



ČASOVÉ ŘADY (SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY)



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

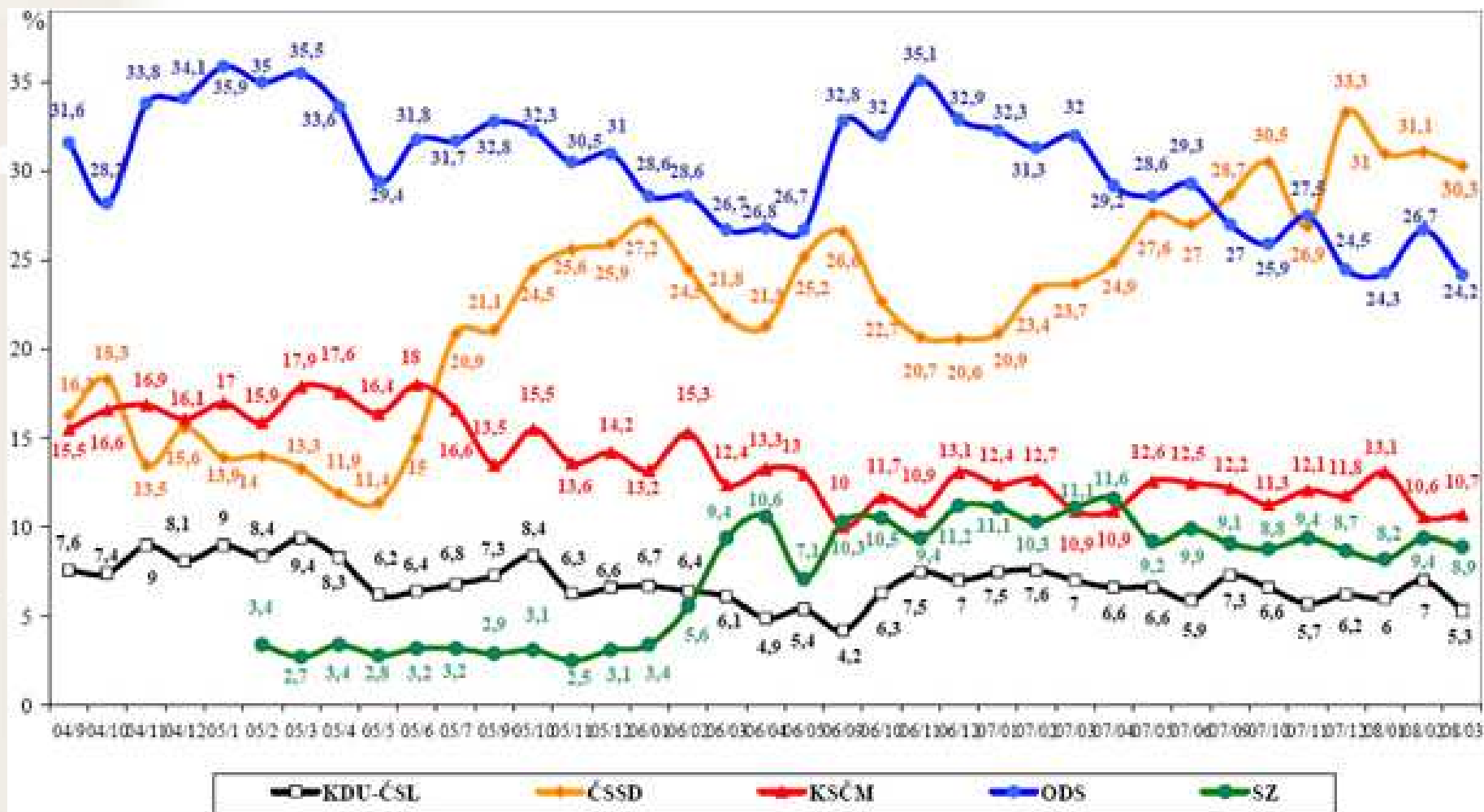


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VII. FREKVENČNÍ TRASFORMACE

∞ FUNKCE SPOJITÉ V ČASE ∞

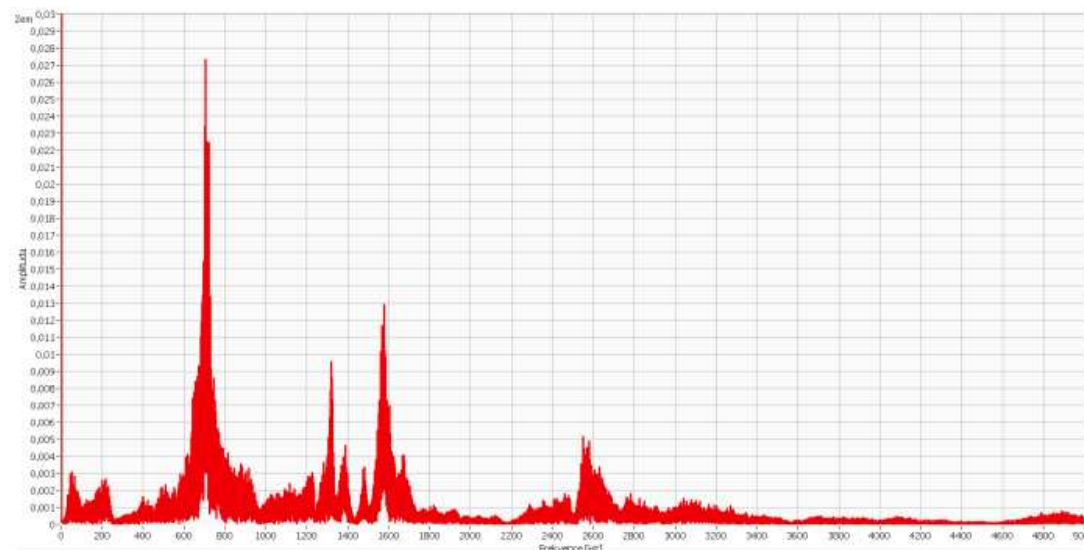
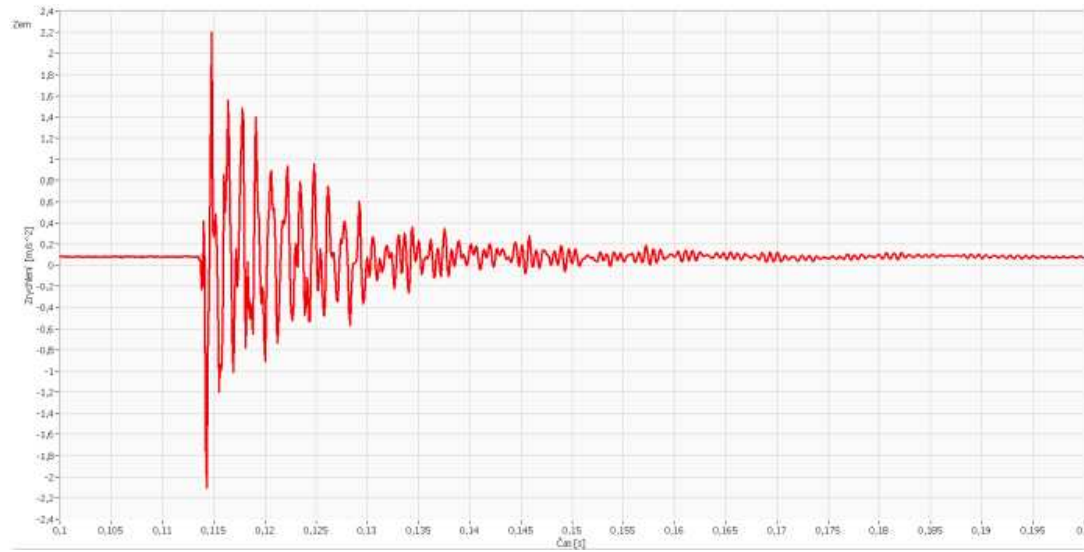
ČASOVÁ ŘADA



Zdroj: STEM, Trendy 2004/9 - 2008/03

Preference politických stran v ČR v období od 8/2004 do 3/2008

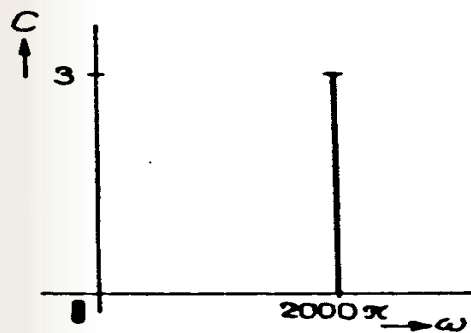
OSCILACE



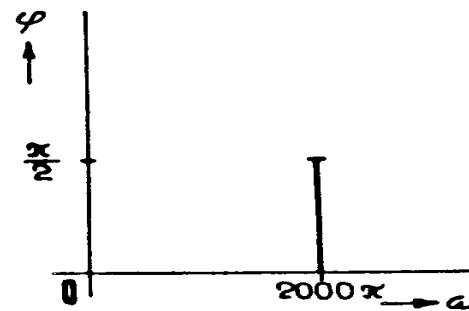
HARMONICKÁ FUNKCE

- ☑ tříparametrickou harmonickou funkci lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách
amplituda \times úhlový kmitočet a počáteční fáze \times
úhlový kmitočet:

$$C_1 = C_1(\omega) \quad \text{a} \quad \varphi_1 = \varphi_1(\omega);$$



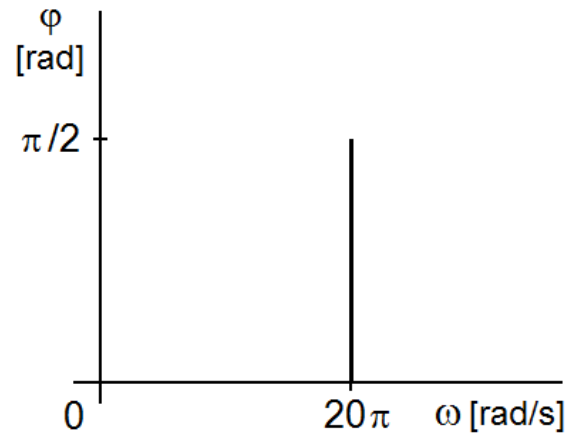
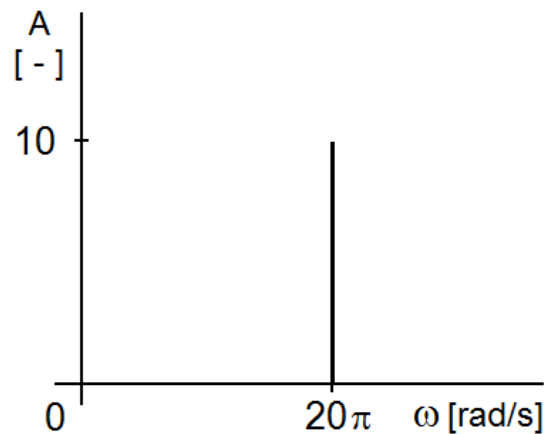
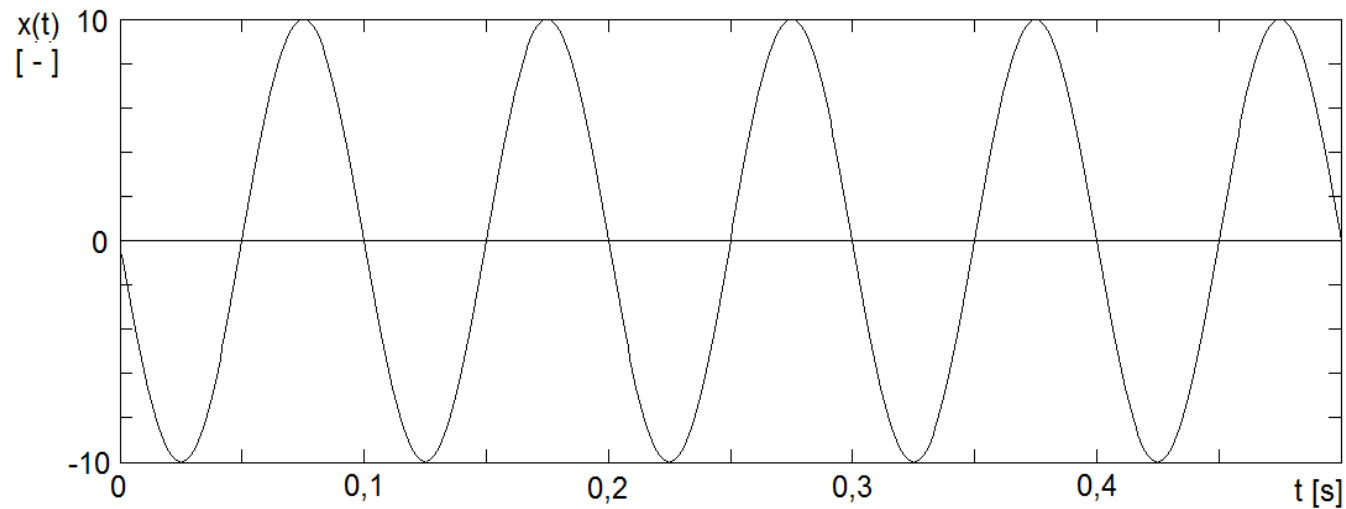
spektrum amplitud



