ČASOVÉ ŘADY

(SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY)

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

IX.
SYSTÉMY
ZÁKLADNÍ POJMY

SYSTÉM - DEFINICE

SYSTÉM (řec.)

⇓

složené, seskupené (v celek)

- ☑ uzavřený, jednotně uspořádaný celek;
- ☑ soustava věcí, myšlenek, apod. uspořádaná podle určitého hlediska, určitou formou a metodou;
- ☑ záměrný, promyšlený, určitým způsobem uspořádaný postup, organizace, děj nebo vývoj;

SYSTÉM - DEFINICE

Ludwig von Bertalanffy
(1901-1972)

[Systém se skládá] z dynamicky uspořádaných prvků a vzájemně se ovlivňujících procesů. [...] Základním úkolem biologie je odhalení zákonitostí biologických systémů.

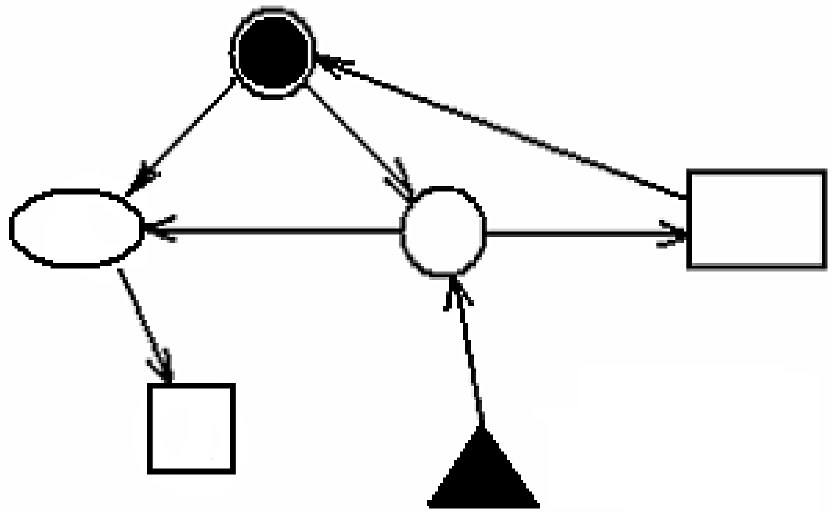
Kritische Theorie der Formbildung, Berlin 1928
General System Theory. Foundations, Development, Applications, NY1968

SYSTÉM - DEFINICE

- ☑ **Systém je komplex vzájemně na sebe působících elementů.** (L.von Bertalanffy)
- ☑ **Systém je soubor prvků a vazeb mezi nimi.** (R.L.Ackoff)
- ☑ **Systém je uspořádání určitých komponent, vzájemně propojených v celek** (G.J.Klir)

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

struktura – je dána množinou všech prvků a vazeb (vztahů, relací) mezi prvky, resp. dalšími různými podsystémy daného systému;



ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

chování – je projevem dynamiky systému Dynamika je schopnost vyvolat změnu v systému, zejména jeho ***stavu***. Dynamika je vlastností prvků systému, vazby jsou jejími iniciátory (***vstupy***), resp. nositeli důsledků (***výstupy***).

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

stavem sytému rozumíme souhrn hodnot jeho vlastností, které lze rozpoznat v daném časovém okamžiku za přesně definovaných podmínek. Stavu systému lze v libovolném časovém okamžiku t (z nějakého daného či zvoleného časového intervalu) přiřadit vektor hodnot $\mathbf{s}(t) \in S$, který nazýváme *stavovým vektorem*, složky x_i vektoru **s** nazýváme *stavovými veličinami* (proměnnými) a prostor *S* všech možných hodnot stavových veličin nazýváme *stavovým prostorem*. Podle vývoje hodnot stavu systému lze systémy dělit na *statické* (nevykazují pohyb) a *dynamické*.

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

stabilita je schopnost systému udržovat si při změně vstupů a stavů svých prvků nezměněnou vnější formu (chování) i navzdory procesům probíhajícím uvnitř systému. Stabilitu chápeme jako vlastnost zaručující, že i po určité malé změně počátečních podmínek nastane v systému při nezměněných vstupech pohyb jen málo odlišný od původního. Pojem stability se neomezuje pouze na návrat do původního stavu po poruše, která způsobí vychýlení. Často je návrat do původního stavu nemožný, protože se změnily podmínky, v nichž systém existuje – pak si systém může najít stav odchylný od výchozího stavu, který je rovněž stabilní – tzv. *ultrastabilní systém*.

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

okolí systému je tvořeno množinou prvků, které nejsou součástí daného systému, ale jsou s ním významně svázány. Systém a jeho okolí jsou jednak objektivní skutečností, ale jsou dány i subjektivně, v závislosti na osobě zkoumající systém a na účelu zkoumání.

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

Veličiny (vazby), které zprostředkovávají vliv okolí na systém jsou **vstupy systému** a vnější projevy (vazby) systému, které reprezentují jeho vliv na okolí, jsou **výstupy systému**. Prvek systému, který má vazbu s okolím (vstupní nebo výstupní nebo vstupní i výstupní) nazýváme **hraničním prvkem systému** a množinu všech hraničních prvků nazýváme **hranice systému**.

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

otevřený systém je takový, u něhož dochází k energetické a informační výměně s jeho okolím.

