1

Opakování Minule jsme dokázali

Věta Jsou-li $v_1, v_2, \dots, v_k$ lin. nez. vektory v prostoru U a $u_1, u_2, \dots, u_l$ libovolné vektory v U, pak lze vybrat vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ tak, že

(1) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ jsou lin. nez.

(2) $[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l]$

Důsledek 1 Každý vekt. prostor konečné dimenze má bázi.

Báze: $w_1, w_2, \dots, w_n \in V$,
(1) jsou LN
(2) $[w_1, \dots, w_n] = V$ (generují prostor V)

2

Důsledek 2 Jestliže $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lin. nezávislé vektory v prostoru U konečné dimenze, pak je lze doplnit na bázi prostoru U.

Důkaz pomocí věty: $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou LN jako ve větě. Vezmeme za $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ vektory, které generují prostor U (ty existují podle definice konečné dimenze). Podle věty lze nyní z vektorů $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ vybrat vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ tak, že

(1) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ jsou LN

(2) $[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, \dots, u_\ell] \supseteq [u_1, u_2, \dots, u_\ell] = U$

Tedy vektory $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ tvoří bázi prostoru U.

3

Početní algoritmus pro předchozí větu

Mějme vektory $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_\ell \in \mathbb{K}^n$ (jako sloupcových vektorů)

Chceme vybrat vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_r}$ tak, že

(1) $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_r}$ jsou LN

(2) $[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_r}] = [u_1, u_2, \ldots, u_\ell]$

Přitom platí, že jsou-li na začátku seznamu lin. nezávislé vektory, algoritmus je vybere.

POPIS: Vektory $u_1, u_2, \ldots, u_\ell$ napíšeme jako sloupce do matice. S maticí provádíme element. řádk. úpravy tak, abychom

4

dostali schodovitý tvar. Ve schod. tvaru označíme vedoucí koefic. všech řádků. Čísla sloupců, ve kterých byly vedoucí koeficienty stojí, nám udávají indexy vektorů, které vybereme, tj. $i_1, i_2, \dots, i_r$.
Tyto vektory mají vlastnost (1) a (2).

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{operace}]{\text{element. řádk.}} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 2. 4.

○ vedoucí koeficienty řádků

Vybereme u_1, u_2, u_4

čísla sloupců s ved. koef.

5

Ukažme si, proč jsou u_1, u_2, u_4 lin. nezávislé

Po zjištění, že u_1, u_2, u_4 jsou LN, musíme ukázat, že rovnice

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_4 u_4 = \vec{O} \qquad u_i \in \mathbb{K}^n$$

s neznámými $a_1, a_2, a_4 \in \mathbb{K}$ má pouze triviální řešení

$$a_1 = a_2 = a_4 = 0.$$

Tato rovnice vede na soustavu n rovnic o 3 neznámých.
homogenní

Matice této hom. soustavy je

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{jako na str. (4)}]{\text{stejné element. řádk. úpravy}} \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešením je pouze triviální řešení $a_1 = a_2 = a_4 = 0$.

Tedy u_1, u_2, u_4 jsou LN.

6

Nyní ukážeme, že u_3 je lin. kombinací u_1 a u_2. Z toho plyne,

že $[u_1, u_2, u_4] = [u_1, u_2, u_3, u_4]$

Proč? $[u_1, u_2, u_4] \subseteq [u_1, u_2, u_3, u_4]$ neboť $\{u_1, u_2, u_4\} \subseteq \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

Obrácená inkluze, víme-li, že $u_3 = a u_1 + b u_2$.

$w \in [u_1, u_2, u_3, u_4]$, pak $w = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4 =$

$= a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 (a u_1 + b u_2) + a_4 u_4 =$

$= (a_1 + a_3 a) u_1 + (a_2 + a_3 b) u_2 + a_4 u_4 \in [u_1, u_2, u_4]$

Tedy $[u_1, u_2, u_3, u_4] \subseteq [u_1, u_2, u_4] \Rightarrow$ rovnost lin. obalů.

7

Konečně budeme dokazovat, že $u_3 = a u_1 + b u_2$ pro nějaké $a, b \in \mathbb{K}$

To znamená dokázat, že rovnice

$$a u_1 + b u_2 = u_3 \qquad u_i \in \mathbb{K}^n$$

má nějaké řešení. Jde o soustavu n rovnic a 2 neznámých a, b

Matice této soustavy je

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\right) \xrightsquigarrow{\text{stejné elem. řádk. operace}}_{\text{jako ve kr. 4}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení, ve 3. sloupci NENÍ vedoucí koeficient