spektrum počátečních fází

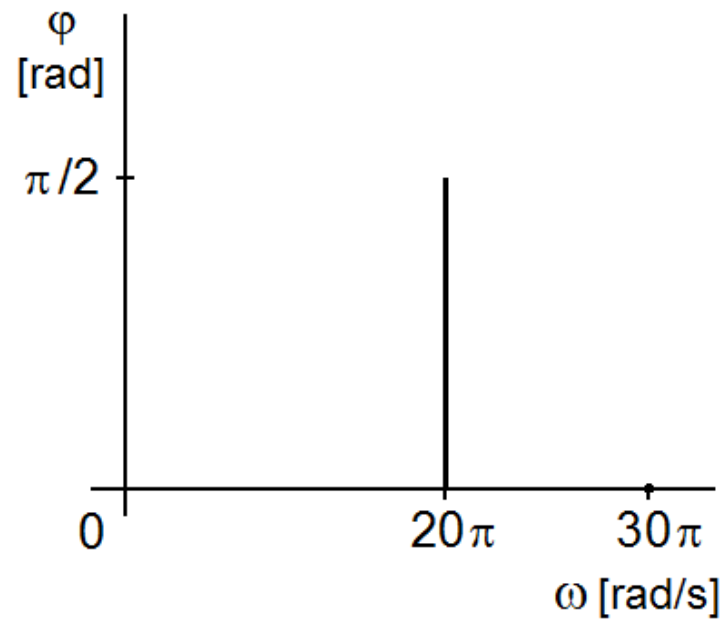
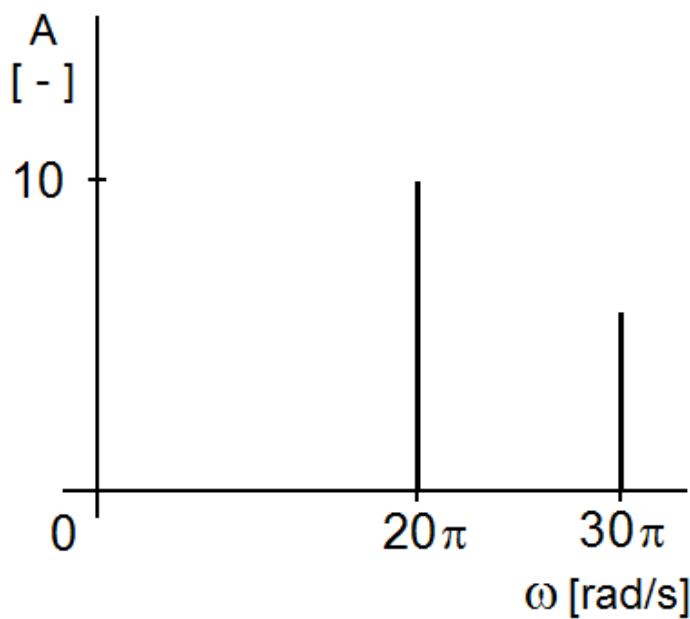
HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 10t + \pi/2).$$



HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 10t + \pi/2) + 5 \cdot \cos(2\pi \cdot 15t)$$



!!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!



Frekvenční spektrum funkce je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se funkce skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT NA VĚKY !

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

- ✓ Fourierova analýza – snaha vyjádřit (rozložit, rozvinout) funkci jako součet jednoduchých funkcí (harmonických funkcí, složek).
- ✓ počty těchto harmonických složek, jejich amplitudy, frekvence a fázové posuny jednoznačně charakterizují analyzovanou funkci.
- ✓ Fourierova řada
- ✓ Fourierův integrál, Fourierova transformace
- ✓ Fourierovy řady mohou být vyjádřeny buď v klasickém, **trigonometrickém** nebo **komplexním** tvaru.
- ✓ zpracovávat můžeme spojité i diskrétní signály.

TAYLORŮV ROZVOJ

Nechť funkce $f(x)$ má v okolí $U(x_0)$ bodu x_0 derivace až do řádu $n+1$ včetně

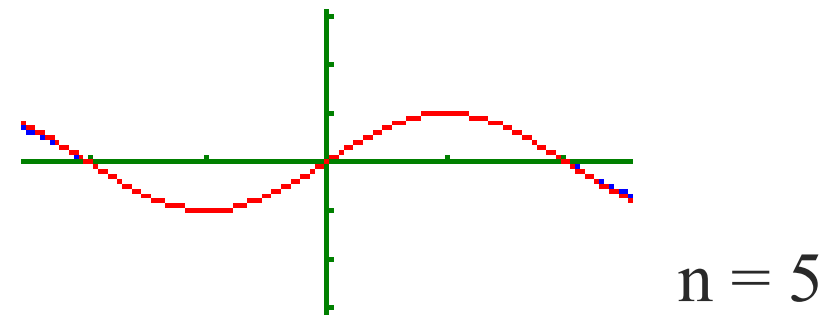
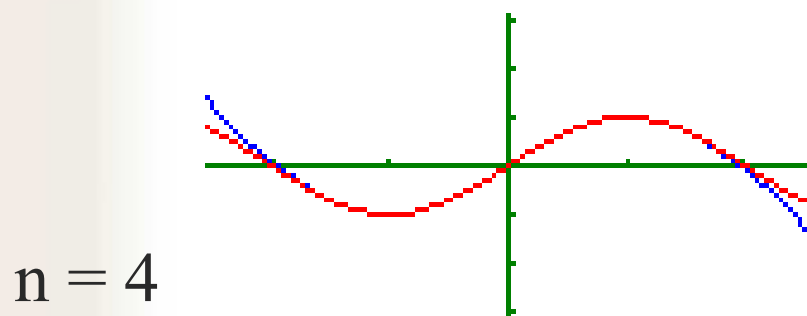
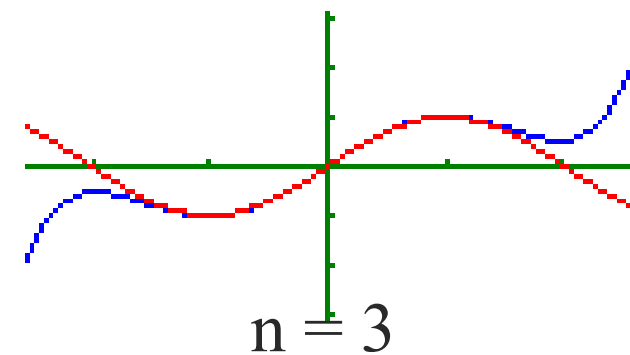
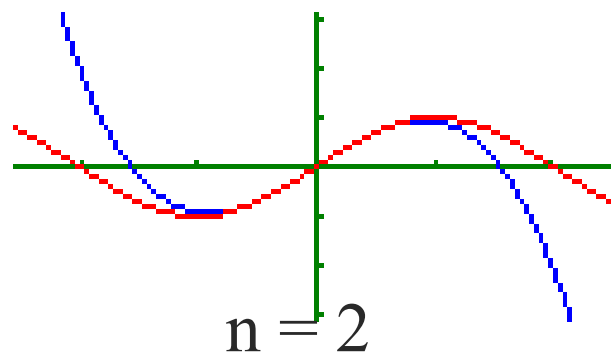
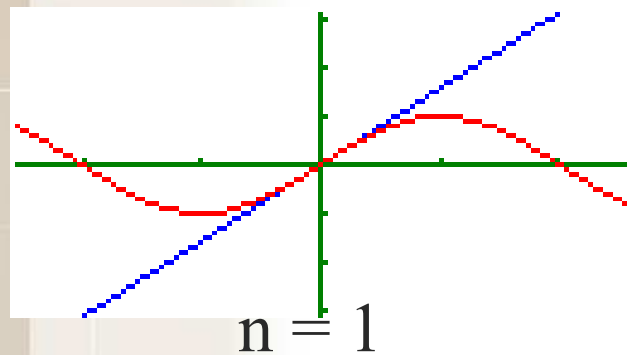
Taylorova řada

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x)$$

Maclaurinova řada, tj. Taylorova řada pro $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x)$$

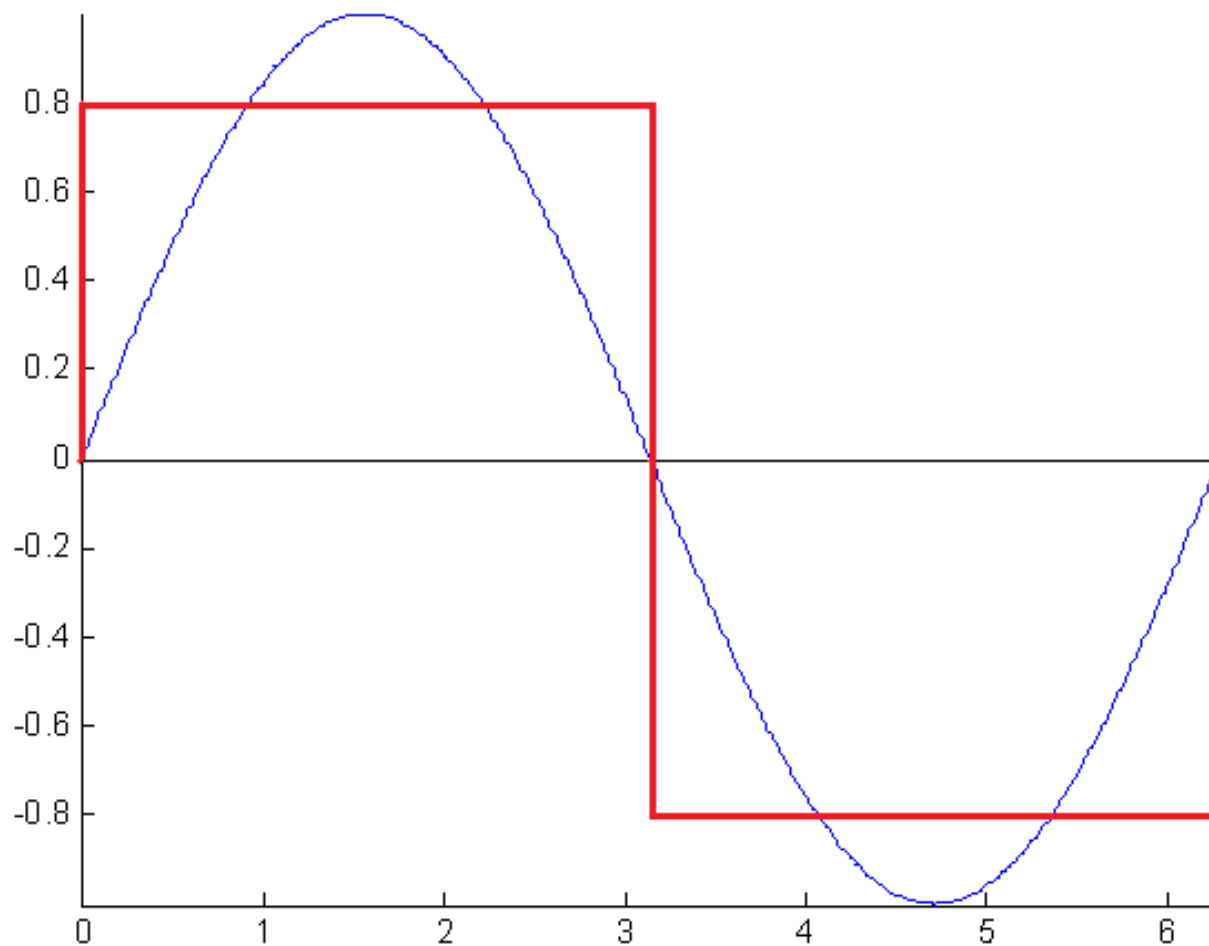
TAYLORŮV ROZVOJ FUNKCE $y = \sin(x)$ PRO $x = 0$