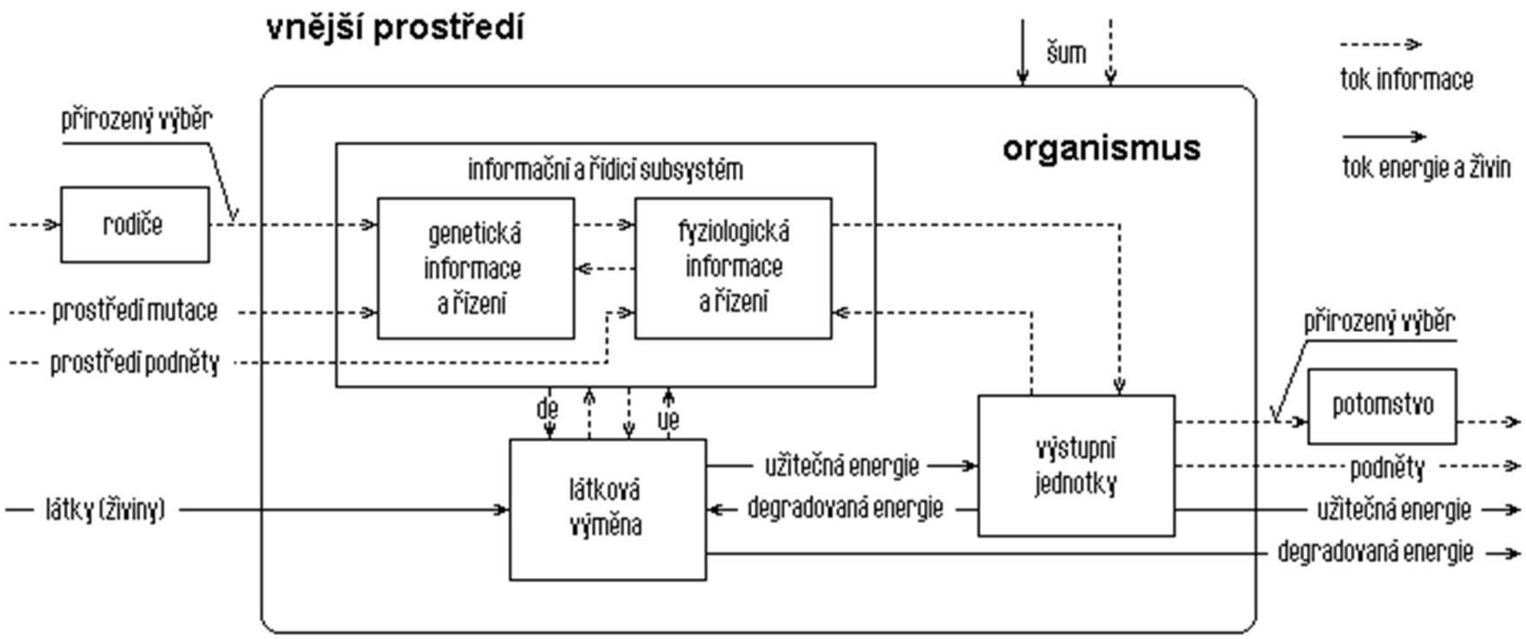
uzavřený (konzervativní) systém je naopak od svého okolí zcela izolován, nemá se svým okolím žádné vazby.

podmínka separability systému – systém je separabilní, jestliže jeho výstupy zpětně vlivem prostředí podstatně neovlivňují vstupy.

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

PŘÍKLADY

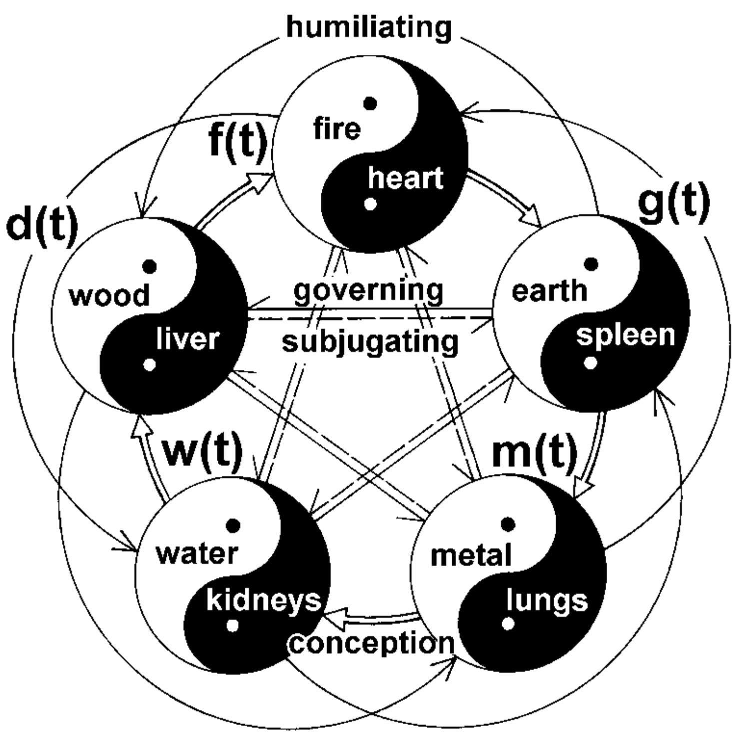
LIDSKÝ ORGANISMUS JAKO SYSTÉM



ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

PŘÍKLADY

SYSTÉM PĚTI PRVKŮ KLASICKÉ ČÍNSKÉ MEDICÍNY A FILOSOFIE

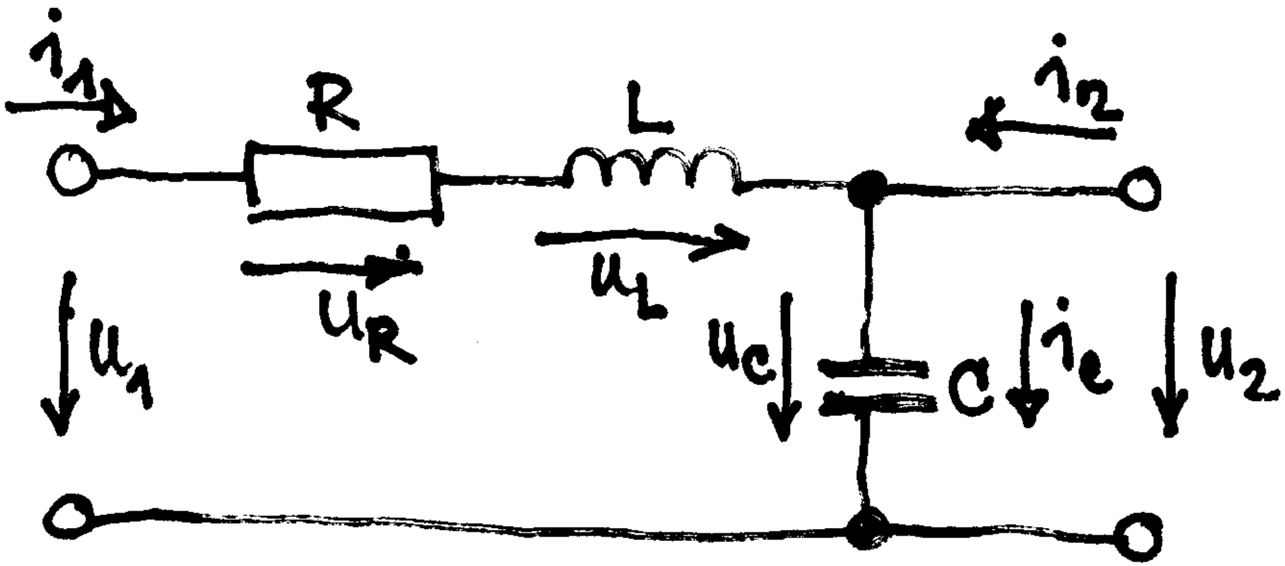


NEFORMÁLNÍ ABSTRAKTNÍ POPIS SYSTÉMU

- **prvky** – části, ze kterých se systém skládá
- **proměnné** – slouží k popisu stavu prvků a jejich vývoje v čase;
- **vazby** – pravidla, dle kterých se prvky navzájem ovlivňují (případně mění své parametry) a tak určují vývoj chování v čase;
- **parametry** – zpravidla neproměnné (konstantní) charakteristiky prvků a vazeb systému;
- **základní předpoklady** (počáteční podmínky) – vyplývají ze specifikace;

NEFORMÁLNÍ ABSTRAKTNÍ POPIS SYSTÉMU

PASIVNÍ RLC OBVOD JAKO ELEKTRICKÝ MODEL CÉVNÍHO SEGMENTU



PROČ ABSTRAKTNÍ SYSTÉMY?

