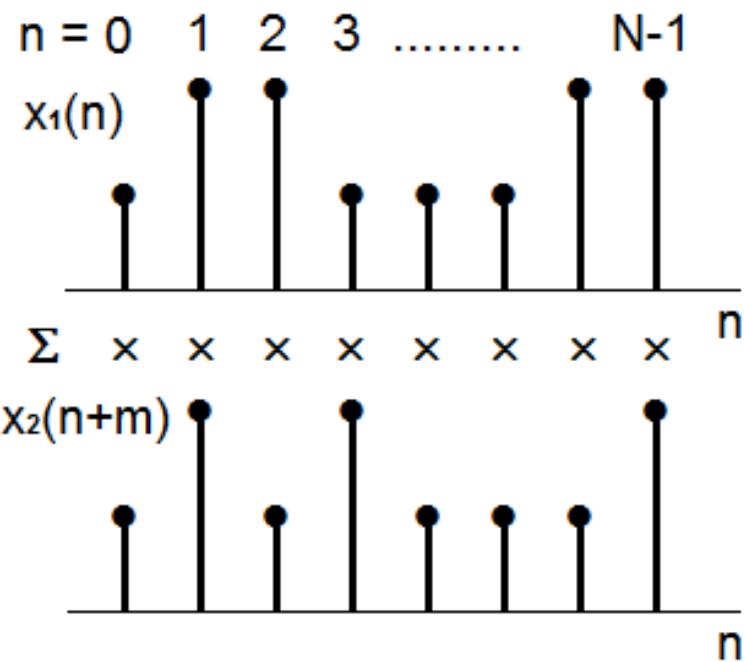
KRUHOVÁ DISKRÉTNÍ KORELACE

$N = 8$; $m = 0$; $N - |m| = 8$



a)

$N = 8$; $m = 3$; $N - |m| = 5$



b)

DISKRÉTNÍ KORELACE PŘÍKLAD ZE ŽIVOTA