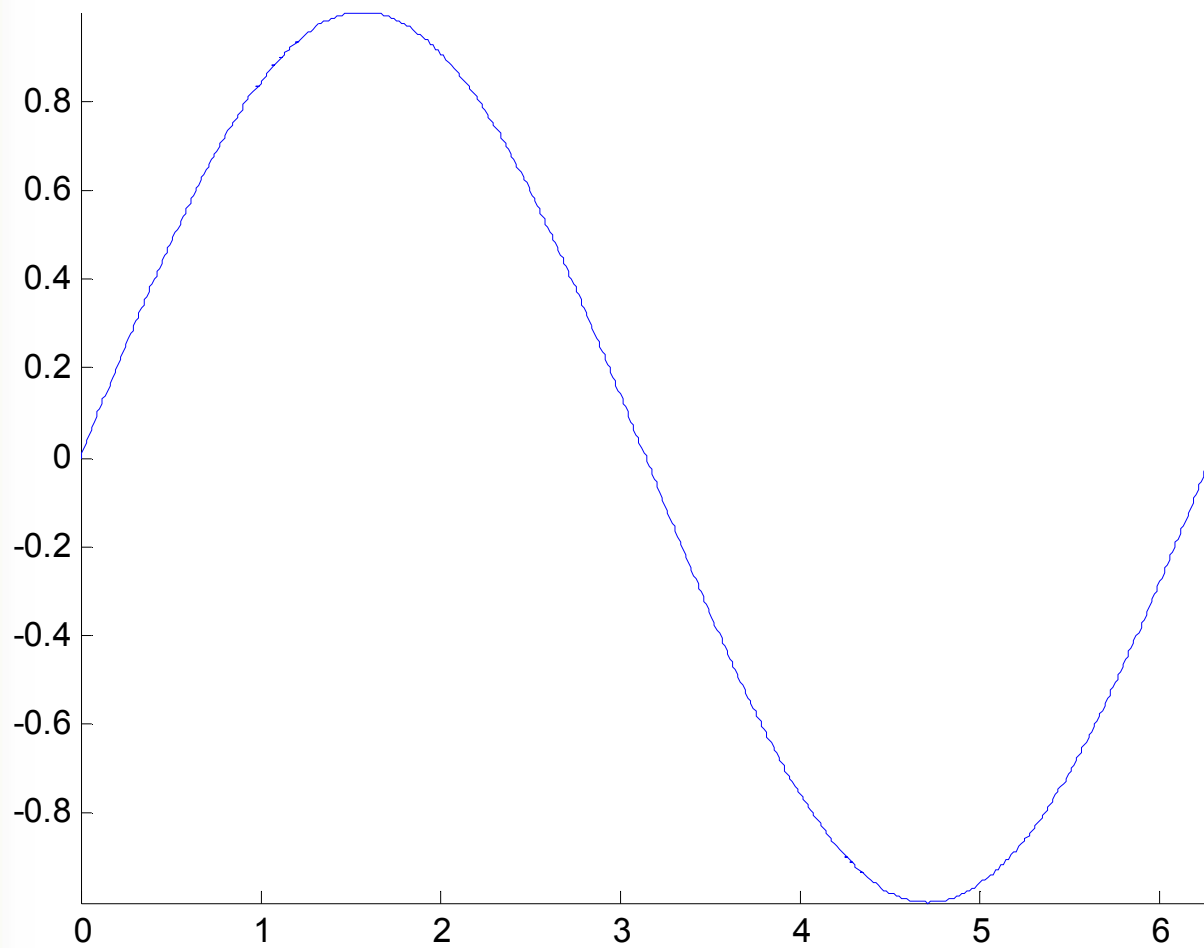


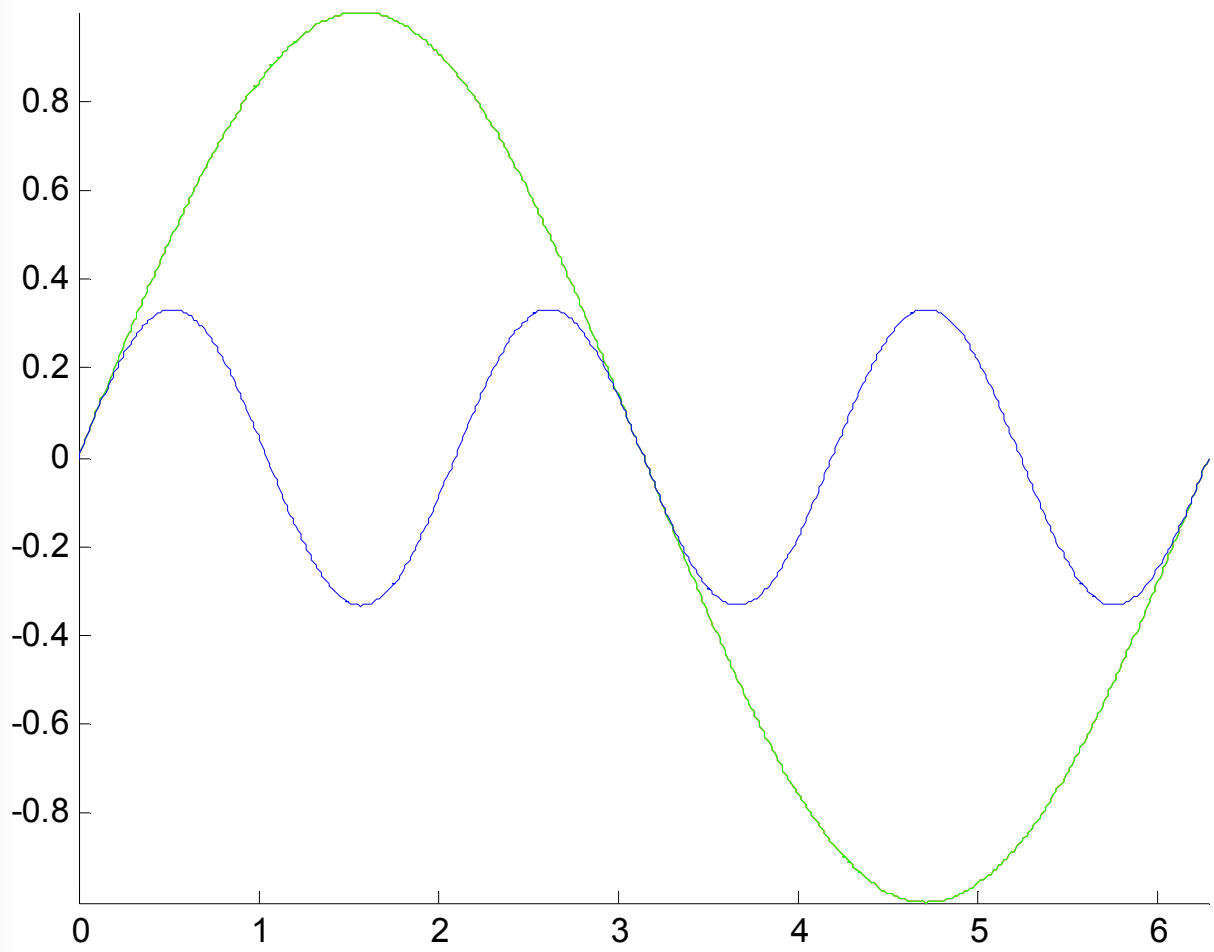
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

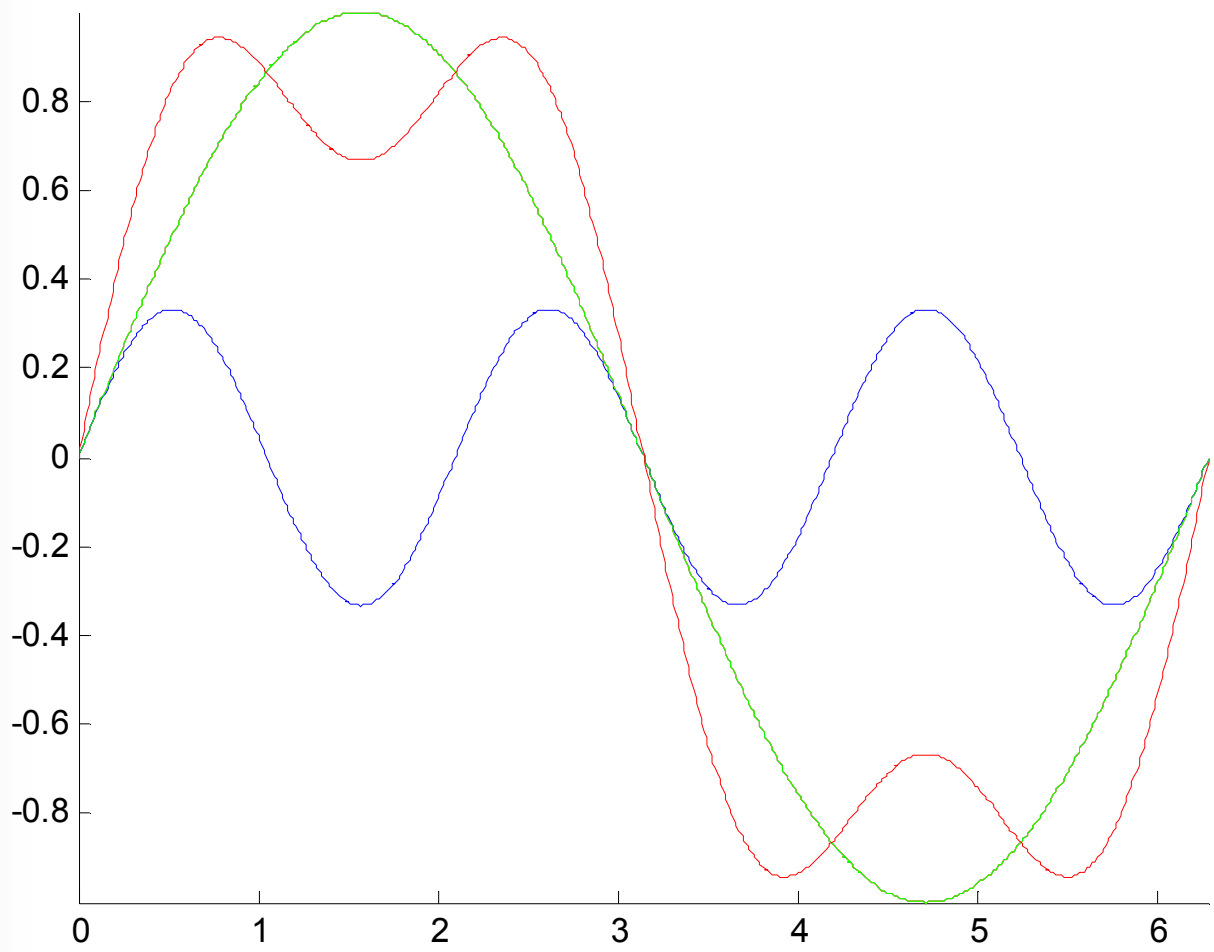
ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY FOURIEROVY ŘADY

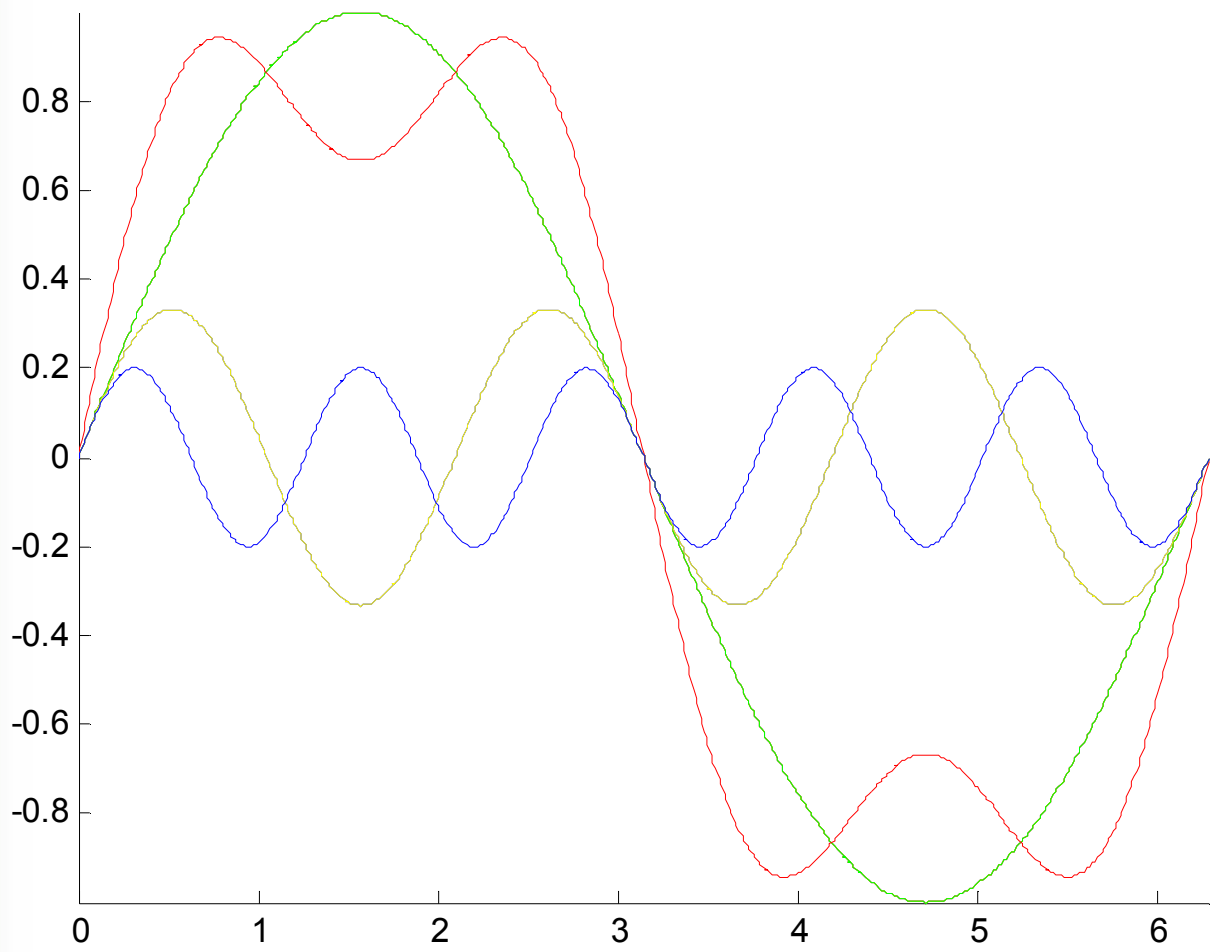
- ✓ poznali jsme, že funkci je možné vyjádřit jako **mocninou řadu**
- jinou možností je vyjádřit funkci jako trigonometrickou řadu (tj. jako součet harmonických funkcí (signálů)).
- pomocí trigonometrických řad lze vyjádřit obsáhlejší třídu funkcí než mocninnými řadami.

