ČASOVÉ ŘADY

(SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY)

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz, UKB A29, přízemí, dv.č.112

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

XI.
Z TRANSFORMACE
SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

Z TRANSFORMACE

definice DTFT - opakování

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}).\exp(-jk\omega T_{vz}),$$

X(ω) je obecně komplexní funkce proměnné ω - kmitočtu

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}).\exp(j\omega T_{vz})^{-k},$$

je-li z=exp(jωT), dostaneme

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}).z^{-k},$$

oboustranná Z-transformace

Z TRANSFORMACE

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_{vz}).z^{-k},$$ jednostranná Z-transformace

Z-transformace jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT_{vz}))=1$$

Z-transformace posunutého jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT_{vz}-nT_{vz}))= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta(kT_{vz} - nT_{vz}).z^{-n} = \Delta(0T_{vz}).z^{-n} = z^{-n} = \frac{1}{z^{n}}$$

Z TRANSFORMACE

Z-transformace jednotkového skoku

$$U(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$$

vynásobíme-li obě strany (z-1) dostaneme

$$(z-1).U(z) = (z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\dots) - (1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\dots) = z$$

$$U(z) = z/(z-1) = 1/(1-z^{-1})$$

VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

Linearita

$$a.x(k) + b.y(k) \sim a.X(z) + b.Y(z)$$

Posun vpravo x(k).u(k)

$$x(k-n).u(k-n) \sim z^{-n}X(z)$$

Posun vpravo x(k)

$$x(k-1) \sim z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$x(k-2) \sim z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}.x(-1)$$

$$\vdots$$

$$x(k-n) \sim z^{-n}X(z) + x(-n) + z^{-1}.x(-n+1) + \ldots + z^{-n+1}.x(-1)$$

Je-li $x(m) = 0$ pro $m = -1, -2, \ldots, -n$, je

$$x(k-n) \sim z^{-n}X(z),$$

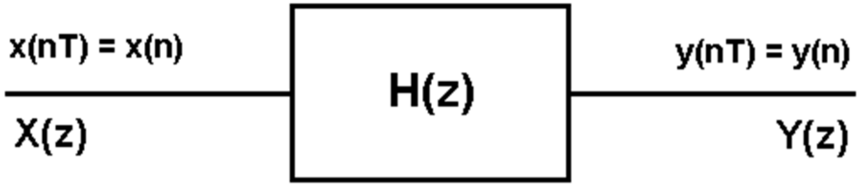
což je totéž jako pro $x(k-n).u(k-n)$.

VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

Konvoluce

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^{n} x(i).y(n-i) \approx X(z).Y(z)$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
PŘENOSOVÁ FUNKCE



$$y(nT_{vz}) = h(nT_{vz})*x(nT_{vz})$$

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

H(z) = Y(z)/X(z), kde H(z) je racionální lomená funkce proměnné z^{-1} (**obrazová přenosová funkce**)

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
NULOVÉ BODY A PÓLY

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \qquad n \leq m$$

$$H(z) = A . \frac{z^{m-n} \prod_{i=1}^{n} (z - z_{ni})}{\prod_{i=1}^{m} (z - z_{pi})}$$

A – zesílení; z_{ni} … nulové body; z_{pi} … póly

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
DIFERENČNÍ ROVNICE

$$H(z)=\frac{a_n z^{-n}+a_{n-1}z^{-n+1}+a_{n-2}z^{-n+2}+\ldots+a_0}{b_n z^{-m}+b_{n-1}z^{-m+1}+b_{n-2}z^{-m+2}+\ldots+b_0}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$(b_n z^{-n}+b_{n-1}z^{-n+1}+b_{n-2}z^{-n+2}+\ldots+b_0).Y(z)=$$
$$=(a_n z^{-n}+a_{n-1}z^{-n+1}+a_{n-2}z^{-n+2}+\ldots+a_0).X(z)$$

$$b_m Y(z).z^{-m}+b_{m-1}Y(z).z^{-m+1}+b_{m-2}Y(z).z^{-m+2}+\ldots+b_0.Y(z)=$$
$$=a_n X(z).z^{-n}+a_{n-1}X(z).z^{-n+1}+a_{n-2}X(z).z^{-n+2}+\ldots+a_0.X(z)$$

!!! za předpokladu nulových počátečních podmínek !!!

$$b_m y(iT_{vz}-mT_{vz})+b_{m-1}y(iT_{vz}-mT_{vz}+T_{vz})+b_{m-2}y(iT_{vz}-mT_{vz}+2T_{vz})+\ldots+b_0 y(iT_{vz})=$$
$$=a_n x(iT_{vz}-nT_{vz})+a_{n-1}x(iT_{vz}-nT_{vz}+T_{vz})+a_{n-2}x(iT_{vz}-nT_{vz}+2T_{vz})+\ldots+a_0 x(iT_{vz})$$

$$y(iT_{vz})=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{b_0}.x(iT_{vz}-kT_{vz})-\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{b_0}.y(iT_{vz}-kT_{vz})$$

diferenční rovnice

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
FREKVENČNÍ PŘENOSOVÁ FUNKCE