- ☑ modely zkoumaných reálných (biologických) objektů (procesů) -;
- ☑ popis algoritmů pro zpracování dat (technické, resp. matematické systémy);

X.
SPOJITÉ SYSTÉMY

FORMY ABSTRAKTNÍHO POPISU SPOJITÝCH SYSTÉMŮ

VNĚJŠÍ A VNITŘNÍ POPIS

FORMÁLNÍ (MATEMATICKÝ) POPIS SYSTÉMU

Matematické prostředky se různí podle:

- ☑ typu časové základny (spojité, diskrétní, nezávislé na časovém měřítku);
- ☑ charakteru proměnných (kvantitativní - spojité, diskrétní, logické; kvalitativní);
- ☑ determinovanosti proměnných a parametrů (deterministické, nedeterministické - pravděpodobnostní, fuzzy,...);
- ☑ vztahu k okolí (autonomní, neautonomní);
- ☑ proměnnosti parametrů (lineární, nelineární, časově proměnné);
- ☑ vztahu k minulosti (bez paměti, s pamětí);

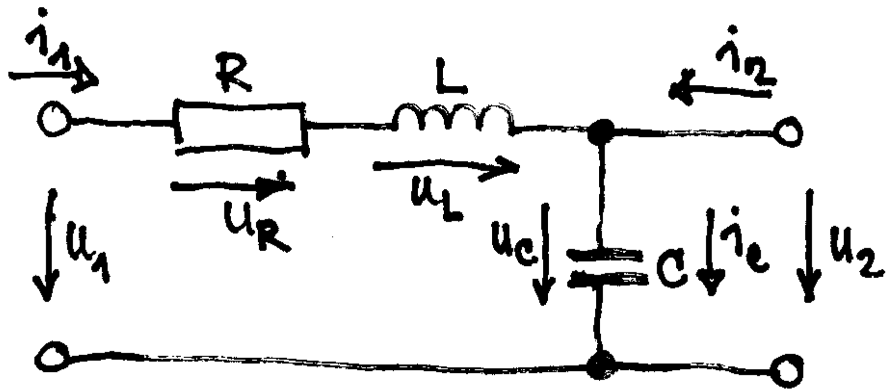
FORMÁLNÍ (MATEMATICKÝ) POPIS SYSTÉMU

Matematické prostředky se různí podle:

- ☑ typu časové základny (spojité, diskrétní, nezávislé na časovém měřítku);
- ☑ charakteru proměnných (kvantitativní - spojité, diskrétní, logické; kvalitativní);
- ☑ determinovanosti proměnných a parametrů (deterministické, nedeterministické - pravděpodobnostní, fuzzy,...);
- ☑ vztahu k okolí (autonomní, neautonomní);
- ☑ proměnnosti parametrů (lineární, nelineární, časově proměnné);
- ☑ vztahu k minulosti (bez paměti, s pamětí);

VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

předpokládejme konstantní parametry prvků R, L, C obvodu



$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C \, d\tau \quad \text{a} \quad i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L \, d\tau$$

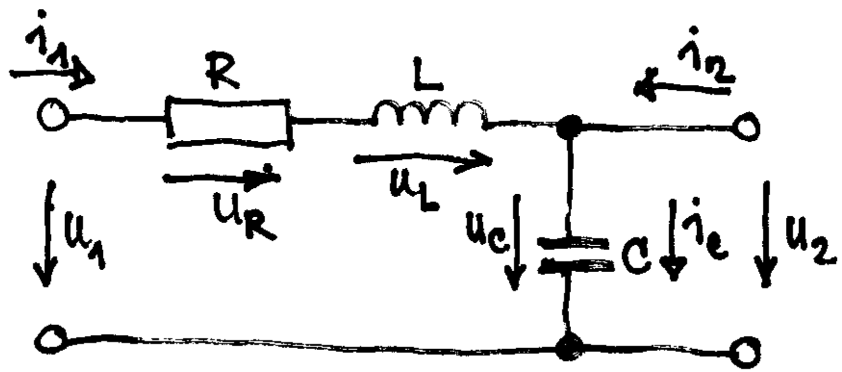
VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

$$i_1 = i_C = i_L = C.\frac{du_C}{dt} \quad \text{a} \quad u_L = L.\frac{di_L}{dt} = L.\frac{di_1}{dt}$$

$$\text{a tedy} \quad i_1' = \frac{1}{L}u_L$$

Pak lze psát

$$R.i_1 + L.i_1' + u_C = u_1$$



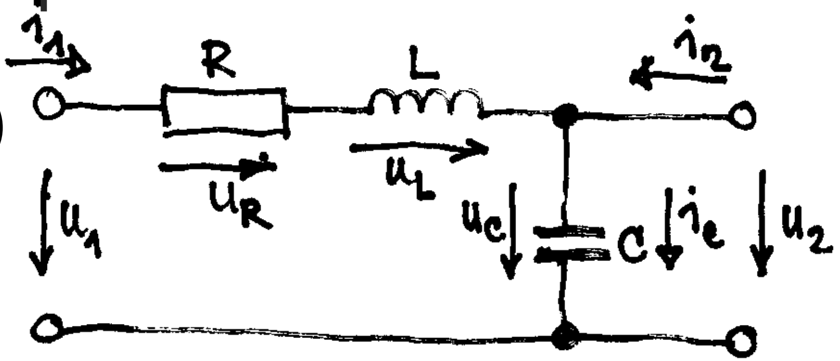
VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

Po záměně pořadí členů na levé straně a po dosazení za proud i_1 a jeho derivaci ze vztahu mezi proudem a napětím na kapacitě je

$$LC.u_C''(t) + RC.u_C'(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

a protože napětí na kapacitě je současně i výstupním napětím, tj. $u_C(t) = u_2(t)$ lze psát matematický vztah mezi výstupním u_2 (t) a vstupním u_1(t) napětím obvodu

$$LC.u_2''(t) + RC.u_2'(t) + u_2(t) = u_1(t)$$



Vztah mezi vstupem a výstupem – jedna z forem vnějšího popisu

VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

obecně, spojitý systém n-tého řádu popisuje diferenciální rovnice n-tého řádu

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_0 y = a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + a_0 x \;,$$

která je, za předpokladu že parametry a_n, a_{n-1}, …, a_0, b_m, b_{m-1}, …, b_0 jsou konstantní, lineární;

prakticky nelze realizovat takové systémy, jejichž výstupní veličina by byla přesně úměrná derivacím vstupní veličiny, proto musí platit $m \leq n$;