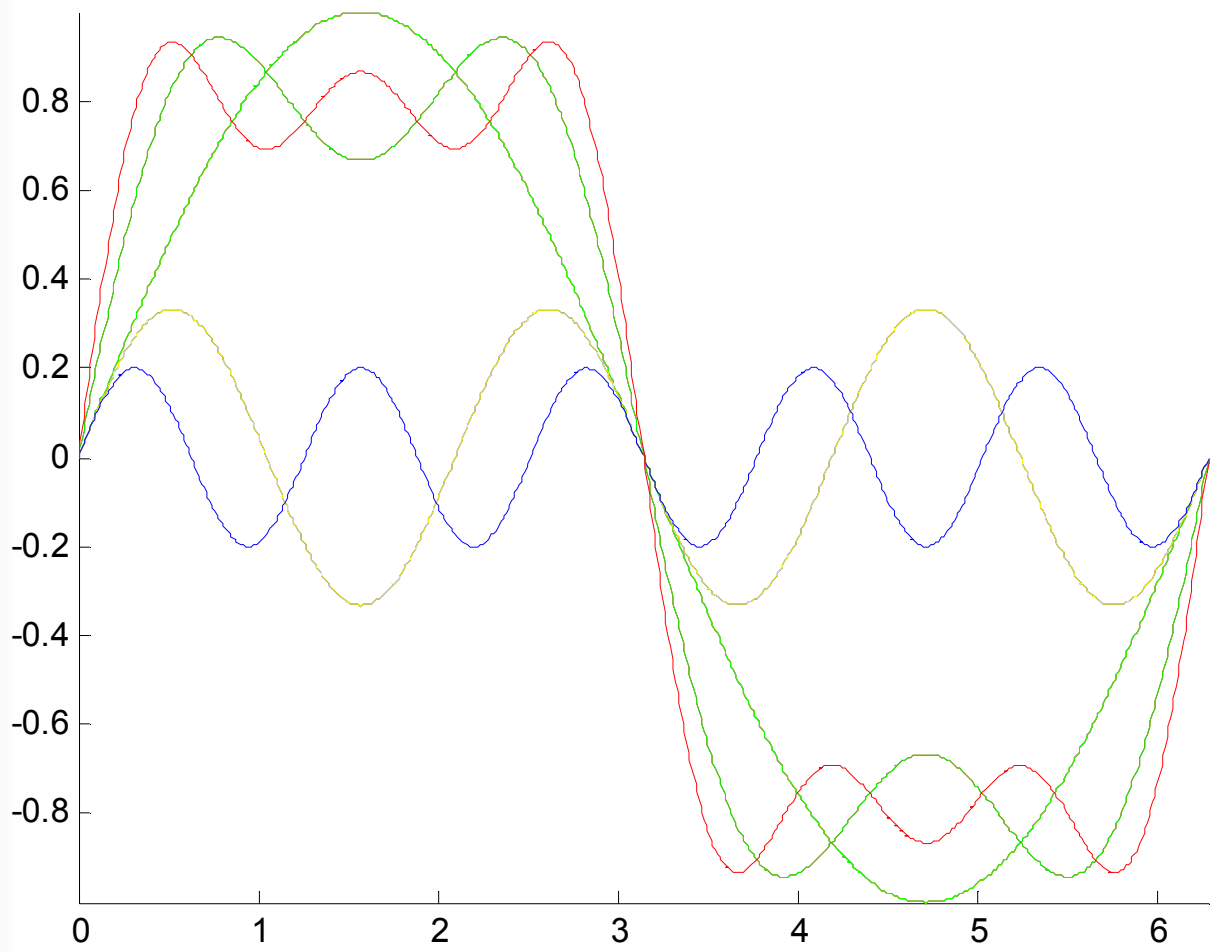


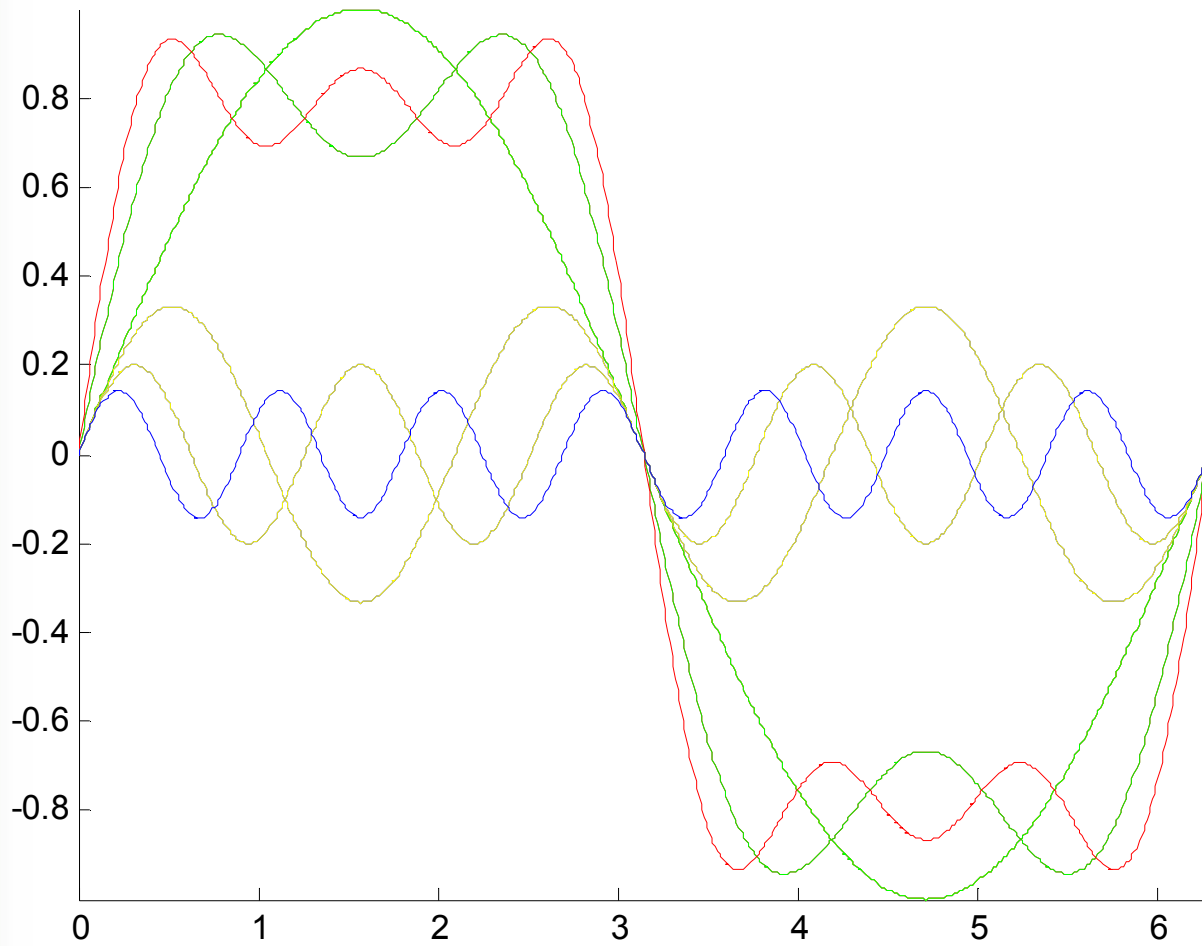


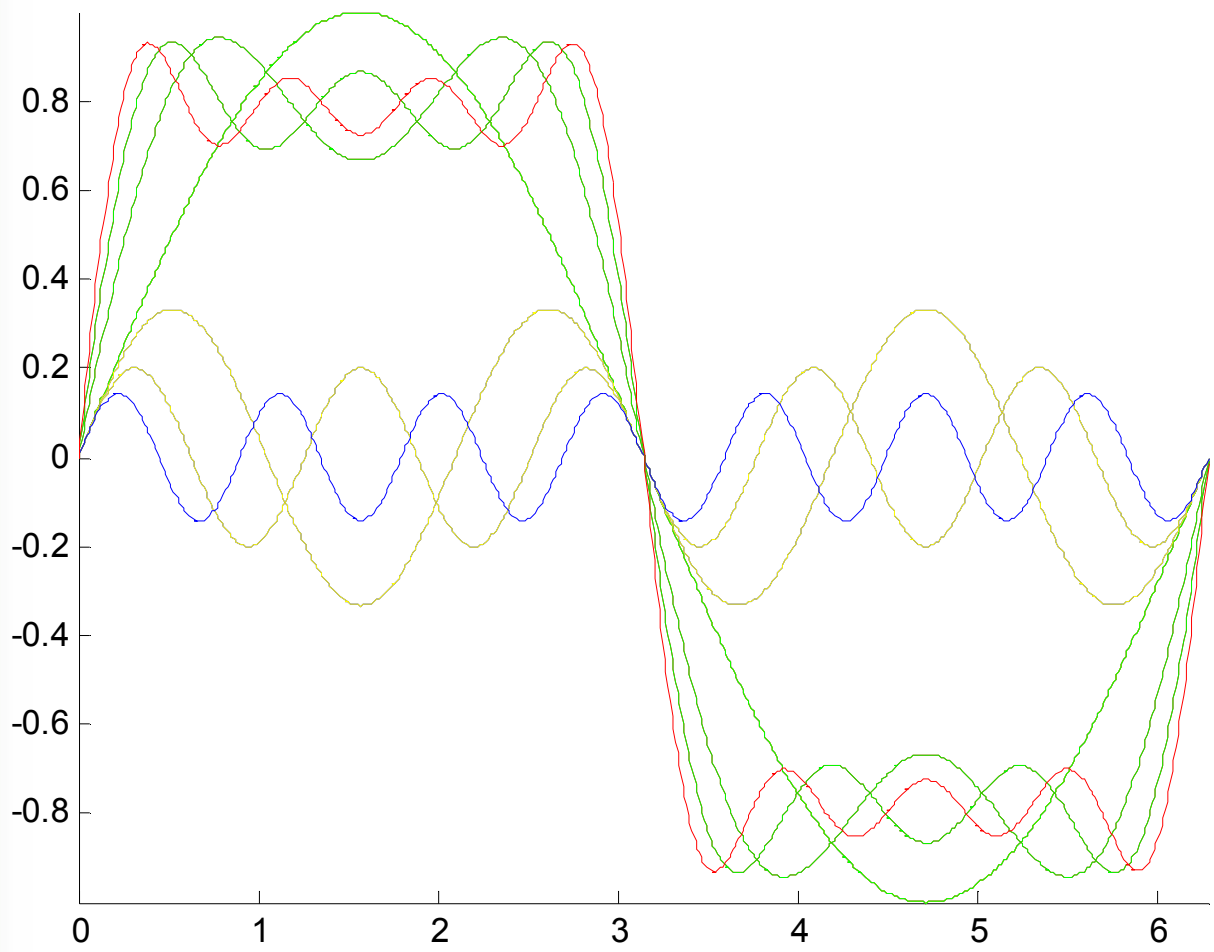


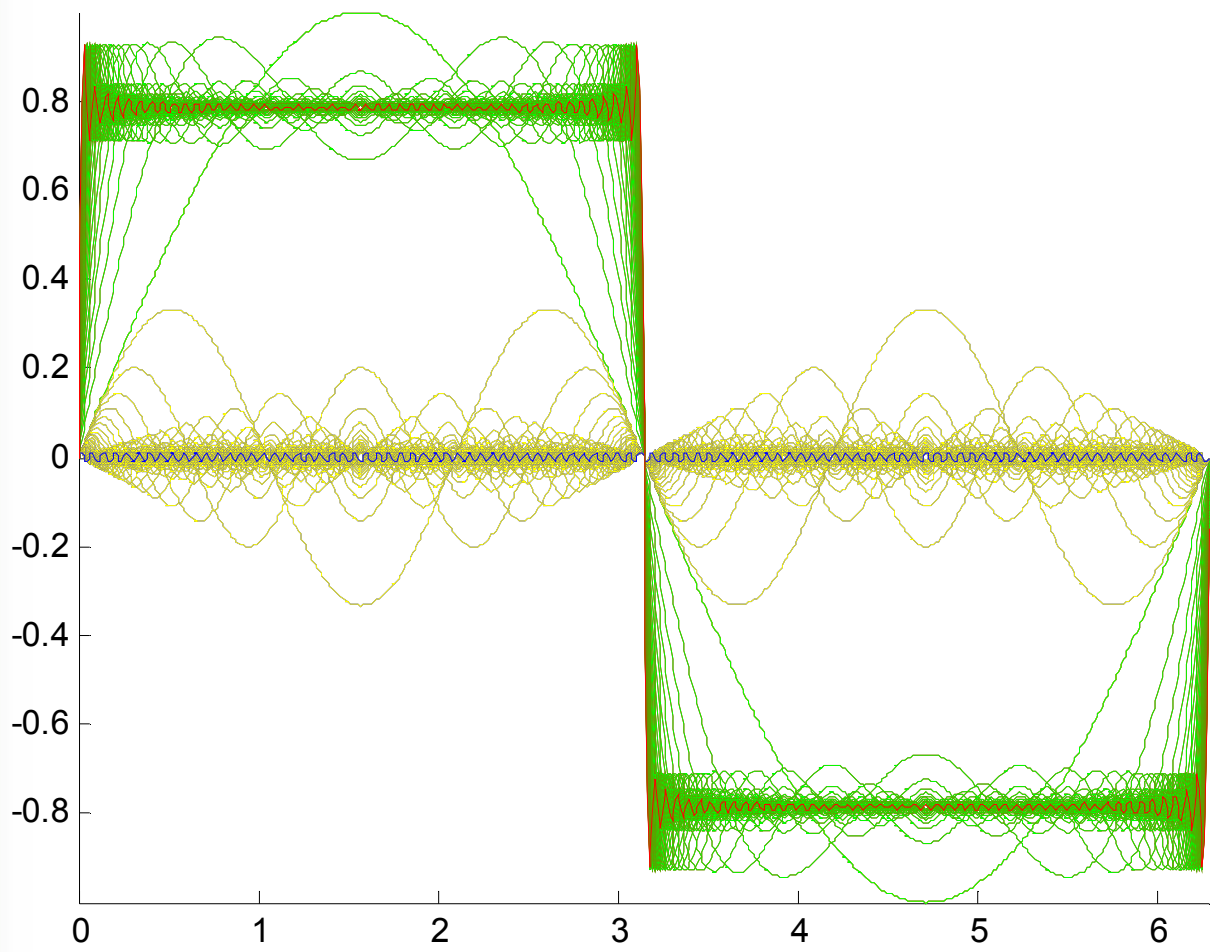












ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

FOURIEROVY ŘADY

Trigonometrická řada

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- uvedený vztah můžeme použít pouze, jestliže řada na pravé straně konverguje.
- konverguje-li řada, potom je její součet periodickou funkcí proměnné x s periodou 2π .

