Počítání s číselnými obory

$\mathbb{N}$ přirozená čísla

$\mathbb{Z}$ celá čísla

$\mathbb{Q}$ racionální čísla

$\mathbb{R}$ reálná čísla

$\mathbb{C}$ komplexní čísla

zadány operace sčítání a násobení

Operace na množině $\mathbb{K}$ je zobrazení

$$\circ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} = \{ (a, b) \,;\, a \in \mathbb{K},\, b \in \mathbb{K} \}$$

Zobrazení $\circ$ přiřazuje každé dvojici (a, b) jediné číslo $a \circ b \in \mathbb{K}$.

Vlastnosti sčítání a násobení na množinách $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

komutativita $\quad a + b = b + a \qquad a \cdot b = b\, a$

asociativita $\quad (a+b) + c = a + (b + c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

existence neutrálního prvku $\quad a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a$

existence inverzního prvku

opačný prvek $\quad a + (-a) = 0$

převrácený prvek $\quad a \neq 0 \quad a \cdot (a^{-1}) = 1$

Poslední vlastnost násobení pro $\mathbb{C}$

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad z = a + ib \qquad z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$$

Distributivita násobení vzhledem ke sčítání

$$(a+b)\cdot c = (a\, c) + (b\cdot c)$$

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Písmena $\mathbb{K}$ budu v celé přednášce používat pro označení reálných nebo kompl čísel ($a \in \mathbb{K}$ místo $a \in \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots\dots + a_{kn}x_n &= b_k
\end{aligned}$$

Soustava k rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$

Matice soustavy

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{n \text{ sloupců}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} k \text{ řádků}$$

a_{ij} číslo v i-tém řádku j-tém sloupci

Rozšířená matice soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

Homogenní soustava

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\dots$$
$$\dots = 0$$

Řešení soustavy čísla $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, po jejichž dosazení dostaneme rovnosti

Ekvivalentní soustavy jsou takové soustavy, které mají stejnou množinu řešení

Ekvivalentní úpravy změny soustavy, které vedou k jiné soustavě se stejnou množinou řešení.

Elementární ekvivalentní úpravy

- k dané rovnici přičteme násobek jiné rovnice
- danou rovnici vynásobíme číslem $\neq 0$
- změna pořadí rovnic

Elementární řádkové operace (na matici) EŘO

- k i-tému řádku přičteme násobek j-tého řádku $(j \neq i)$
- i-tý řádek vynásobíme číslem $c \neq 0$
- vyměníme i-tý a j-tý řádek

Schodovitý tvar matice

$A = (a_{ij})$

Vedoucí koeficient i-tého řádku matice A je první nenulové číslo v i-tém řádku

i-tý řádek $\quad 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 31 \; 4 \; 8 \; \ldots \; \ldots$

vedoucí koef je $a_{i5} = 31$

Matice je ve schodovitém tvaru, jestliže platí

(1) nulové řádky jsou za nenulovými

(2) je-li $a_{i,j}$ vedoucí koeficient i-tého řádku, pak vedoucí koeficient $(i+1)$-ního řádku je $a_{i+1,l}$ kde $l > j$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{i,j} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{i+1,l} & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Příklad

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Matice ve sch tvaru

Věta: Soustavu, jejíž matice je ve schod. tvaru, umíme vyřešit

Řešení na příkladu

$$\begin{aligned} x_1 + 0\cdot x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

$x_5 = p \in \mathbb{K}$

x_4 spočítáme z poslední rovnice

$$x_4 = 1 - 2x_5 = 1 - 2p$$

x_3 spočítáme z 2. rovnice

$$x_3 = -x_5 - 2x_4 = -p - 2 + 4p = -2 + 3p$$

$x_2 = q \in \mathbb{K}$

x_1 spočítáme z 1 rov

$$x_1 = 3 + 2x_3 - x_4 - x_5 =$$
$$= 3 - 4 + 6p - 1 + 2p - p =$$
$$= -2 + 7p$$

Řešení soustavy je:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2+7p, q, -2+3p, 1-2p, p) \qquad p, q \in \mathbb{K}$$

Důkaz věty:

(1) Jestliže v matici je řádek

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & b \neq 0 \end{array}\right)$$

který odpovídá rovnici $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$

$$0 = b$$

pak soustava nemá řešení.

(2) Jestliže tato rovnice nenastane, má soustava vždy řešení, které najdeme takto.

Neznámé, které nestojí u vedoucích koeficientů zvolíme za parametry (v příkladu x_5 a x_2).

Počet rovnic = počet ved. koeficientů u zbylých neznám

Proto zbývající neznámé spočítáme od spoda nahoru po

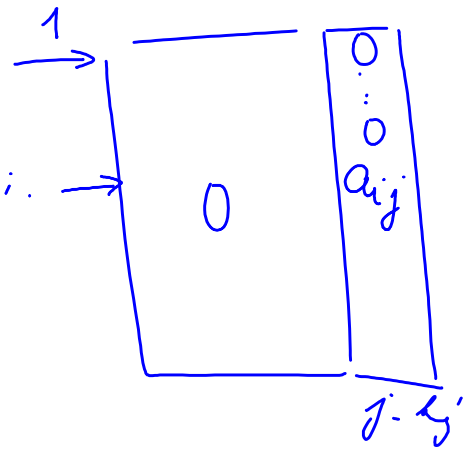
ostatních neznámých jako v příkladu

Věta Každou matici lze převést pomocí elementárních řádkových operací na matici ve schodovitém tvaru

Důkaz: je algoritmický a nazývá se Gaussova eliminace

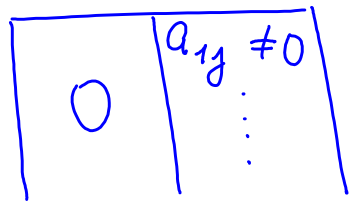
Mějme matici A o rozměrech n sloupců a l řádků