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \qquad n \leq m$$

$$H(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_m z^{m-n}}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \ldots + b_m}$$

$$z = \exp(j\omega T_{vz})$$

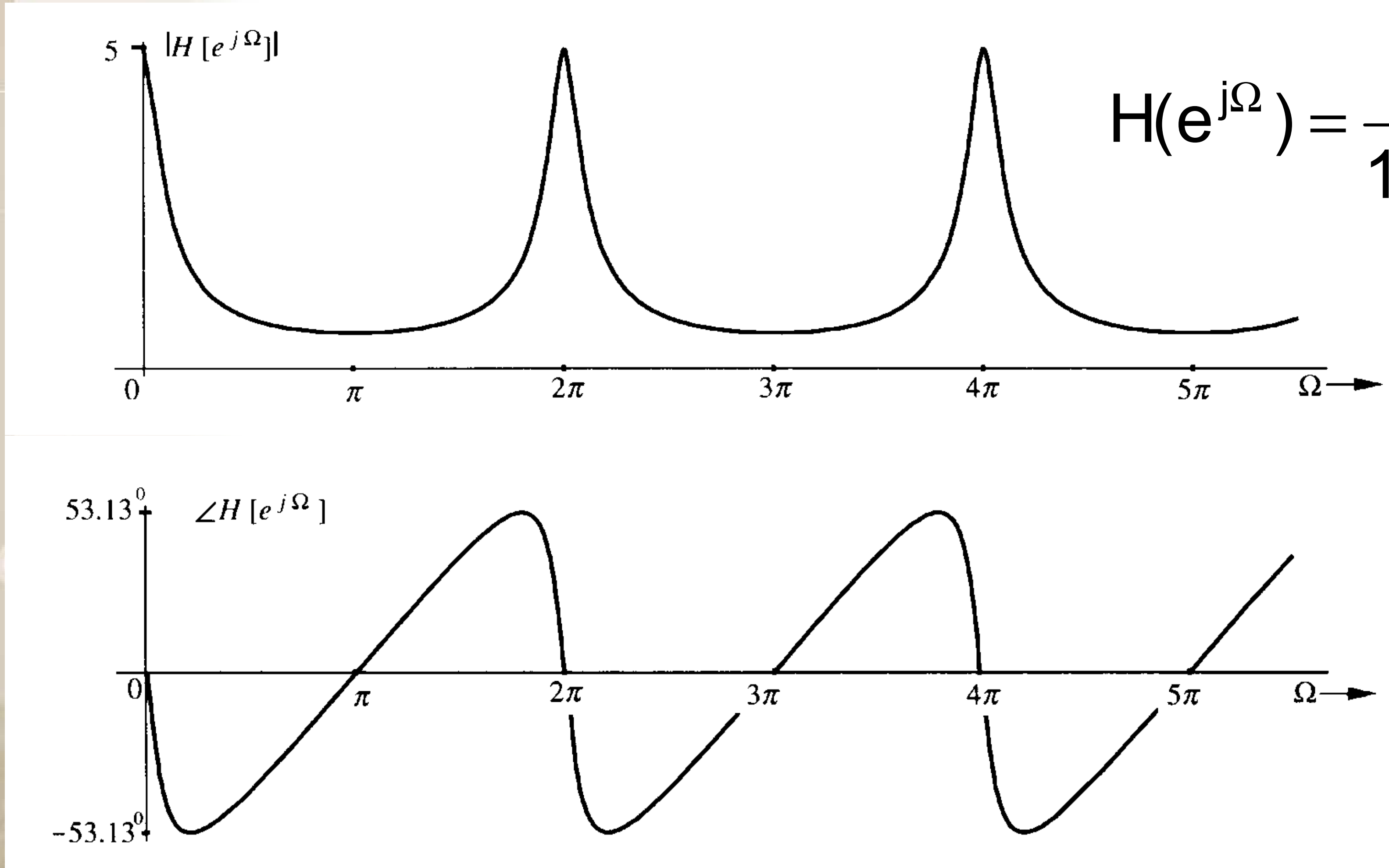
$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{j\omega m T_{vz}} + a_1 e^{j\omega(m-1)T_{vz}} + a_2 e^{j\omega(m-2)T_{vz}} + \ldots + a_m e^{j\omega(m-n)T_{vz}}}{b_0 e^{j\omega m T_{vz}} + b_1 e^{j\omega(m-1)T_{vz}} + b_2 e^{j\omega(m-2)T_{vz}} + \ldots + b_m e^{j\omega 0 T_{vz}}}$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY