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

FOURIEROVY ŘADY

- ☑ každou periodickou funkci $f(x) = f(x+kX)$, která splňuje tzv. **Dirichletovy podmínky** lze vyjádřit uvedenou trigonometrickou řadou, kde se koeficienty (**amplitudy**) a_n , b_n vypočítají ze vztahů

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

FOURIEROVY ŘADY

- ☑ každou periodickou funkci $f(x) = f(x+kX)$, která splňuje tzv. **Dirichletovy podmínky** lze vyjádřit uvedenou trigonometrickou řadou, kde se koeficienty (**amplitudy**) a_n, b_n vypočítají ze vztahů

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**co tyhle vztahy znamenají?
jak je interpretovat?**

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

FOURIEROVY ŘADY

Dirichletovy podmínky

~ Funkce musí být absolutně integrovatelná přes jednu periodu X tj.

$$\int_x^{x+X} |f(\xi)| d\xi < \infty ;$$

~ Funkce musí mít na intervalu $(x; x + X)$ konečný počet nespojitostí a konečný počet maxim i minim.

- Dirichletovy podmínky jsou postačující, nikoliv nutné.
- Všechny fyzikálně realizovatelné funkce splňují D.p.

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

FOURIEROVY ŘADY

- ✓ uvedená trigonometrická řada s koeficienty určenými z výše uvedených vztahů se nazývá (**trigonometrická**) **Fourierova řada** (příslušná k funkci f).
- ✓ Fourierova řada se zjednoduší, je-li funkce f lichá nebo sudá.

- ✓ Pro lichou funkci platí

$$a_n = 0 \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

FOURIEROVY ŘADY

- Pro sudou funkci platí

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots$$

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

FOURIEROVY ŘADY

Příklad 1: Rozviňme funkci $f(x) = x$ ve Fourierovu řadu.

Funkce $f(x)$ je lichá, a proto $a_n = 0$. Koeficienty b_n spočítáme ze vztahu

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$$

Integrací per partes dostaneme

$$\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}$$

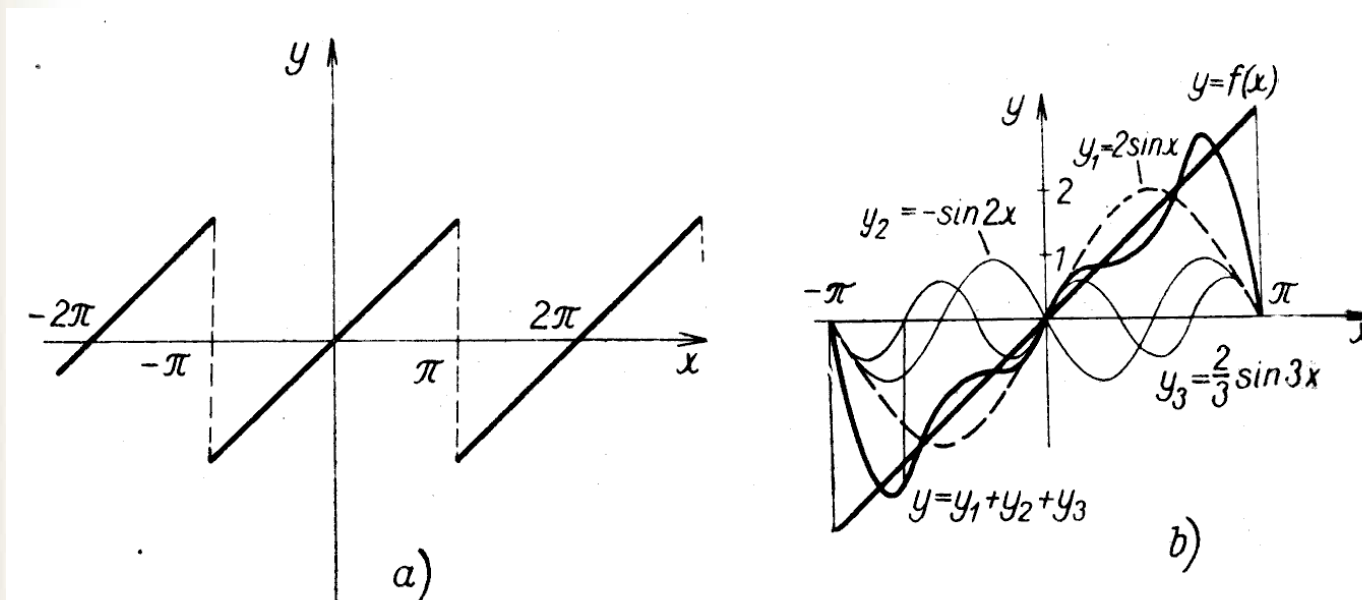
ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

FOURIEROVY ŘADY

Koeficient b_n je tedy $b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$

Výsledná Fourierova řada má tvar

$$f(x) = x = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right)$$

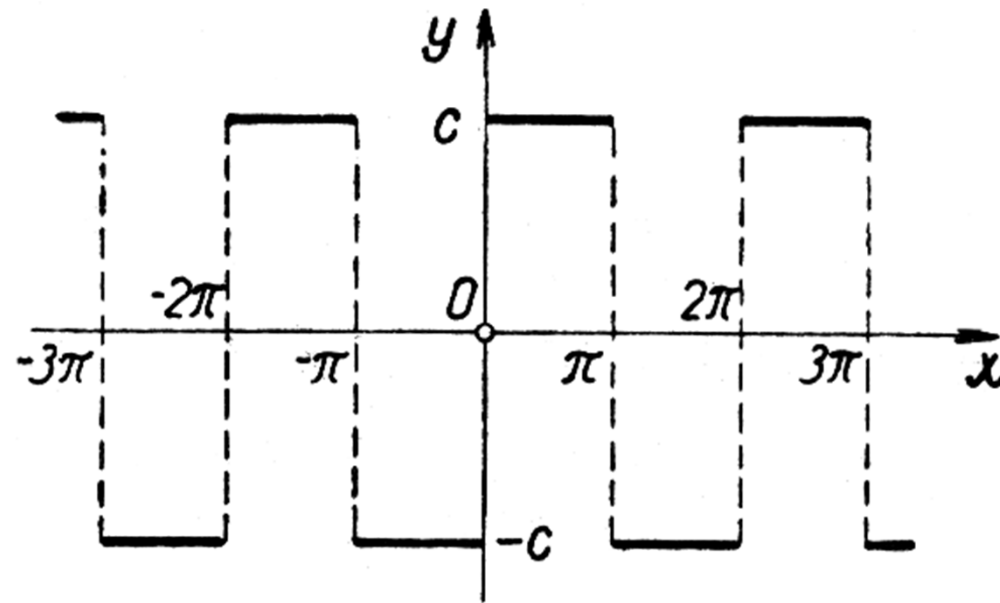


ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

FOURIEROVY ŘADY

Příklad 2: Rozviňme ve Fourierovu řadu funkci

$$f(x) = \begin{cases} -c & \text{pro } -\pi < x < 0 \\ c & \text{pro } 0 < x < \pi \end{cases}$$



ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

FOURIEROVY ŘADY

- Funkce $f(x)$ je lichá, a proto $a_n = 0$. Koeficienty b_n spočítáme takto

$$b_n = -\frac{c}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \sin nx \, dx - \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right) = -\frac{2c}{n\pi} [\cos nx]_0^{\pi}$$

- Pro n sudé je $b_n = 0$, pro n liché je

$$b_n = \frac{4c}{n\pi}$$

- Výsledná Fourierova řada má tvar

$$f(x) = \frac{4c}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

FOURIEROVY ŘADY

- ☑ Zobecnění pro funkce s periodou T .

Fourierova řada (příslušná k funkci f) má tvar

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t \, dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

HARMONICKÁ FOURIEROVA ŘADA

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(n\Omega t + \varphi_n))$$

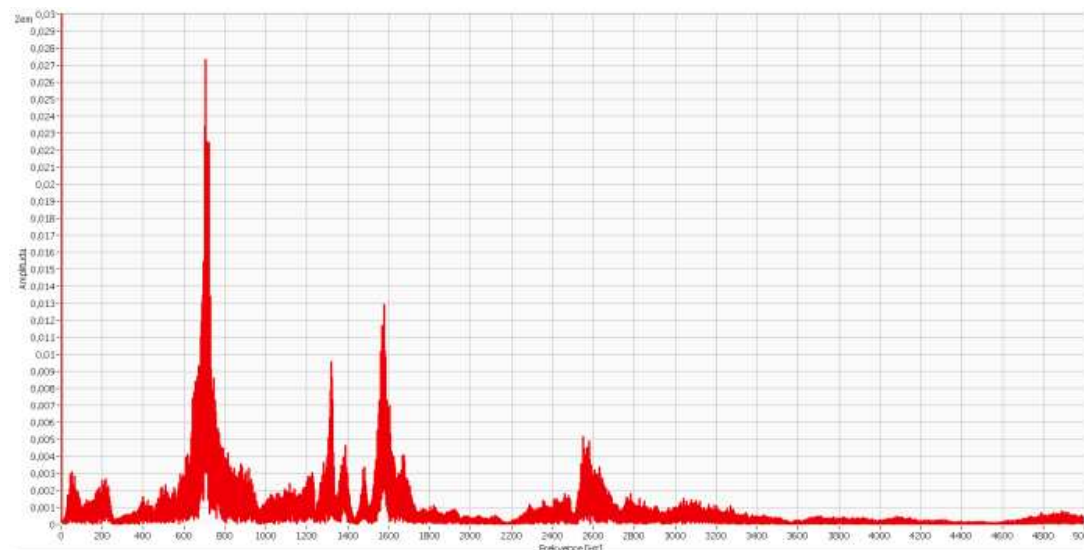
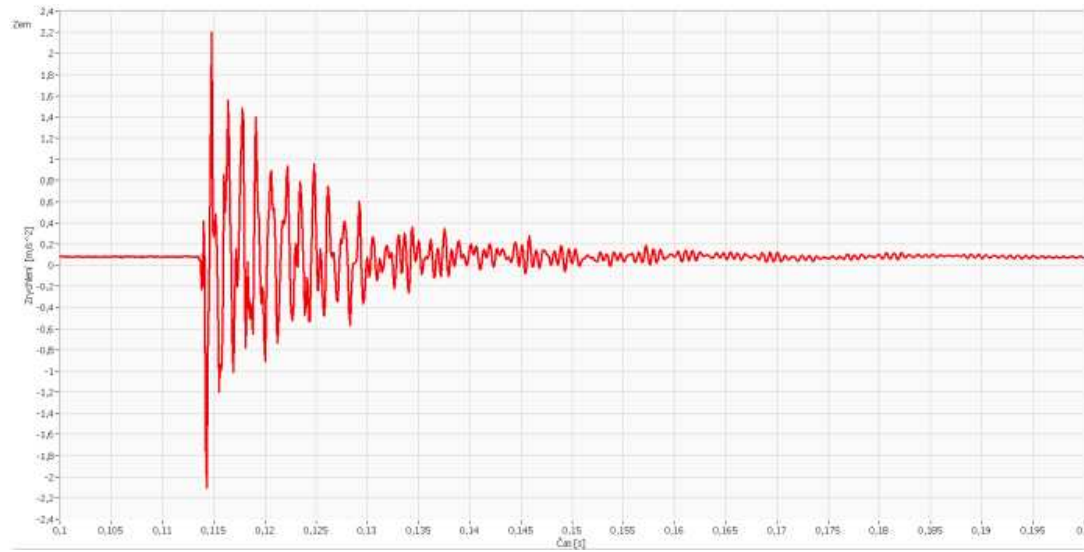
kde výraz

$$c_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

nazýváme n-tou harmonickou složkou funkce $s(t)$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$$

OSCILACE



FOURIEROVA ŘADA V KOMPLEXNÍM TVARU

- ☑ každou periodickou funkci $f(t+kT)=f(t)$, (která vyhovuje Dirichletovým podmínkám), můžeme rozložit ve Fourierovu řadu

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{c}_n e^{jn\Omega t} \quad \Omega = 2\pi/T$$

kde c_n jsou komplexní **Fourierovy koeficienty**

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt$$

Ω – úhlový kmitočet základní harmonické složky (**základní harmonická**);

