Generování druhé harmonické v nelineárním prostředí

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$$

$$E \approx E_1 \operatorname{Re}\left\{e^{i(\omega t - k_1 z)}\right\} + E_2(z) \operatorname{Re}\left\{e^{i(2\omega t - k_2 z)}\right\}$$

$$P \approx \varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)E_1 \operatorname{Re}\left\{e^{i(\omega t - k_1 z)}\right\} + \varepsilon_0(\varepsilon_{r2}-1)E_2 \operatorname{Re}\left\{e^{i(2\omega t - k_2 z)}\right\} + +2d\left[E_1 \operatorname{Re}\left\{e^{i(\omega t - k_1 z)}\right\}\right]^2$$

Uvedené rovnice předpokládají $E_1 \gg E_2$, tedy nedošlo ještě k útlumu základní vlny a nelineární člen polarizace způsobený druhou harmonickou je zanedbatelný.

Nelineární člen polarizace můžeme upravit

$$2d\left[E_1 \operatorname{Re}\left\{e^{i(\omega t - k_1 z)}\right\}\right]^2 = \frac{E_1^2 d}{2}\left[e^{i(\omega t - k_1 z)} + e^{-i(\omega t - k_1 z)}\right]^2 = \frac{E_1^2 d}{2}\left[e^{i\,2(\omega t - k_1 z)} + e^{-i\,2(\omega t - k_1 z)} + 2\right]$$

(Polarizace obsahuje jak stejnosměrnou složku, tak i složku s druhou harmonickou frekvencí.)

Dále spočítáme prostorovou derivaci složky el. pole popisujícího druhou harmonickou:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{E_2(z)}{2}\left[e^{i(2\omega t - k_2 z)} + e^{-i(2\omega t - k_2 z)}\right]\right\} = \frac{E_2'}{2}\left[e^{i(2\omega t - k_2 z)} + e^{-i(2\omega t - k_2 z)}\right] - -ik_2\frac{E_2}{2}\left[e^{i(2\omega t - k_2 z)} - e^{-i(2\omega t - k_2 z)}\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{E_2(z)}{2}\left[e^{i(2\omega t - k_2 z)} + e^{-i(2\omega t - k_2 z)}\right]\right\} \approx -ik_2 E_2'\left[e^{i(2\omega t - k_2 z)} - e^{-i(2\omega t - k_2 z)}\right] - -k_2^2\frac{E_2}{2}\left[e^{i(2\omega t - k_2 z)} + e^{-i(2\omega t - k_2 z)}\right]$$

Zde jsme předpokládali, že změny E_2 jsou mnohem pomalejší, než změny fáze druhé harmonické, tj. že člen s druhou derivací E_2 je možné zanedbat.

Dosazením do vlnové rovnice dostaneme pro složku s frekvencí 2ω

$$-ik_2 E_2'\left[e^{i(2\omega t - k_2 z)} - e^{-i(2\omega t - k_2 z)}\right] - k_2^2\frac{E_2}{2}\left[e^{i(2\omega t - k_2 z)} + e^{-i(2\omega t - k_2 z)}\right] + + \frac{n_2^2}{c^2}(2\omega)^2\frac{E_2}{2}\left[e^{i(2\omega t - k_2 z)} + e^{-i(2\omega t - k_2 z)}\right] = -\mu_0 2\omega^2 E_1^2 d\left[e^{i\,2(\omega t - k_1 z)} + e^{-i\,2(\omega t - k_1 z)}\right]$$

$$-ik_2 E_2'\left[e^{i(2\omega t - k_2 z)} - e^{-i(2\omega t - k_2 z)}\right] = -\mu_0 2\omega^2 E_1^2 d\left[e^{i\,2(\omega t - k_1 z)} + e^{-i\,2(\omega t - k_1 z)}\right]$$

(využilo se $2\omega/k_2 = c/n_2$) a získáme dvě komplexně sdružené rovnice

$$-ik_2 E_2' = 2\mu_0\omega^2 E_1^2 d\, e^{-i\Delta k z}$$
$$ik_2 E_2' = 2\mu_0\omega^2 E_1^2 d\, e^{i\Delta k z}$$

kde $\Delta k = k_2 - 2k_1$. Integrací druhé rovnice, využitím okrajové podmínky $E_2(0) = 0$ a vztahu $2\omega/k_2 = (\varepsilon_{r2}\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ získáme

$$E_2 = -\omega\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}}\, E_1^2 d\, \frac{e^{i\Delta k z} - 1}{\Delta k}$$

$$|E_2|^2 = \frac{\mu_0}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\,\omega^2 d^2 E_1^4\, \frac{\sin^2\frac{\Delta k}{2}z}{\left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2}$$