LINEARITA

Systém je lineární, platí-li pro něj **princip superpozice**

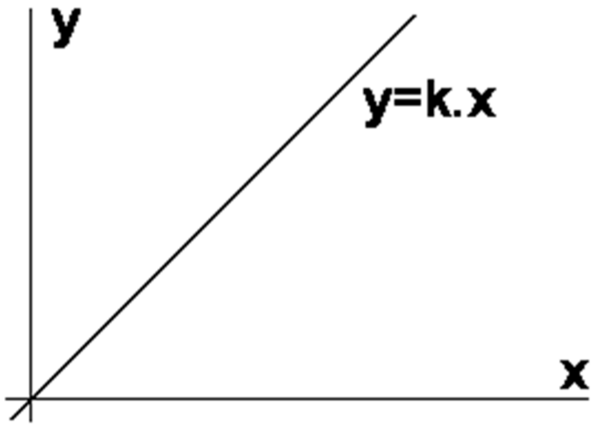
Je-li y=f(x) převodní funkce systému, pak pro lineární systém musí platit

$$1)\ f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2);$$

$$2)\ c.f(x) = f(c.x),\ c = \text{konst.}$$

LINEARITA

A to je jen tehdy, je-li
$y=k.x$, kde k = konst.



1) $k.x_1 + k.x_2 = k.(x_1 + x_2)$

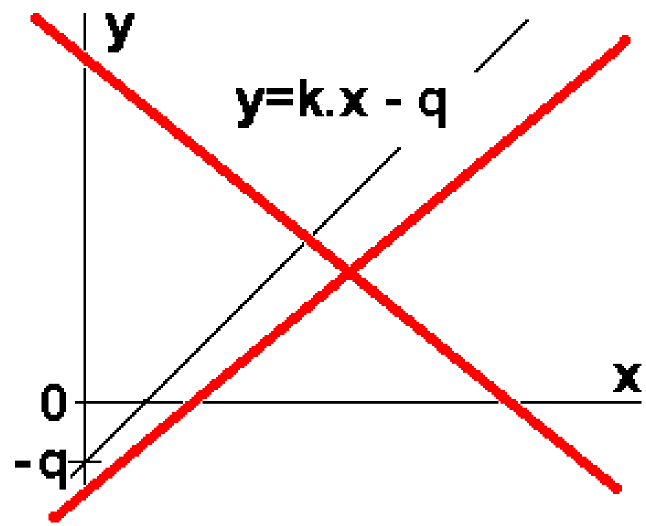
2) $c.k.x = k.c.x$

LINEARITA

A neplatí to ani, když

$y=k.x-q$, kde k,q = konst.,

protože



1) $(k.x_1-q)+ (k.x_2-q) \neq k.(x_1+x_2)-q$

2) $c.(k.x-q) \neq (k.c.x-q)$

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

DEFINIČNÍ VZTAH

$$F(p) = \int_0^\infty f(t).e^{-pt}dt$$

kde $p = \sigma + j\omega$.

DEFINIČNÍ VZTAH

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} f(t).e^{-pt}dt$$

kde p = σ+jω.

Pamatujeme si ještě definiční vztah Fourierovy transformace?

DEFINIČNÍ VZTAH

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} f(t).e^{-pt} dt$$

kde p = σ+jω.

Pamatujeme si ještě definiční vztah Fourierovy transformace?

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).e^{-j\omega t} dt$$

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

VLASTNOSTI

- spousta úžasných vlastností ekvivalentních vlastnostem Fourierovy transformace, navíc i něco co se neuvěřitelně hodí pro řešení diferenciálních rovnic (převádí diferenciální rovnice na mocninné algebraické)
- Laplacův obraz derivace:

$$f'(t) \sim p.F(p) - f(0)$$

$$f^{(n)}(t) \sim p^{n}.F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

PŘENOSOVÁ FUNKCE

$$LC.u_2''(t)+RC.u_2'(t)+u_2(t)=u_1(t)$$

Vyjádřeme nyní tuto rovnici pomocí Laplacových obrazů obou veličin. Za předpokladu nulových počátečních podmínek pro Laplacův obraz n-té derivace funkce y(t) platí

$$y^{(n)}(t)\approx p^nY(p)+0$$

Do dosazení dostáváme

$$LC.p^2U_2(p)+RC.pU_2(p)+U_2(p)=U_1(p)$$

$$(LC.p^2+RC.p+1).U_2(p)=U_1(p)$$

PŘENOSOVÁ FUNKCE

Pro poměr obrazů výstupní a vstupní veličiny můžeme psát

$$F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{LC.p^2 + RC.p + 1} = \frac{1}{LC} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}$$

Takto definovanou funkci za nulových počátečních podmínek (!!!!) nazýváme **obrazovou (operátorovou) přenosovou funkci** daného systému.

PŘENOSOVÁ FUNKCE

pro obecnou diferenciální rovnici n-tého řádu

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_0 y =$$
$$= a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + a_0 x\ ,$$

má přenosová funkce lineárního systému za předpokladu nulových počátečních podmínek tvar

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1}.p^{m-1} + a_{m-2}.p^{m-2} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1}.p^{n-1} + b_{n-2}.p^{n-2} + \dots + b_1 p + b_0}$$

PŘENOSOVÁ FUNKCE

polynom ve jmenovateli přenosové funkce

$$b_n p^n + b_{n-1}.p^{n-1} + b_{n-2}.p^{n-2} + \ldots + b_1 p + b_0$$

nazýváme charakteristickým polynomem systému a rovnici

$$b_n p^n + b_{n-1}.p^{n-1} + b_{n-2}.p^{n-2} + \ldots + b_1 p + b_0 = 0$$

nazýváme charakteristickou rovnicí systému

PŘENOSOVÁ FUNKCE

řešením charakteristické rovnice

$$b_n p^n + b_{n-1}.p^{n-1} + b_{n-2}.p^{n-2} + \ldots + b_1 p + b_0 = 0$$

resp.

$$p^n + b'_{n-1}.p^{n-1} + b'_{n-2}.p^{n-2} + \ldots + b'_1 p + b'_0 = 0$$

dostaneme n jejích kořenů p_i, i=1,…,n.

PŘENOSOVÁ FUNKCE

Podobně můžeme určit i kořeny z_j, j=1,…,m rovnice, která vznikne položením polynomu v čitateli přenosové funkce rovno nule, tj.

$$a_m p^m + a_{m-1}.p^{m-1} + a_{m-2}.p^{m-2} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

Kořeny p_i i z_j mohou být obecně reálné i komplexní; za předpokladu, že koeficienty b_i, resp. a_j jsou reálné, pak kořeny p_i i z_j, jsou-li komplexní, jsou komplexně sdružené.