Nechť první nenulový sloupec je j-tý

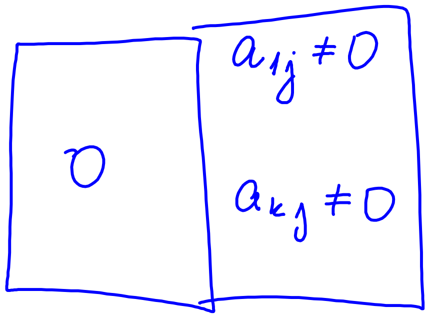


Nechť 1. nenulové číslo v j-tém sloupci je a_{ij}

Vyměníme 1. a i-tý řádek. Tím dostaneme novou matici, která má vedoucí koeficient 1. řádku a_{1j}



Jestliže a_{kj} je číslo různé od 0 v k-tém řádku, pak

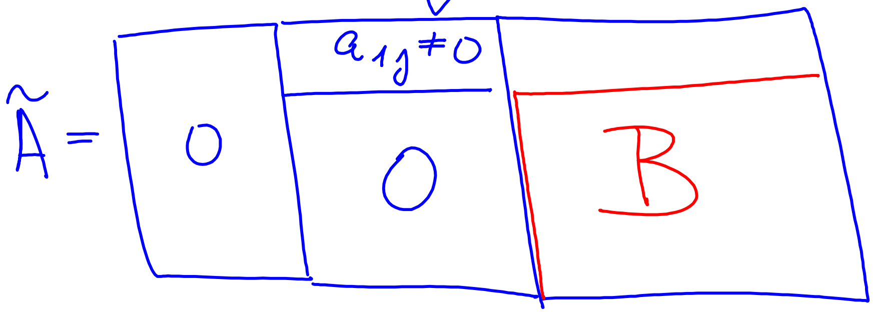


od k-tého řádku odečteme

$\frac{a_{kj}}{a_{1j}}$ – násobek 1. řádku

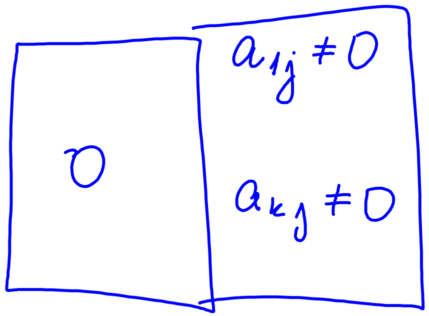
$$a_{kj} - \frac{a_{kj}}{a_{1j}} \cdot a_{1j} = a_{kj} - a_{kj} = 0$$

Na místě k j dostaneme



Stejný postup uplatníme na matici B, která má o (1+j) sloupců méně než matice A a o 1 řádek méně. To děláme tak dlouho, až má B jen 1 řádek.

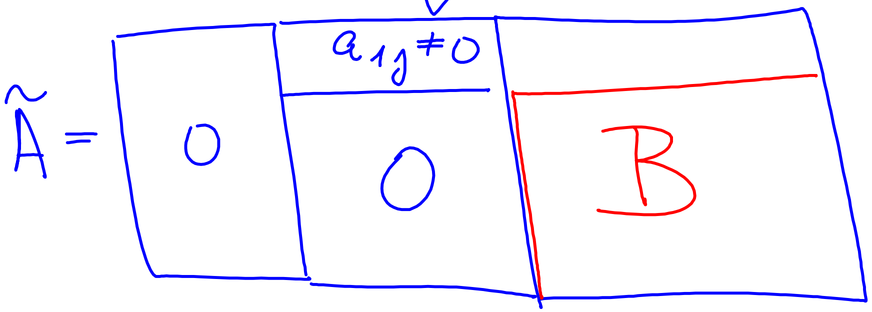
Jestliže a_{kj} je číslo různé od 0 v k-tém řádku, pak



od k-tého řádku odečteme

$\frac{a_{kj}}{a_{1j}}$ – násobek 1. řádku

Na místě k j dostaneme $a_{kj} - \frac{a_{kj}}{a_{1j}} \cdot a_{1j} = a_{kj} - a_{kj} = ($



Stejný postup uplatníme na matici B, která má o $(1+j)$ sloupců méně než matice A a o 1 řádek méně. To děláme tak dlouho, až má B pouze 1 řádek.

Příklad (Zlatoš, kap 3)

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad\quad - x_4 &= 1\\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0\\
x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

rozšířená matice soustavy

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & 0 & -1 & 1\\
3 & 2 & 4 & -2 & 0\ {\color{red}1}\\
1 & -1 & 4 & -1 & 0
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 4 & -1 & 0\\
2 & 3 & 0 & -1 & 1\\
3 & 2 & 4 & -2 & 0\ {\color{red}1}
\end{array}\right)
\sim
$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & 0 \;\; 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \;\; 0 \end{array}\right)$$

řádek ze samých 0 zakončený nenulovým.
$\Rightarrow$ soustava nemá řešení

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 0$$

$$5x_2 - 8\underline{x_3} + \underline{x_4} = 1$$

$$x_4 = p$$
$$x_3 = q$$

$$5x_2 = 1 + 8q - p$$

$$x_2 = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}q - \frac{1}{5}p$$

$$x_1 = x_2 - 4x_3 + x_4 = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}q - \frac{1}{5}p - 4q + p =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{12}{5}q + \frac{4}{5}p$$

Červená soustava má řešení

$$\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\frac{1}{5} - \frac{12}{5}q + \frac{4}{5}p,\ \frac{1}{5} + \frac{8}{5}q - \frac{1}{5}p,\ q,\ p\right)$$