$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{j\omega m T_{vz}} + a_1 e^{j\omega(m-1)T_{vz}} + a_2 e^{j\omega(m-2)T_{vz}} + \ldots + a_m e^{j\omega(m-n)T_{vz}}}{b_0 e^{j\omega m T_{vz}} + b_1 e^{j\omega(m-1)T_{vz}} + b_2 e^{j\omega(m-2)T_{vz}} + \ldots + b_m e^{j\omega 0 T_{vz}}}$$

$$H(\omega) = \left|H(\omega)\right|.e^{j\varphi}$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY



$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 0{,}8.e^{-j\Omega}}$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

operátorová přenosová funkce

$H(p) = Y(p)/X(p)$ $\qquad$ $H(z) = Y(z)/X(z)$

$Y(p) = H(p).X(p)$ $\qquad$ $Y(z) = H(z).X(z)$

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau).s_2(t-\tau).d\tau \approx S_1(p).S_2(p)$$

konvoluce

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^{n} x(i).y(n-i) \approx X(z).Y(z)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

za předpokladu, že $X(z) = 1$ máme

$$Y(z) = H(z).1$$

$$y(kT_{vz}) = h(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

za předpokladu, že $X(z) = 1$ máme

$$Y(z) = H(z).1$$

$$y(kT_{vz}) = h(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

Z-transformace jednotkového impulsu

$$\mathcal{Z}(\Delta(kT_{vz}))=1$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$y(kT_{vz}) = h(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z).\mathcal{Z}(\Delta(kT_{vz})))$$

odezva na jednotkový impuls -

- impulsová charakteristika

$$y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p).\mathcal{L}(\delta(t)))$$

$$Y(p) = H(p) = \mathcal{L}(h(t)*\mathcal{L}^{-1}(1))$$

- ☑ impulsní charakteristika a přenosová funkce tvoří transformační pár Laplacovy (Z) transformace.
- ☑ impulsní charakteristika a frekvenční přenosová funkce tvoří transformační pár Fourierovy (DFT) transformace.

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ je-li $h(t) = 0$ pro $t > t_0$ ($h(kT_{vz}) = 0$ pro $k > k_0$) hovoříme o systému s konečnou impulsní charakteristikou (KIO – FIR);
- ☑ není-li $h(t) = 0$ pro $t > t_0$ ($h(kT_{vz}) = 0$ pro $k > k_0$) hovoříme o systému s nekonečnou impulsní charakteristikou (NIO – IIR);

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
PŘECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA

přechodová charakteristika =

= odezva systému na jednotkový skok

$\mathcal{L}(\sigma(t)) = 1/p$

$$Y(p) = G(p) = H(p).\mathcal{L}(\sigma(t)) = H(p).1/p$$

$\mathcal{Z}(u(kT_{vz})) = 1/1\text{-}z^{-1} = z/(z-1)$

$$Y(z) = G(z) = H(z).z/(z-1)$$

VNITŘNÍ STAVOVÝ POPIS

Dynamika není vyjádřena derivací stavových proměnných, ale jejich hodnotami v následujícím časovém kroku.

$$\begin{bmatrix} s_1(k+1) \\ s_2(k+1) \\ \vdots \\ s_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ \vdots \\ s_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}(k+1) = \mathbf{A.s}(k) + \mathbf{B.x}(k),$$

kde $\mathbf{s}(k+1) = (s_1(k+1), s_2(k+1), \ldots, s_n(k+1))^T$ je vektor hodnot stavových veličin v čase k+1, $\mathbf{s}(k)$ je vektor hodnot stavových veličin v čase k a vektor $\mathbf{x}(k)$ představuje hodnoty vstupních posloupností v čase k. Matice $\mathbf{A}(n,n)$ je ***matice dynamiky systému*** a její (v případě lineárních, časově invariantních systémů konstantní) prvky vyjadřují vztah mezi hodnotami stavových veličin v čase k+1 a k. Matice $\mathbf{B}(n,m)$ je tzv. ***vstupní matice systému*** a popisuje vzájemný vztah mezi hodnotami stavových veličin v čase k+1 a hodnotami vstupních veličin v čase k.

VNITŘNÍ STAVOVÝ POPIS

Podobně jako u spojitých systémů informaci o ději uvnitř systému získáváme prostřednictvím hodnot výstupních veličin, které určujeme pomocí druhé stavové rovnice, kterou píšeme ve tvaru

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_r(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ \vdots \\ s_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C.s}(k) + \mathbf{D.x}(k),$$

kde kromě již výše popsaných symbolů $\mathbf{y}(k) = (y_1(k), y_2(k), \ldots, y_r(k))^T$ je vektor hodnot výstupní posloupnosti v čase k, matice **C**(r,n) matice popisující vliv stavu systému na výstup a matice **D**(r,m) je ***matice přímých vstupně-výstupních vazeb***.