PŘENOSOVÁ FUNKCE

Pomocí hodnot kořenů z_j a p_i můžeme psát přenosovou funkci ve tvaru

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = c_m . \frac{(p - z_1).(p - z_2).\ldots.(p - z_m)}{(p - p_1).(p - p_2).\ldots.(p - p_n)}$$

- Kořeny z_j nazýváme nulové body přenosové funkce a kořeny p_i póly přenosové funkce F(p)

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ proměnná p má obecně komplexní charakter a tedy nabývá tvaru $p = \sigma + j\omega$,

  kde σ je koeficient tlumení a $\omega = 2\pi f$ je kruhová frekvence
- ☑ předpokládejme, že koeficient tlumení

  $$\sigma = 0,$$

  pak po dosazení za p v operátorové přenosové funkci dostáváme

  $$F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = |F(j\omega)|.e^{j\varphi(\omega)}$$

  což nazýváme frekvenční přenosovou funkcí systému

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ frekvenční charakteristika je grafické vyjádření frekvenční přenosové funkce systému (geometrické místo koncových bodů vektoru přenosu pro frekvence, prakticky pouze v intervalu $0 \leq \omega < \infty$)

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- frekvenční charakteristiky vyjadřujeme zpravidla dvěma způsoby:
  - frekvenční charakteristika v komplexní rovině

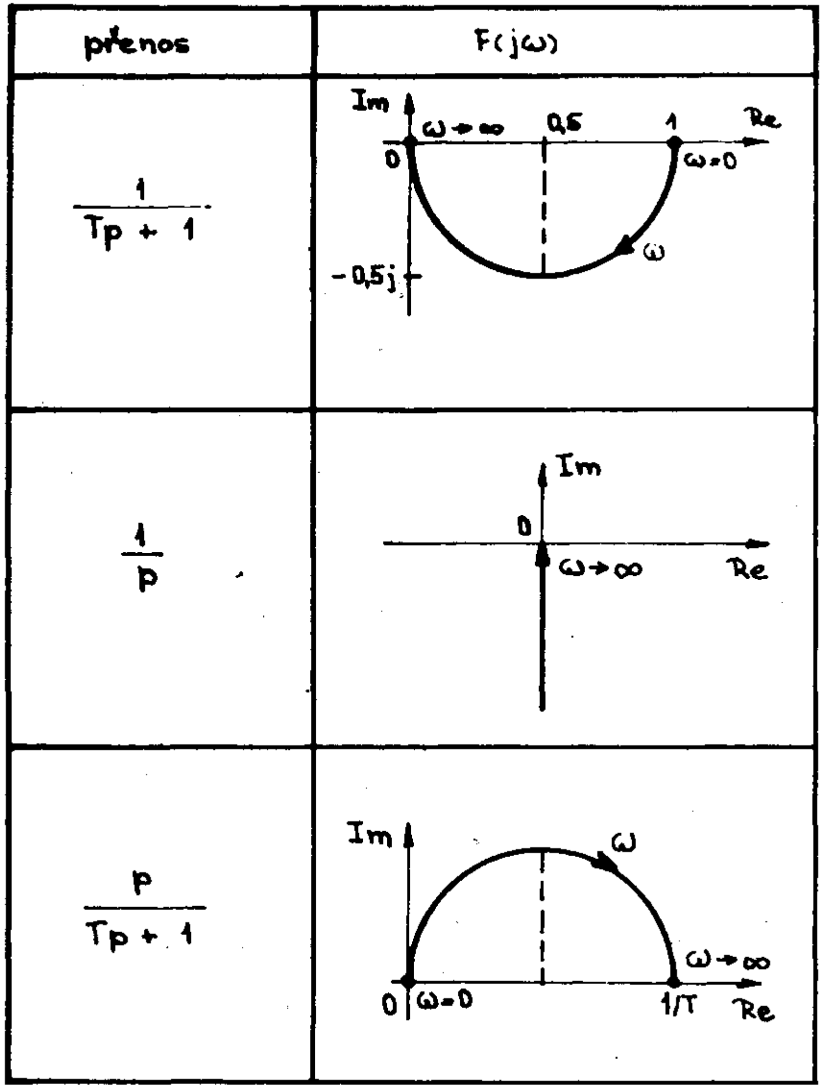
$$F(j\omega) = \mathrm{Re}\,[F(j\omega)] + j.\mathrm{Im}\,[F(j\omega)]$$

  - modulová (amplitudová) a fázová frekvenční charakteristika

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|.e^{j\varphi(\omega)}$$

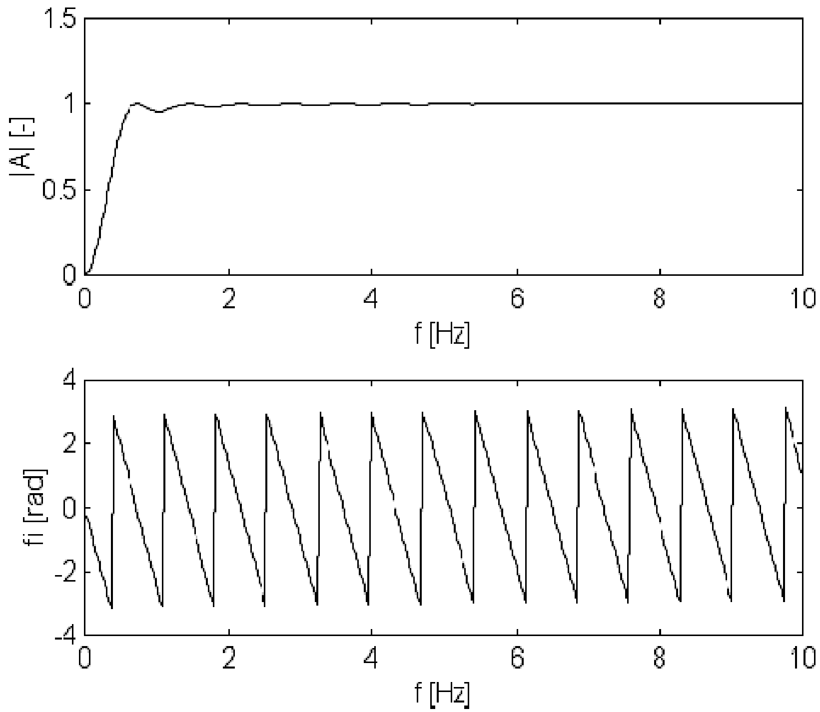
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA V KOMPLEXNÍ ROVINĚ

v tomto případě kreslíme frekvenční charakteristiku nejčastěji v komplexní rovině s osami, na které vynášíme reálnou a imaginární složku přenosu; frekvenční vlastnosti systému vyjadřuje křivka v komplexní rovině, jejímž parametrem je kruhová frekvence ω