FOURIEROVA ŘADA V KOMPLEXNÍM TVARU

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt$$

pro $n = 0$ je

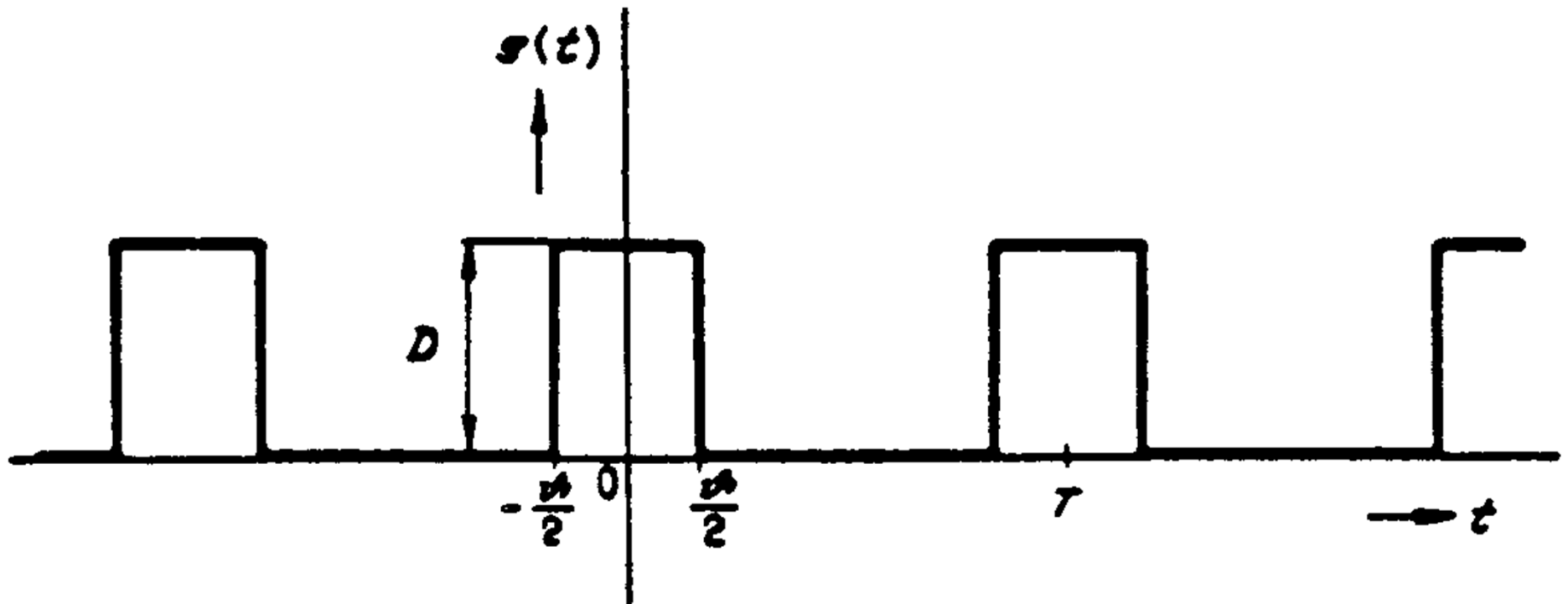
$$\dot{c}_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt \quad ,$$

což je střední hodnota funkce $f(t)$.

Pro reálné funkce $f(t)$ je $\dot{c}_{-n} = \dot{c}_n^*$.

PŘÍKLADY

SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU



PŘÍKLADY

SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU

Pomocný výpočet:

$$I(n\omega) = \int_{-a}^a e^{\pm jn\omega t} dt$$

Pro $n = 0$ je

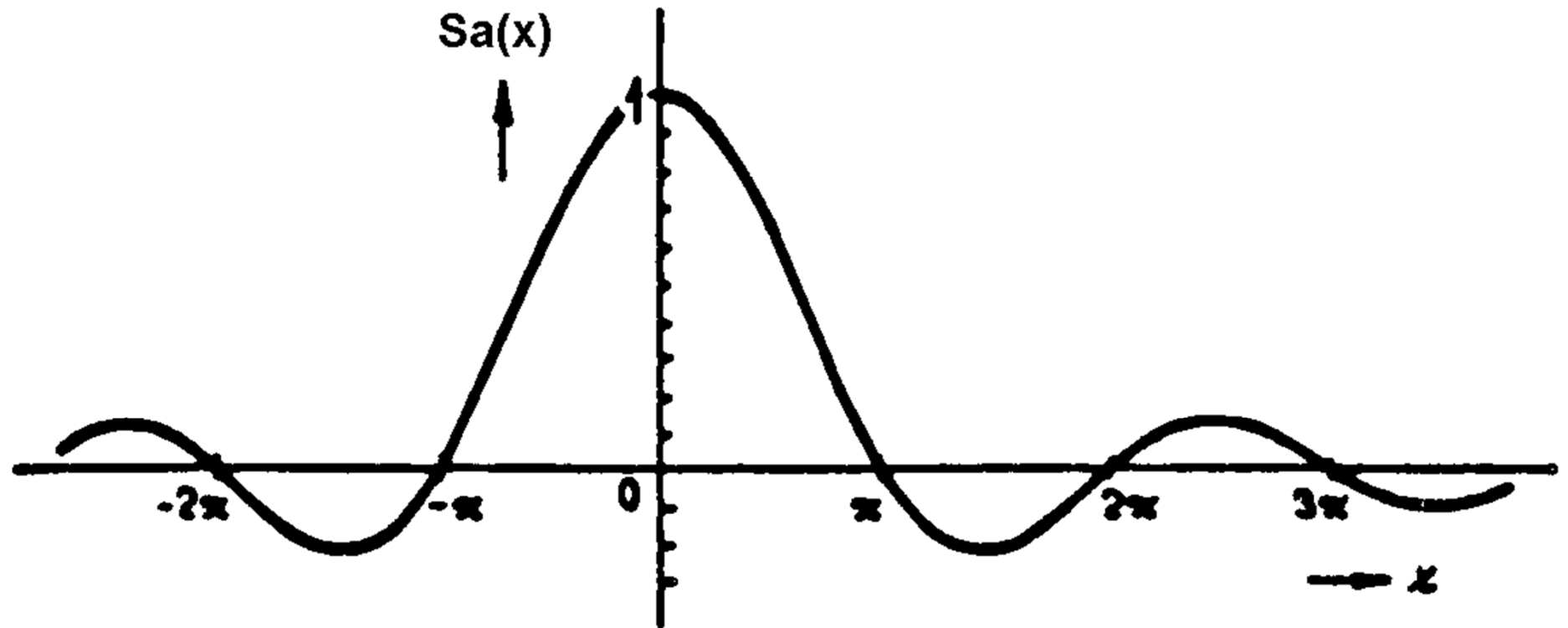
$$I(0) = 2a$$

Pro $n \neq 0$

$$I(n\omega) = \left[\frac{e^{\pm jn\omega t}}{\pm jn\omega} \right]_{-a}^a = \frac{e^{jn\omega a} - e^{-jn\omega a}}{jn\omega} = \frac{2a}{n\omega a} \cdot \frac{e^{jn\omega a} - e^{-jn\omega a}}{2j} = 2a \cdot \frac{\sin n\omega a}{n\omega a}$$

PŘÍKLADY

SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU



PŘÍKLADY

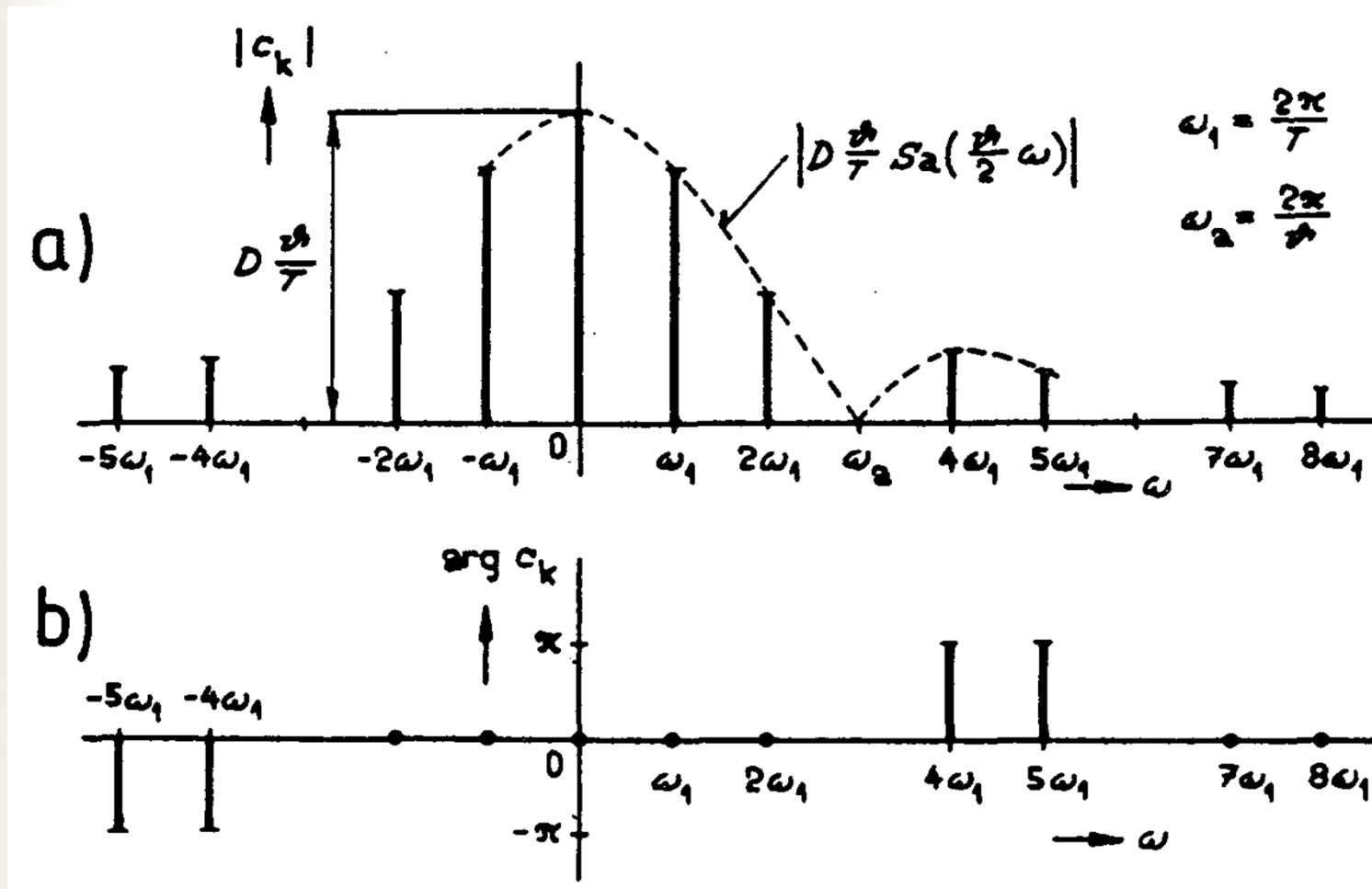
SPEKTRUM OBDELNÍKOVÉHO PULSU

Šířka impulsů – ϑ , výška – D , perioda T

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2} D \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{D}{T} \int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2} e^{-jn\omega_1 t} dt = \\ &= \dots = \frac{D}{T} \cdot 2 \cdot \frac{\vartheta}{2} \cdot \text{Sa} \left(\frac{\vartheta}{2} n\omega_1 \right) = D \cdot \frac{\vartheta}{T} \cdot \text{Sa} \left(\frac{\vartheta}{2} n\omega_1 \right)\end{aligned}$$

PŘÍKLADY

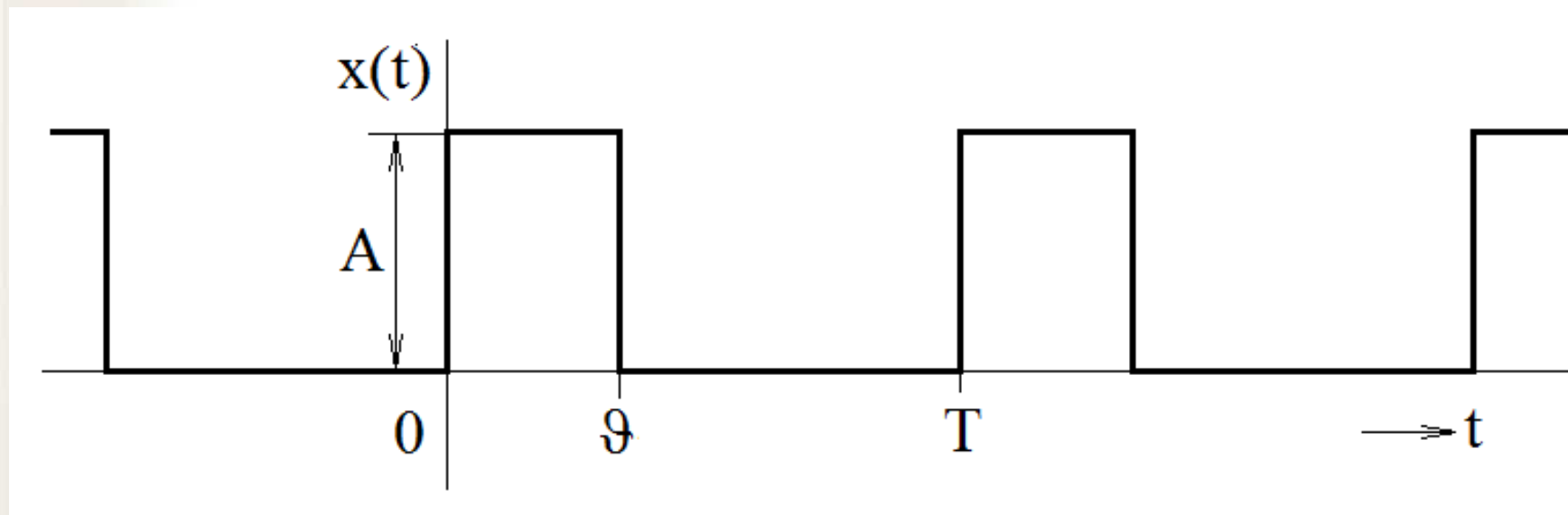
SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU



PŘÍKLADY

SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU

Co se stane, když posuneme obdélníkový pulz z předešlého příkladu tak, aby nástupná hrana obdélníka byla v počátku časové osy?



PŘÍKLADY

SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU

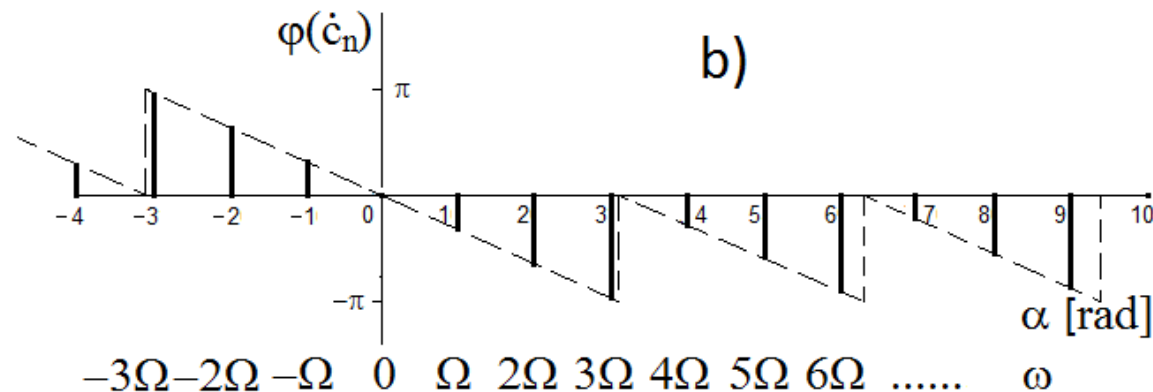
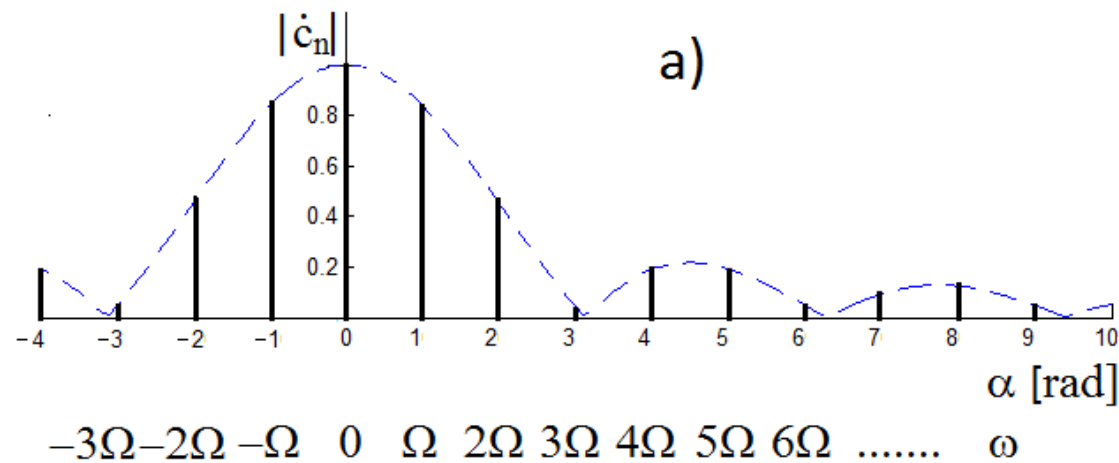
Co se stane, když posuneme obdélníkový pulz z předešlého příkladu tak, aby nástupná hrana obdélníka byla v počátku časové osy?

$$\begin{aligned} \dot{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{\vartheta} A \cdot e^{-jn\Omega t} dt = \frac{A}{T} \int_0^{\vartheta} e^{-jn\Omega t} dt = \frac{A}{T} \left[-\frac{1}{jn\Omega} e^{-jn\Omega t} \right]_0^{\vartheta} = \\ &= \frac{A}{T} \left(-\frac{1}{jn\Omega} \cdot e^{-jn\Omega\vartheta} + \frac{1}{jn\Omega} \right) = \frac{A}{T} \cdot \frac{1}{jn\Omega} \cdot (1 - e^{-jn\Omega\vartheta}) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{2}{jn\Omega} \cdot \frac{e^{jn\Omega\vartheta/2} \cdot e^{-jn\Omega\vartheta/2} - e^{-jn\Omega\vartheta/2} \cdot e^{-jn\Omega\vartheta/2}}{2} = \frac{A}{T} \cdot \frac{2}{n\Omega} \cdot \frac{e^{jn\Omega\vartheta/2} - e^{-jn\Omega\vartheta/2}}{2j} \cdot e^{-jn\Omega\vartheta/2} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{2\vartheta}{n\Omega\vartheta} \cdot \sin(n\Omega\vartheta/2) \cdot e^{-jn\Omega\vartheta/2} = \frac{A\vartheta}{T} \cdot \frac{\sin(n\Omega\vartheta/2)}{n\Omega\vartheta/2} \cdot e^{-jn\Omega\vartheta/2} = A \cdot \frac{\vartheta}{T} \cdot \text{Sa} \left(n\Omega \frac{\vartheta}{2} \right) \cdot e^{-jn\Omega \frac{\vartheta}{2}}. \end{aligned}$$

PŘÍKLADY

SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU

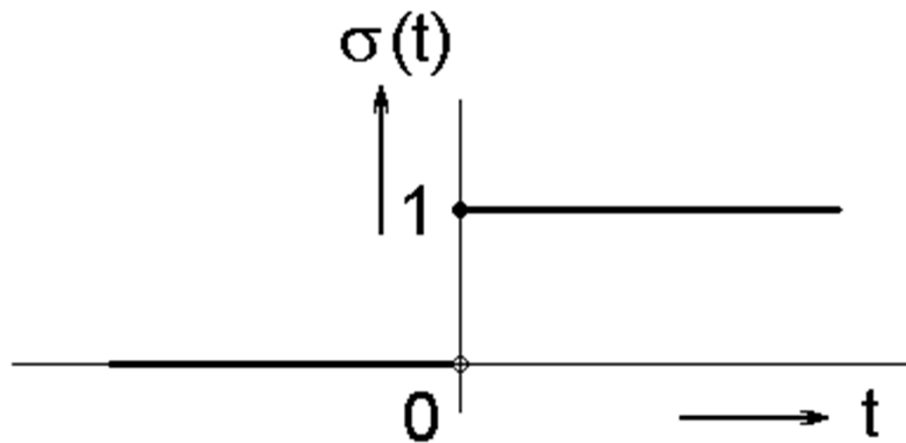
Co se stane, když posuneme obdélníkový pulz z předešlého příkladu tak, aby nástupná hrana obdélníka byla v počátku časové osy?



JEDNORÁZOVÉ SIGNÁLY

- ☑ jednotkový skok (Heavisidova funkce)

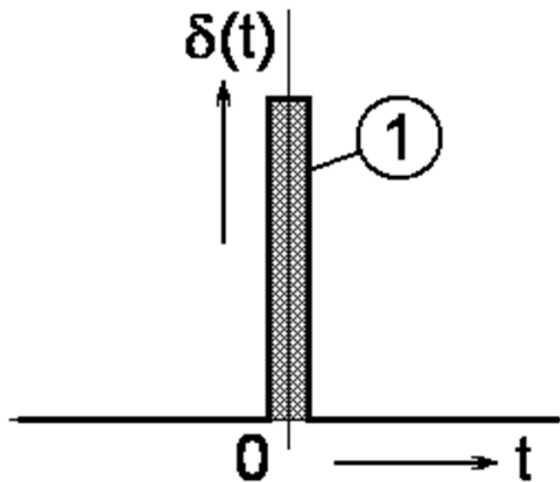
$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$



JEDNORÁZOVÉ SIGNÁLY

- ✓ jednotkový impuls (Diracův impuls) - $\delta(t)$
splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta(t - \tau) dt = s(\tau)$$

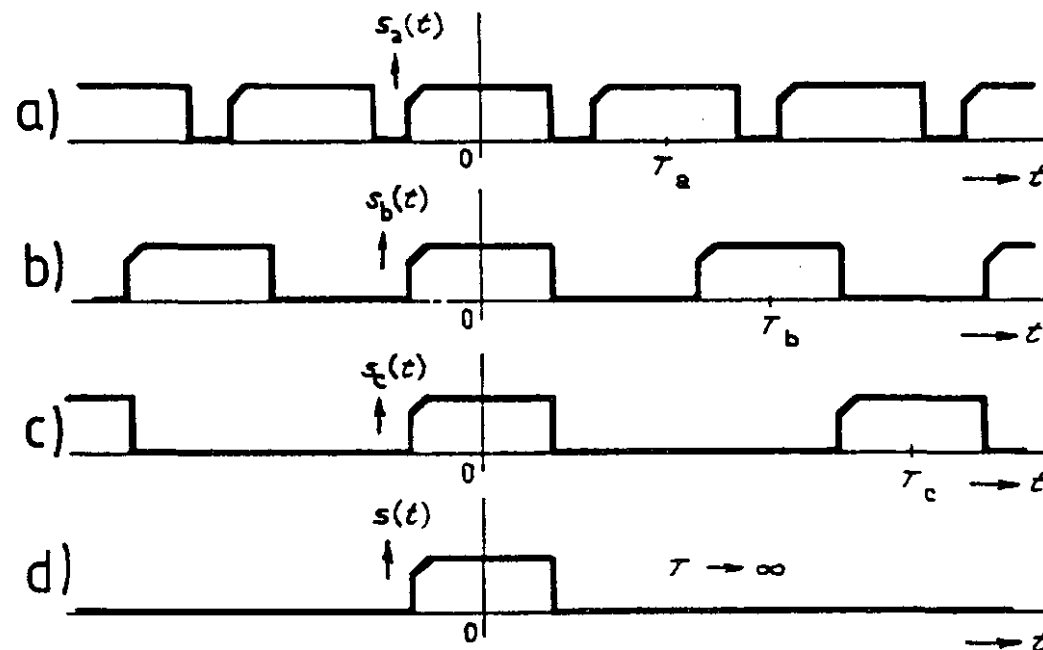


zjednodušeně:

jednotkový impuls $\delta(t)$ je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impuls, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky \Rightarrow **mohutnost** je jednotková

FOURIEROVA TRANSFORMACE

- ☑ zavádí spektrální popis jednorázových (aperiodických) veličin – můžeme je získat z Fourierovy řady limitním prodloužením periody signálu $T \rightarrow \infty$



FOURIEROVA TRANSFORMACE

- ☑ kmitočet základní harmonické složky

$$\Omega = 2\pi/T$$

když $T \rightarrow \infty$, pak $\Omega \rightarrow d\omega \rightarrow 0$

Graficky to představuje zhušťování spektrálních čar s prodlužující se periodou až v limitním případě je vzdálenost mezi spektrálními čarami nulová. Pro aperiodický funkci budou spektrální čáry na sebe navazovat - $n\Omega \rightarrow \omega$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\Omega t}$$

Suma ve výše uvedeném vztahu přechází v integrál s mezemi od $-\infty$ do ∞ .

FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt$$

pro $T \rightarrow \infty$ je $T = 2\pi/d\omega$, meze integrálu budou pro nekonečně trvající veličinu od $-\infty$ do ∞ . Pro $T \rightarrow \infty$ budou rovněž amplitudy spojitého spektra jednorázového impulsu nekonečně malé. Dosadíme za c_n do vztahu na předchozím obrázku

FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right) \cdot e^{j\omega t}$$

Označme

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

**Fourierova
transformace**

Funkci $S(\omega)$ nazveme **spektrální funkcí dané veličiny**. Ta už nevyjadřuje skutečné zastoupení jednotlivých harmonických složek, nýbrž jen jejich poměrné zastoupení.

Fourierova transformace převádí funkci $s(t)$ z časové domény na funkci $S(\omega)$ v kmitočtové oblasti.