MODULOVÁ A FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- vlastnosti systému určují dvě funkce – závislost modulu přenosu na frekvenci a závislost fáze na frekvenci;



MODULOVÁ A FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- v některých případech se využívá pro znázornění těchto charakteristik logaritmické měřítko – amplitudu pak vyjadřujeme v decibelech

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20.\log |F(j\omega)|$$

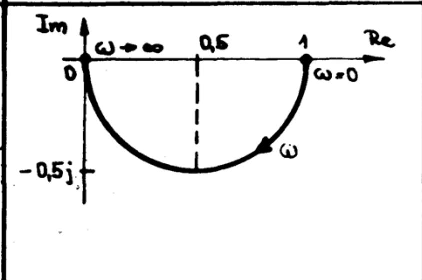
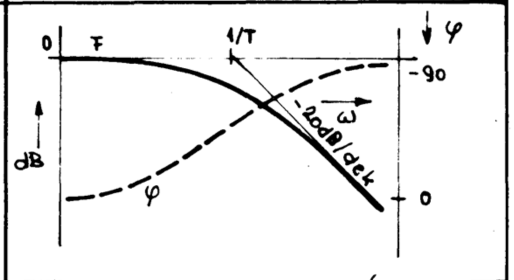
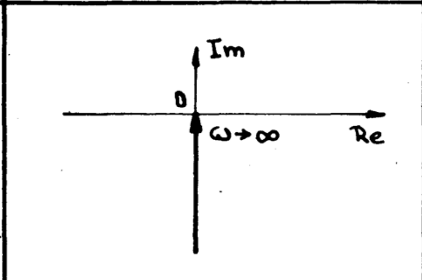
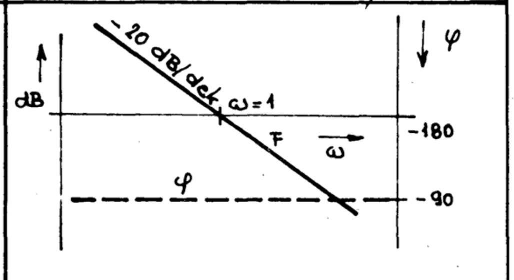
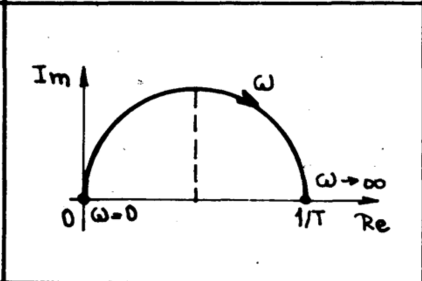
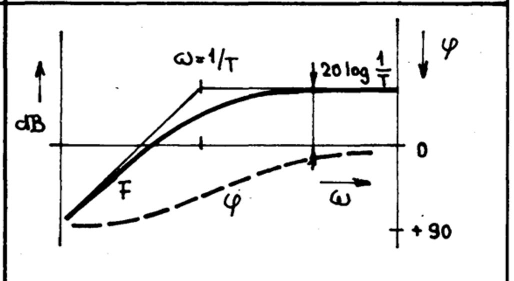
Tento způsob popisu je výhodný v případech, kdy je přenosová funkce systému určena součinem dílčích přenosových funkcí

$$F(j\omega) = F_1(j\omega).\ F_2(j\omega).\ \dots\ .\ F_k(j\omega);$$

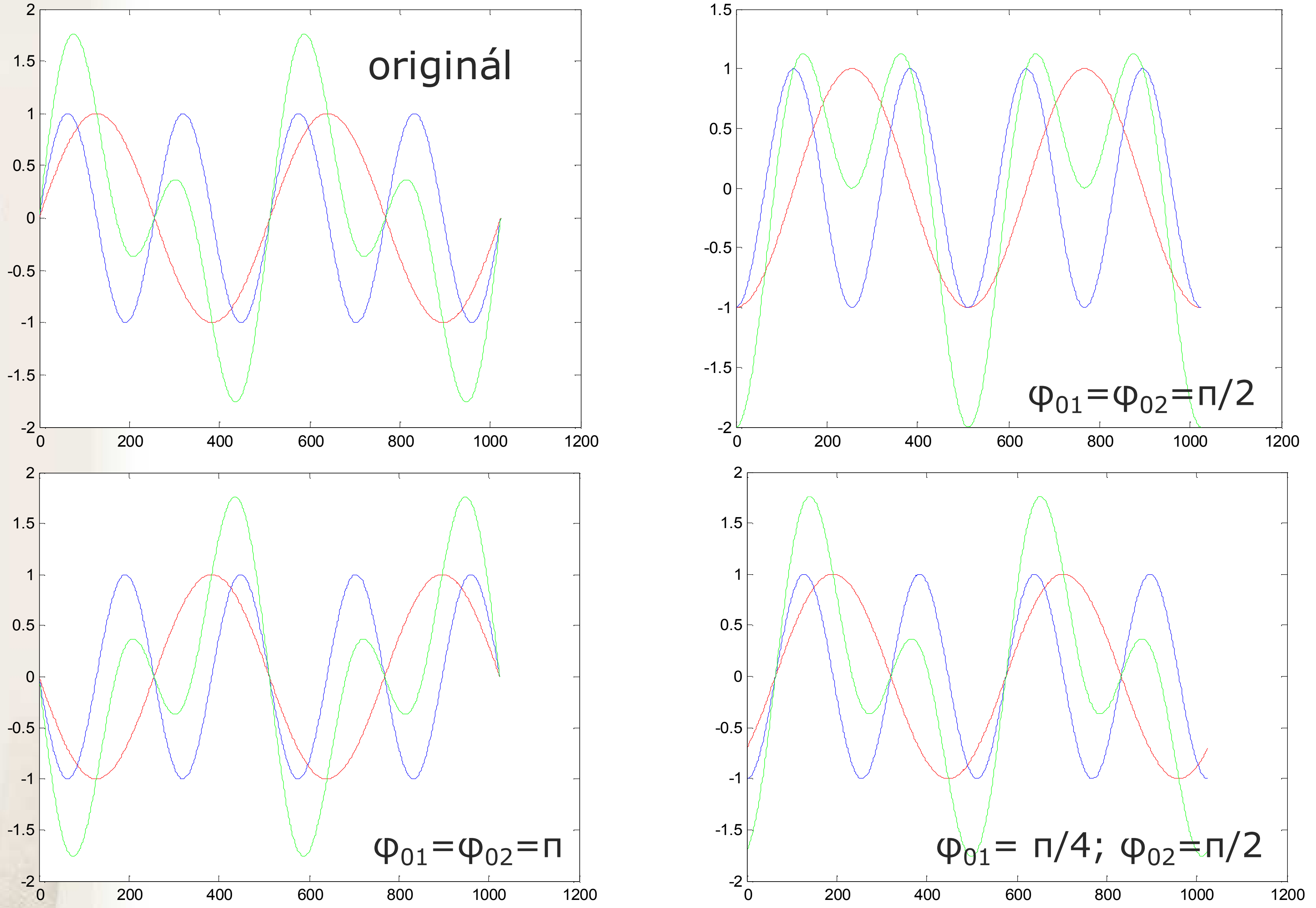
pak platí

$$|F(j\omega)|.e^{j\varphi(\omega)} = |F_1(j\omega)|.\ |F_2(j\omega)|\dots\ |F_k(j\omega)|.e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k)}$$