FOURIEROVA TRANSFORMACE

Pro časovou funkci můžeme psát vztah

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

zpětná Fourierova transformace

FOURIEROVA TRANSFORMACE

VLASTNOSTI

Princip superpozice (! podmínka linearity !)

$$s_1(t) + s_2(t) \sim S_1(\omega) + S_2(\omega)$$

$$a \cdot s(t) \sim a \cdot S(\omega)$$

Lineární kombinaci funkcí odpovídá lineární kombinace jejich spekter

Změna znaménka

$$s(-t) \sim S^*(\omega)$$

Změna měřítka

$$s(t/a) \sim a \cdot S(a\omega), \text{ kde } a > 0$$

FOURIEROVA TRANSFORMACE

VLASTNOSTI

Translace funkce

$$s(t-\tau) \sim S(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau}$$

Transpozice spektra

$$S(\omega-\Omega) \sim s(t) \cdot e^{j\Omega t}$$

Konvoluce funkcí

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^t s_1(x) \cdot s_2(t-x) \cdot dx \approx S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$$

PŘÍKLADY

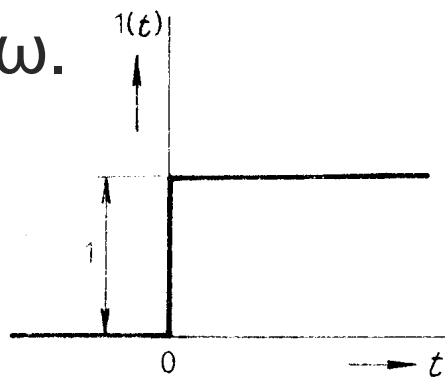
SPEKTRUM JEDNOTKOVÉHO SKOKU

Jednotkový skok $\sigma(t)$ nevyhovuje podmínce absolutní integrovatelnosti, nemá Fourierův integrál.

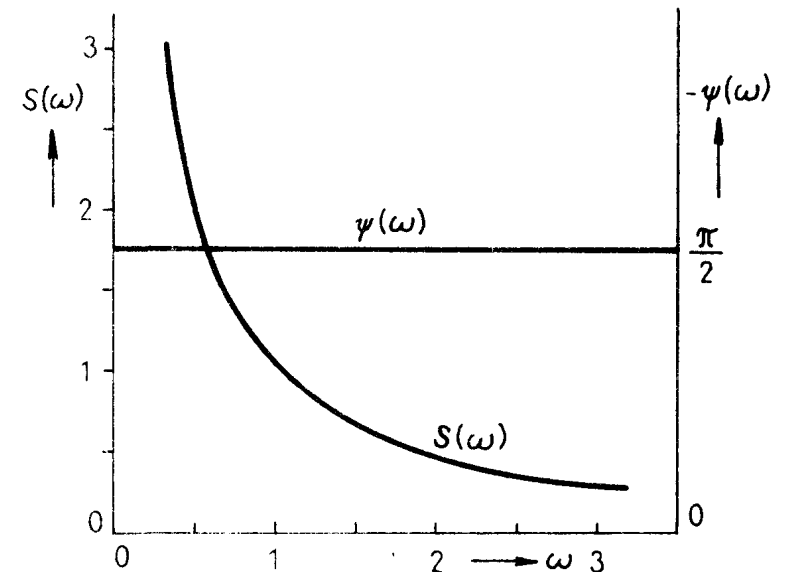
Pomůžeme si pomocí funkce $A \cdot e^{-\beta t}$.

Pro $A=1$ a $\beta=0$ je tato funkce ekvivalentní jednotkovému skoku.

Platí tedy, že $S(\omega) = 1/j\omega$.



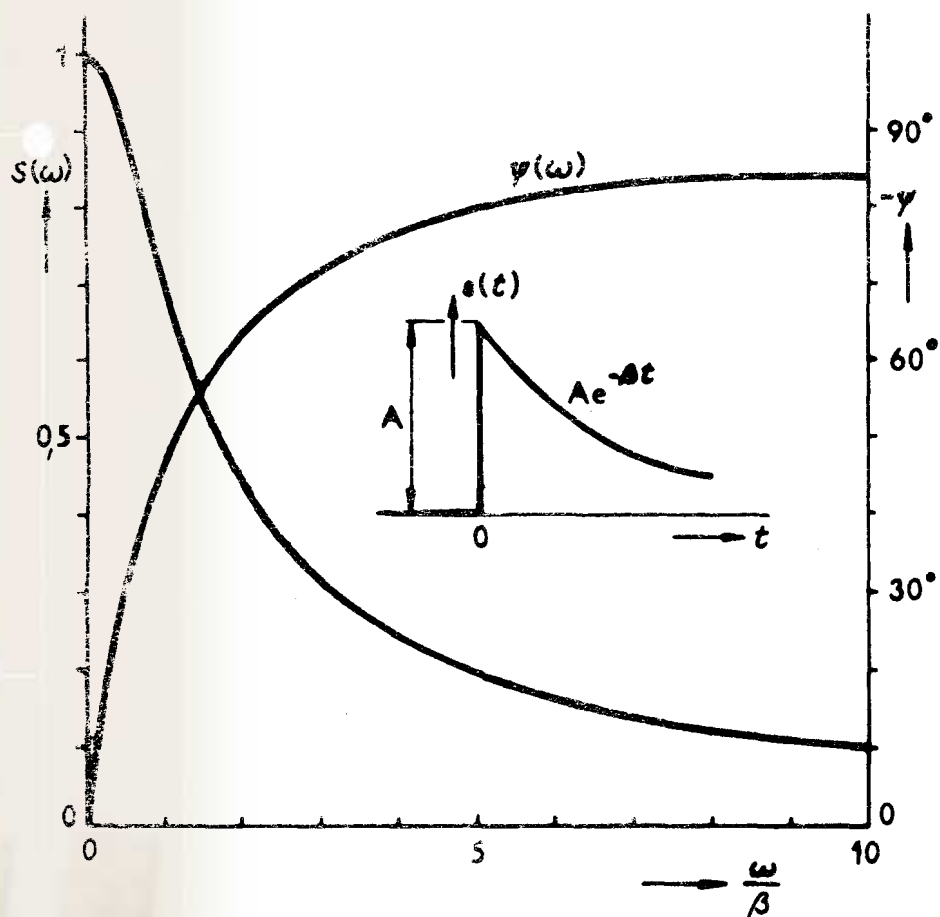
a)



b)

PŘÍKLADY

SPEKTRUM JEDNOTKOVÉHO SKOKU



$$s(t) = A \cdot e^{-\beta t} \quad \text{pro } t \geq 0$$

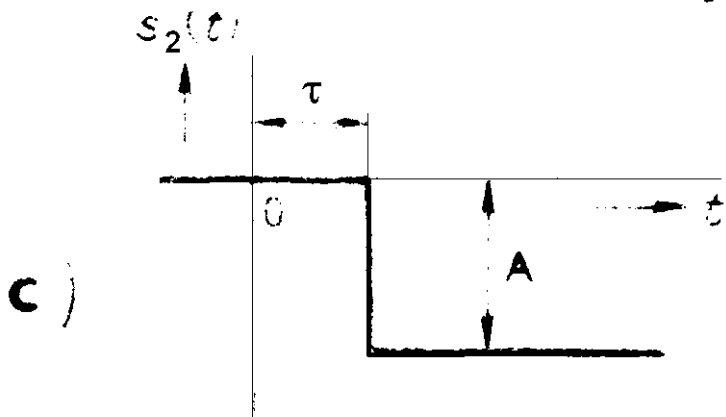
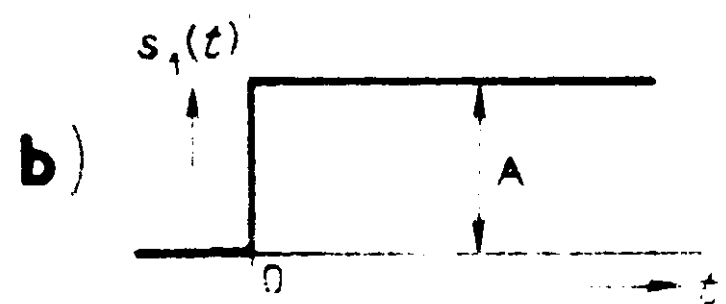
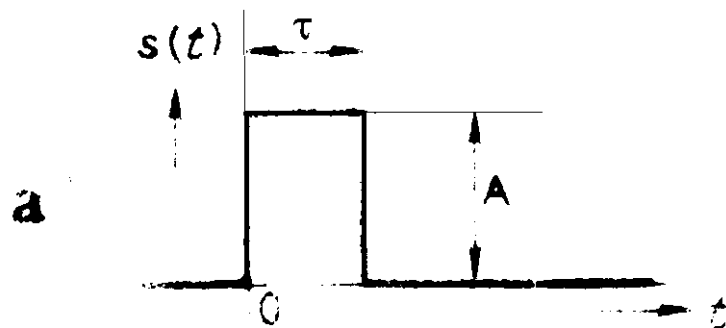
$$s(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0$$

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{A}{\beta + j\omega}$$

PŘÍKLADY

SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO IMPULSU



$$s(t) = A \cdot \sigma(t) - A \cdot \sigma(t-\tau)$$

$$S(\omega) = A \cdot \left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega} \cdot e^{-j\omega\tau} \right) =$$

$$= A \cdot \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega} \cdot e^{-j\omega\tau/2} =$$

$$= \frac{2A}{\omega} \cdot \sin \frac{\omega\tau}{2} \cdot e^{-j\omega\tau/2} =$$

$$= A \cdot \tau \cdot \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \cdot e^{-j\omega\tau/2}$$

PŘÍKLADY

SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO IMPULSU

$$|S(\omega)| = A \cdot \tau \cdot \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$$

Průchody nulou pro

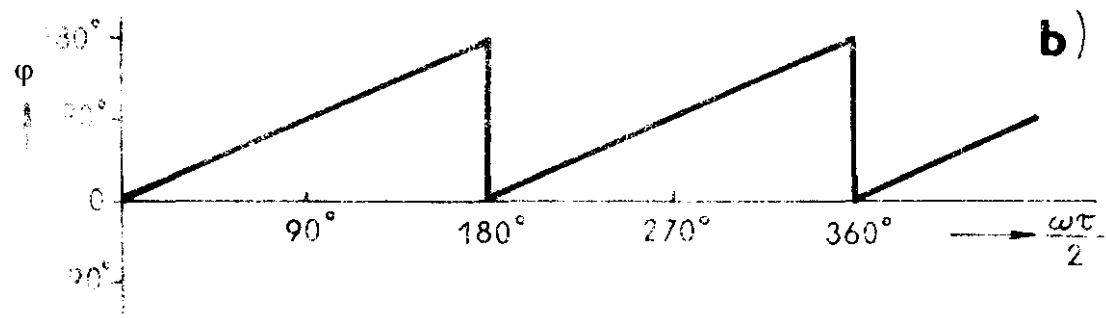
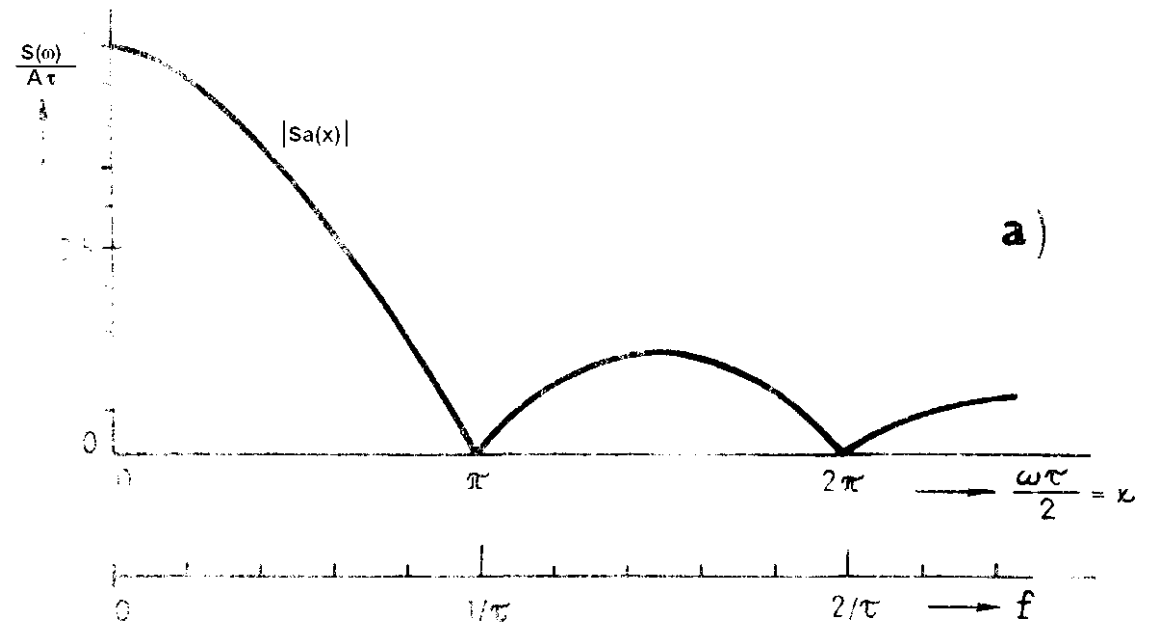
$$\omega\tau/2 = k\pi, \quad k=1,2,\dots,$$

resp.

$$2\pi f\tau/2 = k\pi$$

a tedy

$$f = k/\tau$$



! SHRNU TÍ !



! URČITĚ SI ZAPAMATOVAT !

- ☑ **spojitá periodická funkce** má **diskrétní** frekvenční spektrum – pro rozklad jsme použili Fourierovu řadu;
- ☑ **spojitá jednorázová funkce** má **spojité** frekvenční spektrum – pro rozklad jsme použili Fourierovu transformaci.

! A VĚDĚT **PROČ** !