MODULOVÁ A FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

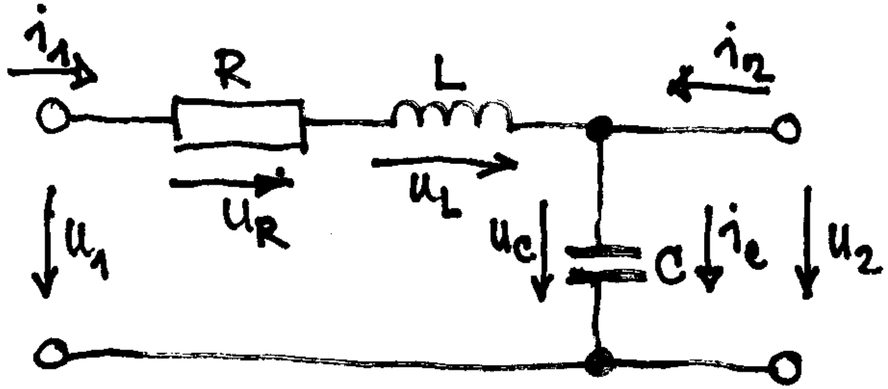
přenos	$F(j\omega)$	$F_{dB} = 20 \log \lvert F(j\omega) \rvert$; $\varphi(\omega)$
$\frac{1}{Tp+1}$		
$\frac{1}{p}$		
$\frac{p}{Tp+1}$		

HRÁTKY S POČÁTEČNÍ FÁZÍ



VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

nyní předpokládejme, že kapacita C závisí na napětí na kondenzátoru



$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

$$u_C = \frac{1}{C(u_C)} \int_{-\infty}^{t} i_C \, d\tau \quad \text{a} \quad i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} u_L \, d\tau$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

$$u_L = L.\frac{di_L}{dt} = L.\frac{di_1}{dt} \quad \text{a tedy} \quad i'_1 = \frac{1}{L}u_L$$

a tedy i

$$R.i_1 + L.i'_1 + u_C = u_1$$

Pak se poněkud komplikuje určení $i_1 = i_C$ ze vztahu

$$u_C = \frac{1}{C(u_C)}\int_{-\infty}^{t} i_C d\tau$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

Platí, že

$$\int_{-\infty}^{t} i_C d\tau = C(u_C).u_C$$

Potom pro i_C platí

$$i_C = [C(u_C).u_C]' = C'(u_C).u'_C.u_C + C(u_C).u'_C$$

Pro jednoduchost, nechť je $C(u_2) = k.u_2$ a tedy $C'(u_2) = k$; pak

$$i_1 = i_C = k.u'_C.u_C + k.u_C.u'_C = 2k.u_C.u'_C$$

$$i'_1 = i'_C = [2k.u_C.u'_C]' = 2k.(u'_C.u'_C + u_C.u''_C) = 2k.(u'_C)^2 + 2k.u_C.u''_C$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

A po dosazení dostáváme

$$2k.R.u_C.u'_C + 2k.L.(u'_C)^2 + 2k.L.u_C.u''_C + u_C = u_1$$

Protože $C(u_C) = k.u_C$, můžeme psát

$$2R.C(u_C).u'_C + 2L.C'(u_C).u'_C.u'_C + 2L.C(u_C).u''_C + u_C = u_1$$

$$2L.C(u_C).u''_C + (2R.C(u_C) + 2L.C'(u_C).u'_C).u'_C + u_C = u_1$$

A tedy obecně

$$b_n(\bullet).y^{(n)} + b_{n-1}(\bullet).y^{(n-1)} + \ldots + b_0(\bullet).y =$$
$$= a_m(\bullet).x^{(m)} + a_{m-1}(\bullet).x^{(m-1)} + \ldots + a_0(\bullet).x$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

$$b_n(\bullet).y^{(n)} + b_{n-1}(\bullet).y^{(n-1)} + \ldots + b_0(\bullet).y =$$
$$= a_m(\bullet).x^{(m)} + a_{m-1}(\bullet).x^{(m-1)} + \ldots + a_0(\bullet).x$$

(•) znamená závislost na určité (dané, zvolené) proměnné popisující chování systému – její průběh, ale obecně závisí na vstupním signálu

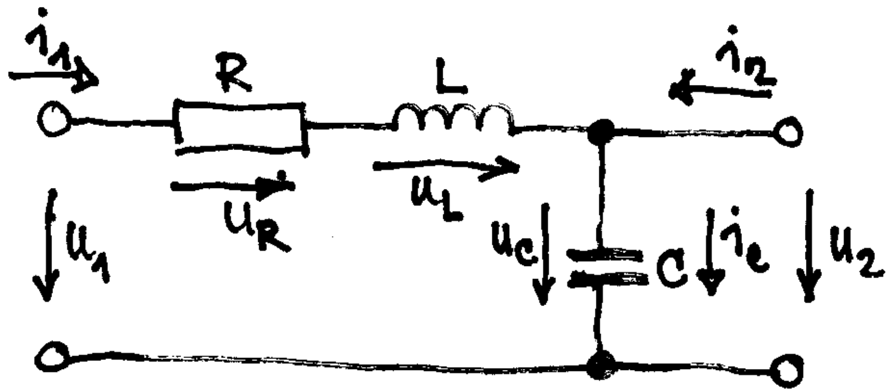
$$\Downarrow$$

(1)Vlastnosti nelineárního systému nezávisí jen na systému samém, nýbrž i na jeho vstupu (buzení)

(2) Laplacovu transformaci součinu funkce a derivace proměnné lze počítat (zda-li) jen pro konkrétní případ a tedy nelze obecně stanovit tvar operátorové přenosové funkce nelineárního systému

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

předpokládejme konstantní parametry prvků R, L, C obvodu



$$u_2 = u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C \, d\tau \quad \text{a} \quad i_1 = i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L \, d\tau$$

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

$$u_2 = u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C d\tau \quad \text{a} \quad i_1 = i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L d\tau$$

$$u'_2 = \frac{1}{C} i_1$$

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

$$u'_2 = 0.u_2 + \frac{1}{C} i_1 + 0.u_1$$

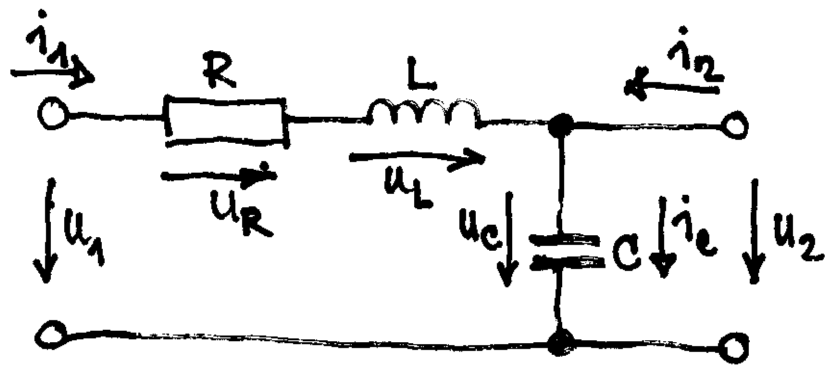
$$R.i_1 + L.i'_1 + u_2 = u_1$$

$$i'_1 = -\frac{1}{L}u_2 - \frac{R}{L}.i_1 + \frac{1}{L}u_1$$

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

$$u_2 = u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C d\tau \quad \text{a} \quad i_1 = i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L d\tau$$

u_2 a i_1 jsou **stavové veličiny**; z jejich hodnot, resp. jejich derivací a parametrů systému jsme schopni spočítat hodnoty všech dalších veličin popisujících chování daného systému



$$u_R = R.i_1; \quad u_L = L.i'_1; \quad u_C = u_2$$

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

$$u'_2 = 0.u_2 + \frac{1}{C}i_1 + 0.u_1 \qquad i'_1 = -\frac{1}{L}u_2 - \frac{R}{L}.i_1 + \frac{1}{L}u_1$$

$$\begin{bmatrix} u'_2 \\ i'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_2 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} . [u_1]$$

$$\mathbf{s}' = \mathbf{A}.\mathbf{s} + \mathbf{B}.\mathbf{x}$$

rovnice dynamiky

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

$$u_2 = u_2 = u_2 + 0.i_1 + 0.u_1$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_2 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}.\mathbf{s} + \mathbf{D}.\mathbf{x}$$

výstupní rovnice

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

A - matice vnitřních vazeb systému (též systémová matice nebo matice zpětných vazeb);
rozměr: n x n

B - matice vazeb systému na vstup (též vstupní matice); rozměr: m x n

C - matice vazeb výstupu na stav (výstupní matice); rozměr: n x r (r je počet výstupů)

D - matice přímých vazeb výstupů na vstupy; rozměr: m x n (z hlediska zkoumání vlastností lineárních dynamických systémů nejsou tyto vazby podstatné a často je tato matice nulová)

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

nyní opět předpokládejme, že kapacita C závisí na napětí na kondenzátoru; pak

$$u_2.C(u_2) = u_C.C(u_C) = \int_{-\infty}^{t} i_C d\tau = \int_{-\infty}^{t} i_1 d\tau$$

$$u'_2.C(u_2) + u_2.C'(u_2).u'_2 = i_1$$

$$u'_2 = \frac{1}{C(u_2) + u_2.C'(u_2)}.i_1 = \frac{1}{\Gamma(u_2)}.i_1$$

$$i'_1 = -\frac{1}{L}u_2 - \frac{R}{L}.i_1 + \frac{1}{L}u_1$$

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

$$u'_2 = \frac{1}{\Gamma(u_2)}.i_1 \qquad i'_1 = -\frac{1}{L}u_2 - \frac{R}{L}.i_1 + \frac{1}{L}u_1$$

$$\begin{bmatrix} u'_2 \\ i'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\Gamma(u_2) \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_2 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} . [u_1]$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

1. diferenciální rovnice;
2. operátorová přenosová funkce (Laplacova transformace);
3. rozložení nul a pólů;
4. frekvenční přenosová funkce;
5. frekvenční charakteristiky – v komplexní rovině; amplitudová, fázová;

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

1. diferenciální rovnice;
2. operátorová přenosová funkce (Laplacova transformace);
3. rozložení nul a pólů;
4. frekvenční přenosová funkce;
5. frekvenční charakteristiky – v komplexní rovině; amplitudová, fázová;
6. impulsní charakteristika;
7. přechodová charakteristika;

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

operátorová přenosová funkce

$$H(p) = Y(p)/X(p)$$

$$Y(p) = H(p).X(p)$$

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau).s_2(t-\tau).d\tau \approx S_1(p).S_2(p)$$

konvoluce

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p).\mathcal{L}(\delta(t))) = \mathcal{L}^{-1}(H(p).1)$$

$$Y(p) = H(p) = \mathcal{L}(h(t)*\delta(t)) = \mathcal{L}(h(t)*\mathcal{L}^{-1}(1))$$

- ☑ impulsní charakteristika a přenosová funkce tvoří transformační pár Laplacovy transformace.
- ☑ impulsní charakteristika a frekvenční přenosová funkce tvoří transformační pár Fourierovy transformace.

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ je-li přiveden na vstup signálu přiveden Diracův impulz, má systém reagovat na dvě nekonečně velké změny úrovně signálu v nekonečně krátkém intervalu;
- ☑ čím užší signál, tím širší spektrum – jednotkový impulz má nekonečně široké konstantní spektrum, takže přivedeme-li na vstup systému Diracův impulz, je situace ekvivalentní současnému přivedení úplné rovnoměrné směsi harmonických signálů o frekvencích od 0 do ∞ Hz;
- ☑ takový signál není reálný systém schopen přenést bez deformace;
- ☑ impulsové charakteristice lze tedy rozumět jako systémem zdeformovaný Diracův impulz. Podle vlastností deformovaného výstupního signálu můžeme usuzovat na vlastnosti systému;

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ je-li $h(t) = 0$ pro $t > t_0$,

  hovoříme o systému s konečnou impulsní charakteristikou (KIO – FIR);

- ☑ není-li $h(t) = 0$ pro $t > t_0$,
  resp. je-li $h(t) \neq 0$ pro $t < \infty$,

  hovoříme o systému s nekonečnou impulsní charakteristikou (NIO – IIR);

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
PŘECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA

přechodová charakteristika =

= odezva systému na jednotkový skok

$\mathcal{L}(\sigma(t)) = 1/p$

$Y(p) = G(p) = H(p).\mathcal{L}(\sigma(t)) = H(p).1/p = H(p)/p$

Příprava nových učebních materiálů pro obor Matematická biologie

je podporována projektem ESF

č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318

„VÍCEOBOROVÁ INOVACE STUDIA MATEMATICKÉ BIOLOGIE"

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

UNIVERSITAS MASARYKIANA BRUNENSIS

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